SVEUČILIŠTE U SPLITU

FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

GOJKO MAGAZINOVIĆ

POVEĆANJE DJELOTVORNOSTI OPTIMIRANJA STROJARSKIH KONSTRUKCIJA POJASNIM APROKSIMACIJAMA CILJA I OGRANIČENJA

DOKTORSKA DISERTACIJA

SPLIT, 2001.

Doktorska disertacija je izrađena u

Zavod za strojarstvo i brodogradnju
Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje
Sveučilište u Splitu

Mentor

Prof. dr. sc. Damir Vučina, dipl. ing.

Radnja ima 106 listova

SADRŽAJ

1. UVOD

Optimiranje strojarskih konstrukcija[1], ili još šire, konstrukcijskih rješenja, svakim danom postaje sve važnijim čimbenikom uspješna konstrukcijska procesa [1-4]. Štoviše, postupci numeričkog optimiranja ne nalaze svoju primjenu samo u optimiranju konstrukcija [5, 6], već su one moguće i znatno šire, od optimiranja strojne obrade [7] i određivanja razmještaja strojeva [8], do potpore pri donošenju odluka [9].

Nužan uvjet za uspješnu primjenu postupka optimiranja je raspolaganje odgovarajućim *alatom* koji će biti u stanju zadovoljiti potrebe projektanata i konstruktora [10]. Alat za optimiranje mora biti općenit, pouzdan, točan, djelotvoran i jednostavan za uporabu [11], kako bi korisniku omogućio posvećivanje postavljenu zadatku i ostvarivanje boljega projektnog i konstrukcijskog rješenja.

Do danas su razvijeni brojni postupci numeričkog optimiranja [12-15], međutim ni jedan od tih postupaka ne udovoljava svim postavljenim zahtjevima [11]. Pored dvojbene pouzdanosti mnogi postupci su često obilježeni i izuzetnim vremenom potrebnim za postizanje rješenja – Thanedar i suradnici [11] navode primjer za čije je rješavanje trebalo preko stotinu sati neprestanoga rada računala. Broj izračunavanja funkcija cilja i ograničenja, kao i njihovih gradijenta, do postizanja rješenja se, stoga, često uzima jednim od najvažnijih mjerila uspješnosti postupka optimiranja [16-22].

U cilju povećanja djelotvornosti primjena postupaka aproksimacije u optimiranju razvija se zajedno s razvojem numeričkih postupaka optimiranja [23]. Najpoznatiji primjeri su postupci uzastopnoga linearnoga ili kvadratnoga programiranja [14, 15], i postupci konveksne linearizacije [24]. U okrilju strukturnoga optimiranja[2], podklase inženjerskoga optimiranja[3], razvijeni su brojni postupci optimiranja uzastopnim približenjima[4] [23] koji, i

---

[1] Pojam "strojarska konstrukcija" u ovom će se radu rabiti u širem smislu, za označavanje proizvoda, sustava i procesa iz strojarske prakse.

[2] Strukturno optimiranje (engl. *structural optimization*) je uobičajeni naziv za optimiranje složenih mehaničkih i drugih konstrukcija, analiziranih metodom konačnih elemenata.

[3] Pojam "inženjersko optimiranje" (engl. *engineering optimization*) u ovom će se radu rabiti za označavanje primjena postupaka optimiranja u tehničkoj praksi [15].

[4] Engl. *sequential approximate optimization* [25].

pored polučenih zavidnih postignuća, ne jamče konvergenciju k rješenju, pa se ne mogu preporučiti za opću uporabu. Kako ustvrđuju Rodriguez, Renaud i Watson [26], premalo se istraživača posvetilo razvoju takvih postupaka aproksimacije u optimiranju koji jamče konvergenciju k rješenju. Slično ustvrđuju i Sobieszczanski-Sobieski i Haftka, kada iznose kako su matematički temelji ovakvih postupaka aproksimacije nedovoljno razrađeni [25].

Značajan doprinos razvoju suvremenih postupaka optimiranja predstavlja nevelik rad Pšeničnoga [27] koji je više godina, sve do prijevoda na engleski jezik i objavljivanja knjiga [28, 29] bio potpuno nepoznat na Zapadu. Postupak Pšeničnoga odlikuje se poželjnim svojstvom globalne konvergencije [30, 31], odnosno zajamčene konvergencije iz proizvoljne početne točke. Štoviše, postupak Pšeničnoga jamči konvergenciju uz uporabu samo dijela postavljenih ograničenja zadatka optimiranja, što ga čini izuzetno pogodnim za primjenu u optimiranju složenih strojarskih konstrukcija [32].

Arora i suradnici [33, 30] usavršili su izvorni postupak Pšeničnoga, izradivši poznati *PLBA* algoritam. Opsežnim numeričkim pokusima [21, 34, 35] potvrdili su njegovu prikladnost za primjenu u inženjerskom optimiranju.

U magistarskoj tezi [36] dao sam svoje viđenje postupka[5] Arore i suradnika i predložio neka poboljšanja [37, 38]. Usporedbom dobivenih rezultata s rezultatima drugih autora pokazao sam [36] da predloženi postupak polučuje rezultate koji su usporedivi s rezultatima ponajboljih postupaka optimiranja opće namjene. Ovako razrađen postupak numeričkoga optimiranja ocijenio sam čvrstim temeljom za budući razvoj.

Ovaj rad predstavlja pokušaj daljnjega usavršavanja postupka optimiranja strojarskih konstrukcija objedinjavanjem dobrih svojstava provjerena postupka uzastopnoga kvadratnoga programiranja s dobrim svojstvima višedimenzionalne aproksimacije funkcija cilja i ograničenja, razvijene za potrebe strukturnoga optimiranja.

---

[5] Pojam *postupak* u ovom ću radu rabiti za označavanje skupa (načelnih) pravila kojima se određuje način rješavanja određenoga zadatka. U tom smislu je *algoritam* razrada postupka i predstavlja višu razinu potankosti. Računalni *program* tada je oživotvorenje algoritma i predstavlja najvišu razinu potankosti. To znači da se na temelju jednoga postupka mogu izraditi različiti algoritmi, a na temelju svakoga od njih, različiti računalni programi [36].

1.1. STANDARDNI OBLIK ZADATKA OPTIMIRANJA[6]

Svi zadaci optimiranja, neovisno o svom podrijetlu, mogu se izraziti općim, standardnim oblikom:

Odrediti n-dimenzionalni vektor neovisnih varijabli $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, koji minimira funkciju cilja

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{1}$$

uz zadovoljavanje *m'* jednakosnih i *m-m'* nejednakosnih ograničenja

$$g_j(\mathbf{x}) \equiv g_j(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \quad j = 1 \text{ do } m', \tag{2}$$

$$g_j(\mathbf{x}) \equiv g_j(x_1, x_2, ..., x_n) \leq 0, \quad j = m' + 1 \text{ do } m, \tag{3}$$

pri čemu je vektor neovisnih varijabli omeđen donjom i gornjom granicom pojedinih sastavnica

$$x_{Li} \leq x_i \leq x_{Ui}, \quad i = 1 \text{ do } n. \tag{4}$$

Iako je model (1)-(4) prilagođen zadacima s neprekinutim projektnim varijablama, uz manja poopćenja primjenjiv je i na zadatke s prekinutim i diskretnim varijablama, kao i na zadatke s više ciljeva.

---

[6] Poglavlja 1.1. i 1.2. postavljaju neke od temeljnih odrednica ovoga djela. Zbog njihove općenitosti prenosim ih, uz manje izmjene, iz svoje magistarske teze [36].

1.2. OPĆI OBLIK POSTUPAKA NUMERIČKOGA OPTIMIRANJA

Mnogi deterministički postupci numeričkoga optimiranja određeni su zajedničkim, općim, postupkom iterativnoga poboljšavanja trenutnoga rješenja vektora projektnih varijabli

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + \alpha_k^* \cdot \mathbf{d}^{(k)}, \quad k = 1, 2, ..., \tag{5}$$

gdje su:

- $\mathbf{x}^{(k)}$ – vektor neovisnih, projektnih, varijabli u točki (vektor stanja),
- $\mathbf{d}$ – vektor smjera pretraživanja,
- α_k^* – veličina koraka u smjeru pretraživanja,
- k – redni broj iteracije.

Kada je smjer pretraživanja jednom poznat, optimalna veličina koraka α^* određuje se *usmjerenim pretraživanjem*[7], postupkom jednodimenzionalnoga minimiranja *funkcije spuštanja*[8] $F(\mathbf{x})$, odnosno određivanjem one vrijednosti koraka α za koju funkcija $F(\mathbf{x})$, u smjeru pretraživanja $\mathbf{d}$, ima minimum. Kod zadataka optimiranja bez ograničenja funkcija spuštanja $F(\mathbf{x})$ obično je jednaka funkciji cilja. Isto tako, kod zadataka s ograničenjima, u točki optimuma iznos funkcije spuštanja postaje jednak iznosu funkcije cilja[9].

Za početak postupka nužno je potrebna početna, pretpostavljena vrijednost rješenja $\mathbf{x}^{(0)}$ koja se, tijekom postupka optimiranja, stalno utočnjava i približava pravom, konačnom rješenju.

Svi postupci optimiranja koji su utemeljeni na (5) međusobno se razlikuju samo po načinu određivanja vektora smjera pretraživanja $\mathbf{d}$ i veličine koraka α^*.

---

7 Engl. *line search*

8 Engl. *descent function; merit function* [13]

9 Smatram kako je naziv *funkcija troškova*, engl. *cost function* [13, 39], prikladniji od uobičajenoga *funkcija cilja*, engl. *objective function*, pa ću ga i rabiti u nastavku djela.

1.3. PRIMJENA POSTUPAKA APROKSIMACIJE U OPTIMIRANJU

Zadaci optimiranja u strojarstvu, kao i u drugim granama tehnike, često su obilježeni vrlo složenim implicitnim i nelinearnim funkcijama troškova i ograničenja, što ima za posljedicu izuzetan računski napor potreban za njihovo rješavanje [10, 32]. Stoga se, već odavna, javila potreba za prevladavanjem tako nastalih poteškoća. Različiti postupci aproksimacije najčešći su izbor većine istraživača i praktičara [40]. U preglednom članku [23] dan je iscrpan prikaz različitih pristupa, mogućnosti, primjena i mogućih pravaca razvoja postupaka aproksimacije.

Prema području primjene, svi postupci aproksimacije u optimiranju mogu se, načelno, podijeliti u tri skupine [23]:

- *GLOBALNA APROKSIMACIJA* – aproksimacija koja vrijedi u čitavom projektnomu prostoru, ili njegovom većem dijelu;
- *LOKALNA APROKSIMACIJA* – aproksimacija koja vrijedi samo u uskom području oko trenutne točke u projektnomu prostoru;
- *POJASNA APROKSIMACIJA*[10]– aproksimacija koja vrijedi u određenom području – pojasu projektnoga prostora.

S gledišta pristupa, aproksimacija može biti [23]:

- *APROKSIMACIJA FUNKCIJA* – s kojom se složene, nelinearne i često implicitne funkcije troškova i ograničenja zamjenjuju jednostavnijim, eksplicitnim i prikladnijim funkcijama i
- *APROKSIMACIJA ZADATKA* – s kojom se izvorna postavka zadatka optimiranja zamjenjuje odgovarajućom, ali lakše rješivom, postavkom.

1.3.1. Globalna aproksimacija

Globalna aproksimacija funkcija očituje se kroz primjenu odzivnih ploha[11] [26, 41] ili neuralnih mreža [42]. Glavna joj je prednost što jednom ustrojena odzivna ploha, ili

[10] Engl. *mid-range approximation; multipoint approximation*

[11] Engl. *response surface*

naučena neuralna mreža, u potpunosti nadomješta složene i dugotrajne proračune izvornih funkcija. Međutim, glavni nedostatak ovakvoga pristupa je vrlo velik računski napor potreban za ustroj – konstrukciju odzivne plohe ili *učenje* neuralne mreže. Zbog toga su primjene globalne aproksimacije funkcija zasad ograničene na zadatke relativno manje veličine [23]. S razvojem računalne tehnologije, u prvom redu višeprocesorskih računala, kao i paralelne, razdijeljene, obrade na više računala, steći će se uvjeti za primjenu globalne aproksimacije funkcija i na većim, složenijim zadacima.

Globalna aproksimacija zadatka optimiranja usko je vezana za prirodu i postavku samoga zadatka, pa u općem slučaju nije prikladna za primjenu u optimiranju strojarskih konstrukcija.

1.3.2. Lokalna aproksimacija

Lokalna aproksimacija funkcija najčešće se primjenjuje kroz razvoj funkcija u Taylorov red. Obično se vrši samo linearna aproksimacija, pošto su za tvorbu aproksimacija višega reda neophodne više, najčešće nedostupne, derivacije funkcija. Prednost ovakve aproksimacije je relativna jednostavnost i laka ostvarivost, a nedostatak ograničena primjena – samo u uskom području oko trenutne točke. Ipak, lokalna aproksimacija temelj je mnogih uspješnih postupaka optimiranja: postupka uzastopne linearizacije [13-15], postupka uzastopnoga kvadratnoga programiranja [33, 43-48] i postupka konveksne linearizacije [24, 49-51]. Pritom, postupak uzastopnoga kvadratnoga programiranja drži se [52, 53] općenito najprikladnijim za rješavanje različitih zadataka optimiranja u širokom području strojarstva i tehnike, dok se postupci obične i konveksne linearizacije najčešće primjenjuju u strukturnome optimiranju [54].

Lokalna aproksimacija zadatka optimiranja uključuje tehnike kojima se pojednostavljuje postavka zadatka tijekom jedne iteracije. Najpoznatija, a i najčešće primjenjivana, je *tehnika djelatnih ograničenja*[12] [27, 28, 55, 56], tehnika kojom se izračunavaju gradijenti samo dijela, obično prekoračenih i skoro prekoračenih, ograničenja. Preostale tehnike uključuju *tehniku objedinjavanja projektnih varijabli*[13] [23, 3] i tehniku približnih gradijenta [57]. Nažalost, potonja tehnika je primjenjiva isključivo u području strukturnoga optimiranja.

---

[12] Engl. *active set strategy*

[13] Engl. *design variable linking scheme*

1.3.3. Pojasna aproksimacija

Pojasna aproksimacija funkcija može se promatrati kao poboljšana lokalna aproksimacija, odnosno kao lokalna aproksimacija s proširenim područjem valjanosti. Obično se tvori uporabom informacija o iznosima funkcija i njihovih gradijenta u dvije ili više točaka, a ponekad se postiže objedinjavanjem lokalne i globalne aproksimacije. Ne postoji pojasna aproksimacija zadatka optimiranja [23].

Istraživanja u strukturnom optimiranju iznjedrila su čitav niz vrlo točnih i za primjenu prikladnih pojasnih aproksimacija. Kako ih rese mnoga zajednička obilježja, a i primjenjuju se, načelno, na jednak način, podrobnije su opisane u posebnom, sljedećem poglavlju. Ovdje je pozornost usmjerena na općenitije primjene pojasne aproksimacije, postupke primjenjive u raznim područjima optimiranja.

Stander i Snyman [58-60] predložili su novi *SAM*[14] postupak optimiranja po kojemu se ograničenja aproksimiraju Taylorovim razvojem drugoga reda. Posebnost ovoga postupka čini pojednostavljeni kvadratni član koji ne zahtijeva izračunavanje složene Hesseove matrice, već se aproksimira iznosima funkcija i gradijenta kroz dvije posljednje točke. Prvi rezultati [59] pokazuju iznimnu stabilnost i pouzdanost predloženoga postupka.

Zanimljivo poopćenje postupka Pšeničnoga [27] dali su Longo i suradnici [53], koji kvadratni podzadatak zamjenjuju podzadatkom konveksne aproksimacije, *CAP*[15]. U istom radu predložili su i novu vrstu konveksne aproksimacije, nazvane *SOC*[16], kod koje se kvadratna aproksimacija funkcija ograničenja Taylorovim razvojem, slično radu Standera i Snymana [59], pojednostavljuje pojasnim aproksimacijama kroz dvije posljednje točke. Nažalost, djelo je potkrijepljeno sa svega tri riješena primjera, što je nedovoljno za temeljitije vrednovanje predloženoga postupka.

Zamisao *područja povjerenja*[17] iz nelinearnoga programiranja polazište je razvoja pouzdanih, globalno konvergentnih, postupaka optimiranja s uporabom pojasnih aproksimacija [26, 61]. Dok Rodriguez i suradnici primjenjuju izvedbu kumulativnih odzivnih ploha [26], Alexandrova i suradnici [61] predviđaju primjenu čitava niza

---

[14] *SAM – successive approximation method*

[15] *CAP – convex approximate problem; conservative approximate problem*

[16] *SOC – second order correction*

[17] Engl. *trust region*

različitih modela aproksimacije. Potvrde li numerički rezultati teorijske odlike ovoga pristupa, bit će to veliki doprinos suvremenoj primjeni inženjerskoga optimiranja.

Za slučajeve optimiranja izrazito složenih funkcija troškova, uz jednostavna ograničenja, Booker i suradnici [62] predlažu globalno konvergentan postupak optimiranja utemeljen na *jednostavnom pretraživanju*[18] *zamjenskih funkcija*[19]. Za tvorbu zamjenskih funkcija mogu se primijeniti različite vrste pojasnih aproksimacija (interpolacijski polinomi, neuralne mreže, primjena analiza varijance – *ANOVA*, i druge).

Tri prijedloga [63-65], iako načelno pripadaju postupku uzastopnih približenja, poglavlje 1.4., zbog moguće općenite primjene bit će prikazana ovdje. Free i suradnici [63] primijenili su teoriju pokusa za tvorbu polinomskih aproksimacija koje se naknadno utočnjavaju primjenom postupka najmanjih kvadrata. Kvadratna aproksimacija najmanjim kvadratima bila je polazište i Karidisa [64] za postupak optimiranja zamjenskih funkcija, *RSO*[20]. Predloženi postupak prikladan je u slučajevima optimiranja izuzetno složenih funkcija troškova. Zanimljiv prijedlog kumulativne aproksimacije dao je i Rasmussen [65], koji početnu aproksimaciju tijekom iteracija stalno utočnjava primjenom *funkcija miješanja*[21], u ovisnosti o relativnom položaju svake od točaka.

Za izbor modela pojasne aproksimacije Toropov sa suradnicima predlaže primjenu genetskoga programiranja [66, 67]. Genetsko programiranje, utemeljeno na načelima genetskoga algoritma, omogućuje tvorbu strukture funkcije aproksimacije najveće kakvoće. Nažalost, zbog izuzetna računskoga napora, postupak je dosad primjenjivan samo na zadacima s do 10 projektnih varijabli.

Osobit oblik pojasne aproksimacije funkcija predstavlja i interpolacija tijekom usmjerena pretraživanja – postupka određivanja veličine pomaka uzduž smjera pretraživanja $\mathbf{d}^{(k)}$. Naime, uz zadani smjer pretraživanja $\mathbf{d}^{(k)}$, promjena vektora projektnih varijabli $\mathbf{x}^{(k)}$ postaje funkcijom samo jedne varijable, veličine koraka α_k. Kako se tijekom usmjerena pretraživanja obično izračunavaju iznosi funkcija kroz više točaka, prirodan je pokušaj iskoristiti te informacije za tvorbu aproksimacije funkcija i procjenu točke minimuma.

[18] Engl. *pattern search*

[19] Engl. *surrogate function*

[20] Engl. *RSO - recursive surrogate optimization*

[21] Engl. *blending function*

Najčešće se primjenjuju kvadratna i kubna interpolacija [13-15], a moguće su i druge kombinacije [36]. Powell [68] je, na primjer, predložio primjenu kvadratnoga splinea.

Svojevrsnim primjerom primjene pojasnih aproksimacija može se smatrati i aproksimacija Hesseove matrice Lagrangeove funkcije [13, 69], neophodnoga sastojka postupka uzastopnoga kvadratnoga programiranja. Početna aproksimacija, jednaka jediničnoj matrici, svakom se iteracijom dopunjuje novim članovima, tako da konačna aproksimacija najčešće vjerno oslikava pravo stanje, inače nedostupne, Hesseove matrice [13].

1.4. OPTIMIRANJE POSTUPKOM UZASTOPNIH PRIBLIŽENJA

Zamisao primjene pojasnih aproksimacija u optimiranju konstrukcija prvi put je naznačena u radovima Schmita, Farshija i Mijure [61, 70], sredinom sedamdesetih godina prošloga stoljeća. Predloženi postupak, danas poznat pod nazivom *optimiranje uzastopnim približenjima*[22], vrlo je jednostavan i određen je sljedećim koracima:

1. U trenutnoj točki projektnoga prostora se odrede iznosi funkcija troškova i ograničenja, kao i njihovi gradijenti;
2. Na temelju izračunatih vrijednosti funkcija i gradijenta oblikuje se približni zadatak optimiranja;
3. Ovaj približni (aproksimirani) zadatak optimiranja riješi se nekim od klasičnih postupaka nelinearnoga programiranja;
4. Koraci 1. do 3. se ponavljaju do ispunjenja uvjeta zaustavljanja.

U prvoj iteraciji, kada su poznati podaci samo za jednu točku, moguće je primijeniti linearnu ili recipročnu aproksimaciju, a kasnije, u sljedećim iteracijama, poznati su podaci za više točaka, pa i modeli aproksimacije mogu biti složeniji i točniji. Haftka i suradnici [71] istražili su modele aproksimacije kroz dvije i tri točke. Ostvareni rezultati pokazali su valjanost modela aproksimacije u primjerima interpolacije, ali i nedovoljnu točnost u primjerima ekstrapolacije.

---

[22] Engl. *sequential approximate optimization*

Rad Fadela, Rileya i Barthelemyja [72], 1990. godine, predstavlja prekretnicu u suvremenoj primjeni pojasnih aproksimacija. Njihov model aproksimacije, kasnije nazvan *TPEA*[23], polučio je znatno bolje rezultate, kako u slučajevima interpolacije, tako i u slučajevima ekstrapolacije [23]. Glavno obilježje *TPEA* aproksimacije je uvođenje *međuvarijable*[24] **y**, određene s

$$y_i = x_i^{p_i}, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{6}$$

pri čemu se eksponenti p_i određuju podešavanjem derivacije funkcije aproksimacije u prethodnoj točki s poznatim iznosom gradijenta u toj točki. S gledišta tvorbe modela aproksimacije, *TPEA* aproksimacija predstavlja linearni razvoj aproksimirane funkcije u Taylorov red po međuvarijabli **y**.

Sličan pristup, ali uzimajući u obzir i kvadratni član, imaju Wang, Grandhi i Xu, koji predlažu čitav niz vrlo uspješnih modela aproksimacije pod zajedničkim nazivom *TANA*[25] (*TANA* [73], *TANA-1* [74], *TANA-2* [74] i *TANA-3* [73, 75-77]). Odgovarajuću aproksimaciju prilagodljive nelinearnosti kroz tri točke izveo je Salajegheh [78]. Za više točaka Wang i Grandhi razvili su aproksimaciju utemeljenu na Hermitskim polinomima [79]. Usporedba ovih aproksimacija dana je u [80].

Vrlo točnu i jednostavnu pojasnu aproksimaciju utemeljenu na zbroju separabilnih funkcija predložili su Chickermane i Gea [81]. Nazvali su je *poopćena konveksna aproksimacija*, *GCA*[26].

Konveksan oblik aproksimacije predmet je istraživanja Kegla i Oblaka [82] i Zhanga i Fleuryja [24], dok se Mahmoud [83] priklanja klasičnom razvoju funkcije u Taylorov red.

Svi navedeni modeli aproksimacije primijenjeni su u optimiranju konstrukcija postupkom uzastopnih približenja. Obilježja postupka optimiranja uzastopnim približenjima mogu se sažeti u sljedećem:

---

[23] *TPEA – Two-point Exponential Approximation*

[24] Engl. *intermediate variable* [23]*; intervening variable* [74]

[25] *TANA – Two-point Adaptive Nonlinearity Approximation*

[26] *GCA – Generalized Convex Approximation*

- Objavljeni rezultati, istina na obično skromnom broju primjera, ukazuju na izuzetno brzu konvergenciju k rješenju (rješenje se najčešće postiže sa svega nekoliko, ili najviše nekoliko desetaka analiza sustava), potvrđujući time visoku kakvoću primijenjenih aproksimacija;
- Postupak uzastopnih približenja ne posjeduje dokaz globalne konvergencije [31]. Kako ustvrđuje Zillober [51], u praktičnim primjenama ova činjenica ponekad dovodi do nezadovoljavajućih rezultata. Nepostojanje dokaza globalne konvergencije može biti objašnjenje nenadanih divergencija [73], bez mogućnosti ispravka i naknadne konvergencije k rješenju;
- Većina modela aproksimacije, npr. [81, 73, 74], prilagođena je primjeni u strukturnom optimiranju, gdje su projektne varijable po naravi nenegativne, i ne može se primijeniti u općem slučaju, kada projektne varijable mogu biti i negativne.

1.5. OBRAZLOŽENJE TEME

Suvremeni procesi projektiranja i konstruiranja nezamislivi su bez značajne primjene računalne tehnologije. Novi procesi, objedinjeni u sintagmi računalom podržanoga projektiranja i konstruiranja (*engl. computer-aided design, CAD*), omogućuju projektantima i konstruktorima postizanje sve kvalitetnijih i jeftinijih proizvoda, razvijenih i proizvedenih u sve kraćim vremenskim razdobljima. Numerički postupci optimiranja su, pritom, značajan čimbenik suvremena procesa projektiranja i konstruiranja. Svojim mogućnostima, nedostupnima do široke primjene računala, omogućuju svojim korisnicima brži i kvalitetniji rad, kao i postizanje boljih tehničkih rješenja.

Nužan preduvjet za uspješnu primjenu postupaka optimiranja u suvremenom procesu projektiranja i konstruiranja je postojanje općenitoga, pouzdanoga, djelotvornoga i projektantima lako uporabivoga *alata* za optimiranje.

1.5.1. Poticaj

Postupak optimiranja utemeljen na uzastopnom kvadratnom programiranju od mnogih je istraživača, npr. [52, 53], ocijenjen danas najboljim postupkom optimiranja opće namjene.

Rese ga čvrsta matematička utemeljenost [44, 47], ponajbolji rezultati u mnogim usporednim ispitivanjima [16, 20, 22], kao i visok stupanj razvijenosti i zrelosti. Međutim, i pored toga, nisu rijetki slučajevi kada je za postizanje rješenja potrebno izvršiti velik broj izračunavanja funkcija troškova i ograničenja [36]. U slučajevima složenih funkcija, često obilježenih dugotrajnim analizama optimiranih sustava, to znači neprihvatljivo velik računski napor i dugotrajno čekanje prihvatljiva rješenja. Jedan od glavnih uzroka je višestruko izračunavanje funkcija troškova i ograničenja tijekom usmjerena pretraživanja – vjerojatno računski najzahtjevnijega dijela algoritma [43, 11].

S druge strane, za potrebe strukturnoga optimiranja razvijen je postupak uzastopnih približenja koji prikladnim pojasnim aproksimacijama funkcija troškova i ograničenja često vrlo brzo dovodi do rješenja. Nažalost, i pored vrlo točnih modela aproksimacije, npr. [80, 81], zbog nedostatka svojstva globalne konvergencije [25, 51], ovaj postupak ne jamči postizanje rješenja. Osim toga, zbog naravi većine modela aproksimacije [73, 74, 81], postupak nije primjenjiv za rješavanje općenitih zadataka optimiranja, pa kao takav nije prikladan za alat opće namjene.

Zamisao objedinjavanja dobrih obilježja postupka optimiranja uzastopnim kvadratnim programiranjem, npr. dokazano svojstvo globalne konvergencije i prikladnost za rješavanje općenitih zadataka optimiranja; i dobrih obilježja postupka uzastopnih približenja, npr. postojanje pojasnih aproksimacija funkcija visoke kakvoće; prirodan je pokušaj u smjeru postizanja djelotvornijih alata za optimiranje.

Ovim istraživanjem predlažem sljedeći postupak optimiranja:

1. Matematički model izvornoga zadatka optimiranja, opisan funkcijama troškova i ograničenja, rješava se postupkom optimiranja koji posjeduje svojstvo globalne konvergencije; jedan takav postupak razvio sam u svojoj magistarskoj tezi [36].
2. Tijekom usmjerena pretraživanja, računski najzahtjevnijega dijela postupka, izvorne funkcije troškova i ograničenja se zamjenjuju svojim pojasnim aproksimacijama, čime se ostvaruje ušteda na izračunavanju izvornim funkcija. Izvorne funkcije troškova i ograničenja se ponovno koriste tek kada je aproksimiranim funkcijama zadovoljen uvjet napredovanja k rješenju. Ako neka od aproksimiranih funkcija nedovoljnom točnošću koči napredovanje k rješenju, ona se u toj iteraciji zamjenjuje izvornom funkcijom.

1.5.2. Hipoteza

Glavna zamisao predloženoga postupka sadržana je u sljedećoj hipotezi:

> *Zamijene li se tijekom usmjerena pretraživanja postupka optimiranja izvorne funkcije troškova i ograničenja svojim pojasnim aproksimacijama, može se smanjiti broj izračunavanja izvornih funkcija troškova i ograničenja, ne remeteći izvornu pouzdanost numeričkoga postupka optimiranja.*

Prema tomu, cilj ovoga istraživanja je razvoj novoga postupka numeričkoga optimiranja koji će objedinjavanjem dobrih obilježja postupka uzastopnoga kvadratnoga programiranja i postupka uzastopnih približenja polučiti brže pronalaženje rješenja, uz zadržavanje postojeće razine pouzdanosti.

1.5.3. Nacrt istraživanja

Izvršeno istraživanje sastojalo se iz sljedećih koraka:

1. Iz dostupne i raspoložive znanstvene literature odabrao sam dva postupka pojasne aproksimacije funkcija troškova i ograničenja koja su svojim obilježjima, u prvom redu kakvoćom aproksimacije i mogućnošću prilagodbe, odgovarala zacrtanom cilju.
2. Odabrane postupke aproksimacije preoblikovao sam na način da budu primjenjivi u općem slučaju, za projektne varijable proizvoljna iznosa. Nakon toga, ugradio sam ih u podzadatak usmjerena pretraživanja postupka optimiranja uzastopnim kvadratnim programiranjem koji sam razvio u svojoj magistarskoj tezi. Rezultat je računalni program za optimiranje opće namjene.
3. Rad izrađena programa ispitao sam na nizu zadataka optimiranja iz strojarske prakse. Svi zadaci su rješavani pod jednakim uvjetima i uz nepromjenjive parametre optimiranja.
4. Postignute rezultate sam statistički obradio primjenom teorije prednosti.
5. Kritičkim vrednovanjem ostvarenih rezultata provjerio sam postavljenu hipotezu.

Podrobniji prikaz izvršenoga istraživanja dajem u sljedećim poglavljima.

2. ISTRAŽIVANJE I POSTUPCI

U ovom poglavlju razrađen je predloženi postupak optimiranja strojarskih konstrukcija objedinjavanjem postupka optimiranja uzastopnim kvadratnim programiranjem i postupka pojasnih aproksimacija funkcija troškova i ograničenja.

Najprije je prikazan temeljni postupak optimiranja uzastopnim kvadratnim programiranjem. Potom, prikazana su dva postupka pojasnih aproksimacija koja sam odabrao za uključivanje u usmjereno pretraživanje temeljnoga postupka optimiranja. To su postupak poopćene konveksne aproksimacije Chickermanea i Geae [81] i postupak aproksimacije prilagodljive nelinearnosti Xua i Grandhija [73]. Druge postupke pojasnih aproksimacija, npr. višedimenzionalnu aproksimaciju Hermitskim polinomima [79], ili *TANA-2* aproksimaciju [74], izostavio sam iz razloga postignute niže kakvoće aproksimacije [80, 73], kao i znatno većega računskog napora potrebnoga za njihovu tvorbu [73]. Nakon toga dan je predloženi postupak uključivanja pojasnih aproksimacija u postupak uzastopnoga kvadratnoga programiranja. Na kraju, dan je način procjene valjanosti predloženoga postupka optimiranja.

2.1. OPTIMIRANJE UZASTOPNIM KVADRATNIM PROGRAMIRANJEM

Postupak optimiranja uzastopnim kvadratnim programiranjem temelji se na zamisli o svođenju zadatka optimiranja općih nelinearnih funkcija s nelinearnim ograničenjima na niz zadataka kvadratnoga programiranja s linearnim ograničenjima koju je prvi put izložio 1963. godine R.B. Wilson u svojoj doktorskoj disertaciji "A Simplical Algorithm for Concave Programming". Značajan doprinos razvoju ove zamisli dali su Han [84, 85], Powell [86, 44], Schittkowski [45-47], Pšeničnij [27-29, 87] i Arora sa suradnicima [33, 30]. U ovom radu primijenjen je postupak uzastopnoga kvadratnoga programiranja, potanko razrađen u magistarskoj tezi [36], koji je najvećim dijelom utemeljen na radovima Pšeničnoga, Arore i suradnika.

2.1.1. Temeljne postavke

Postupak optimiranja uzastopnim kvadratnim programiranjem [36, 37] temelji se na primjeni jednadžbe (5), kod koje se smjer pretraživanja $\mathbf{d}$ određuje rješavanjem kvadratnoga podzadatka, a veličina koraka α^* jednodimenzionalnim, usmjerenim, minimiranjem funkcije spuštanja uzduž smjera $\mathbf{d}$. Uz zadano početno rješenje $\mathbf{x}^{(0)}$, proces se ponavlja do zadovoljavanja unaprijed postavljena uvjeta zaustavljanja.

Funkcija spuštanja je mjerilo napretka postupka optimiranja prema rješenju i jamstvo da svako novo rješenje $\mathbf{x}^{(k)}$ bude bolje od svih prethodnih rješenja [13]. Pšeničnij [27, 28] je odredio funkciju spuštanja s

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + r \cdot V(\mathbf{x}) , \tag{7}$$

gdje su:

$f(\mathbf{x})$	–	funkcija troškova,
r	–	popravni parametar,
$V(\mathbf{x})$	–	najveće prekoračenje ograničenja, određeno s

$$V(\mathbf{x}) = \max(0\,; \left| g_j(\mathbf{x}) \right|, j = 1 \text{ do } m'\,; g_j(\mathbf{x}), j = m'+1 \text{ do } m). \tag{8}$$

U ovomu radu sam, po uzoru na Aroru i Tsenga [35], uveo i dopunsku funkciju spuštanja $F_2(\mathbf{x})$

$$F_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m'} \left| u_j \cdot g_j(\mathbf{x}) \right| + \sum_{j=m'+1}^{m} \left| u_j \cdot \max\left[0, g_j(\mathbf{x})\right] \right| , \tag{9}$$

gdje su u_j Lagrangeovi množitelji djelatnih ograničenja, jednadžba (14).

Nova točka $\mathbf{x}^{(k)}$ usvaja se ako je zadovoljen uvjet spuštanja (19) izvorne, jednadžba (7), ili dopunske, jednadžba (9), funkcije spuštanja.

2.1.2. Podzadatak smjera pretraživanja

Kvadratni podzadatak je pojednostavljenje izvornoga zadatka optimiranja (1)-(4) koje se dobije linearizacijom funkcija troškova i ograničenja u trenutnoj točki $\mathbf{x}^{(k)}$ i dodavanjem kvadratnoga člana uz lineariziranu funkciju troškova [27, 28]:

Odrediti n-dimenzionalni vektor $\mathbf{d} = (d_1, d_2, ..., d_n)$, $\mathbf{d} \in \mathbf{R}^n$, koji minimira kvadratnu formu [38]

$$(\mathbf{G}^0, \mathbf{d}) + 1/2 \cdot (\mathbf{d}, \mathbf{Hd}) \,, \tag{10}$$

uz zadovoljavanje lineariziranih ograničenja

$$g_j + (\mathbf{G}^j, \mathbf{d}) = 0, \quad j \in I_1, \tag{11}$$

$$g_j + (\mathbf{G}^j, \mathbf{d}) \leq 0, \quad j \in I_2, \tag{12}$$

$$x_{Li} \leq x_i \leq x_{Ui}, \qquad i \in I_3, \tag{13}$$

gdje su:

$\mathbf{G}^0$ – gradijent funkcije troškova,
$\mathbf{G}^j$ – gradijent j-te funkcije ograničenja,
$(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ – oznaka za skalarni umnožak vektora,
$\mathbf{H}$ – simetrična, pozitivno definitna, aproksimacija Hesseove matrice Lagrangeove funkcije [30, 69]

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m} u_j \cdot g_j(\mathbf{x}) \,, \tag{14}$$

gdje su u_j Lagrangeovi množitelji djelatnih ograničenja.

Skup djelatnih ograničenja I_ε određen je s

$$I_\varepsilon = I_1 \cup I_2 \cup I_3 , \tag{15}$$

$$I_1 = \left\{ j \,\middle|\, \left| g_j(\mathbf{x}) \right| + \varepsilon(\mathbf{x}) \geq 0 \; , \; j = 1 \text{ do } m' \right\} , \tag{16}$$

$$I_2 = \left\{ j \,\middle|\, g_j(\mathbf{x}) + \varepsilon(\mathbf{x}) \geq 0 \; , \; j = m'+1 \text{ do } m \right\} , \tag{17}$$

dok skup indeksa I_3 uključuje djelatna rubna ograničenja projektnih varijabli (13) izraženih u obliku (17). U jednadžbama (16) i (17) $\varepsilon(\mathbf{x})$ predstavlja parametar prekoračenja ograničenja [27]

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \delta - V(\mathbf{x}) , \tag{18}$$

gdje je δ pozitivna konstanta. Ovaj parametar određuje veličinu skupa djelatnih ograničenja i jedinstveno je obilježje postupka Pšeničnoga [33].

Pošto kvadratni podzadatak (10)-(13) uključuje samo djelatna ograničenja iz skupa I_ε, on je manji, lakše je rješiv i manja je potreba za izračunavanjem gradijenta funkcija ograničenja.

Nužan uvjet za konvergenciju algoritma prema optimumu je pozitivna definitnost matrice $\mathbf{H}$. Stoga je razborito, ako postoji vjerojatnost njene slabe uvjetovanosti, matricu $\mathbf{H}$ izjednačiti s jediničnom matricom, tj. postaviti $\mathbf{H} = \mathbf{I}$. Kao pokazatelj mogućega gubitka pozitivne definitnosti matrice $\mathbf{H}$ u ovom radu primijenjena je *uvjetovanost*[27] [34]. Za izračun uvjetovanosti matrice $\mathbf{H}$ primijenjen je potprogram *DPPCO* [88].

---

[27] Engl. *condition number*

Kvadratni podzadatak (10)-(13) može se riješiti bilo kojim standardnim postupkom za zadatke kvadratnoga programiranja. U ovom radu primijenjena je prilagođena izvedba Powellova potprograma *ZQPCVX* [89], utemeljenoga na algoritmu Goldfarba i Idnanija [90].

2.1.3. Podzadatak usmjerenoga pretraživanja

Usmjerenim pretraživanjem određuje se veličina koraka α^* uzduž smjera pretraživanja **d** za koji funkcija spuštanja ima minimum. Prema Tsengu i Arori [34], u ovom radu je za usmjereno pretraživanje usvojeno pravilo da je α^* jednako 0.5^J, gdje je J najmanji nenegativni cijeli broj q koji ispunjava uvjet

$$F(\mathbf{x} + 0.5^q \cdot \mathbf{d}) < F(\mathbf{x}) , \quad q = 0, 1, 2, \ldots \; . \tag{19}$$

Ovo pravilo je manje strogo od izvornoga [27], ali po rezultatima vlastitih istraživanja, kao i istraživanja [34], povećava djelotvornost algoritma.

2.1.4. Popravni parametar r

Popravni parametar r ima zadaću uravnoteženja utjecaja funkcije troškova i funkcija ograničenja na funkciju spuštanja. U ovom radu se, prema osobnim istraživanjima [36], a i istraživanjima Tsenga i Arore [34], primjenjuje sljedeći način određivanja popravnoga parametra r

$$r = \sum \left| u_j \right| , \quad j \in I_\varepsilon \; , \tag{20}$$

gdje su u_j Lagrangeovi množitelji određeni rješavanjem kvadratnoga podzadatka.

2.1.5. Uvjet zaustavljanja

Pšeničnij je dokazao [27] da je $\left\|\mathbf{d}^{(k)}\right\| = 0$ nužan i dovoljan uvjet da $\mathbf{x}^{(k)}$ zadovolji Kuhn-Tuckerove uvjete optimalnosti zadatka (1)-(4). Međutim, za praktične proračune se prikladnijim pokazao složeni uvjet [33]

$$V^{(k)}(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_v \ , \tag{21}$$

$$\left\|\mathbf{d}^{(k)}\right\| \leq \varepsilon_d \quad \text{ili} \quad \left\|\nabla L^{(k)}\right\| \leq \varepsilon_d \ , \tag{22}$$

gdje su ε_v i ε_d korisnički određene pozitivne konstante, a $\left\|\nabla L^{(k)}\right\|$ je Euklidova norma vektora gradijenta Lagrangeove funkcije.

2.1.6. Mjere poboljšanja postupka optimiranja

U poglavljima 2.1.1. do 2.1.5. dane su temeljne postavke primijenjena postupka optimiranja uzastopnim kvadratnim programiranjem. Međutim, u konačni algoritam je još ugrađen čitav niz tehnika koje pospješuju pouzdanost i djelotvornost postupka optimiranja. To su:

- Tehnika poboljšanja početnoga rješenja (pronalaženje početne točke s manjim iznosom prekoračenja ograničenja) [35, 36];
- Ograničavanje broja pokušaja pri usmjerenom pretraživanju [34, 36];
- Tehnika zadržavanja varijabli unutar rubnih granica [48, 36];
- Postupak za slučaj lošega smjera pretraživanja [43, 34, 36]; i
- Tehnika umjeravanja[28] varijabli u početnoj točki [38, 36, 3].

[28] Engl. *scaling*

2.2. POSTUPAK POOPĆENE KONVEKSNE APROKSIMACIJE CHICKERMANEA I GEAE

Poopćena konveksna aproksimacija funkcija kroz dvije točke Chickermanea i Geae [81, 91] nastala je poopćenjem lokalne aproksimacije funkcija kroz jednu točku. Izvorno, Chickermane i Gea su predložili dva modela aproksimacije: puni i pojednostavljeni. Puni model aproksimacije temelji se na poznavanju druge derivacije aproksimirane funkcije, što je vrlo teško ostvarivo, dok je za pojednostavljeni model dovoljno poznavanje prve derivacije. Stoga sam u ovomu radu primijenio pojednostavljeni model koji se odlikuje jednostavnošću, lakoćom primjene i poželjnim svojstvom konveksnosti funkcije aproksimacije.

2.2.1. Temeljne postavke

Aproksimacija funkcija temelji se na podacima o iznosu funkcije i njena gradijenta (prve derivacije) u trenutnoj točki $\mathbf{x}^{(k)}$, kao i iznosu prve derivacije funkcije u prethodnoj točki $\mathbf{x}^{(k-1)}$. Pritom, funkcija aproksimacije se izražava kao zbroj niza separabilnih funkcija po projektnim varijablama x_i.

2.2.2. Glavne jednadžbe

Po Chickermaneu i Geai [81], općenita eksplicitna ili implicitna nelinearna funkcija $f(\mathbf{x})$ može se aproksimirati zbrojem niza odvojenih, separabilnih funkcija

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = \tilde{f}_0 + \sum_{i=1}^{n} \tilde{f}_i(x_i) , \quad i = 1, 2, ..., n , \tag{23}$$

gdje su

$$\tilde{f}_0 = f(\mathbf{x}^{(k)}) - \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot (x_i^{(k)})^{r_i} , \tag{24}$$

$$\tilde{f}_i(x_i) = b_i \cdot x_i^{r_i} , \tag{25}$$

pri čemu su b_i i r_i podesivi koeficijenti aproksimacije, ovisni o omjeru derivacija funkcije u trenutnoj i prethodnoj točki

$$d = \frac{\dfrac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f(\mathbf{x}^{(k-1)})}{\partial x_i}} . \tag{26}$$

Za $d > 0$ koeficijenti aproksimacije su

$$\left.\begin{aligned} r_i &= 1 + \frac{\ln\left[\dfrac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} \Big/ \dfrac{\partial f(\mathbf{x}^{(k-1)})}{\partial x_i}\right]}{\ln\left(x_i^{(k)} \big/ x_i^{(k-1)}\right)} , \\ b_i &= \frac{\dfrac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i}}{r_i \cdot (x_i^{(k)})^{r_i - 1}} , \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

dok za $d < 0$ vrijedi

$$\left.\begin{aligned} r_i &= 2 , \\ b_i &= \frac{\dfrac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i}}{2 \cdot \left(x_i^{(k)} - \dfrac{x_i^{(k)} - d \cdot x_i^{(k-1)}}{1 - d} \right)} . \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

U posebnim slučajevima, kada je jedna od derivacija jednaka nuli, koeficijenti aproksimacije se određuju kvadratnim razvojem:

Ako je $f_i^{'}(\mathbf{x}^{(k)}) = 0$

$$\left.\begin{aligned} r_i &= 2\,, \\ b_i &= \frac{\dfrac{\partial f(\mathbf{x}^{(k-1)})}{\partial x_i}}{2\cdot(x_i^{(k-1)} - x_i^{(k)})}\,, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

a ako je $f_i^{'}(\mathbf{x}^{(k-1)}) = 0$

$$\left.\begin{aligned} r_i &= 2\,, \\ b_i &= \frac{\dfrac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i}}{2\cdot(x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)})}\,. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

U slučajevima kada su obje derivacije jednake nuli, Chickermane i Gea predložili su linearni razvoj [81]

$$\left.\begin{aligned} r_i &= 1\,, \\ b_i &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Iznos eksponenta r_i u izvorniku [81] nije ograničen. Provedenim pokusima, tijekom izrade ovoga rada, ustvrdio sam kako neograničeni iznosi eksponenta r_i mogu biti uzrokom značajnih računskih poteškoća. Stoga sam u ovomu radu iznos koeficijenta r_i ograničio u području od –10 do +10.

U jednadžbama za određivanje koeficijenata aproksimacije postoje brojne mogućnosti koje mogu biti uzrokom računske nestabilnosti postupka aproksimacije, npr. slučajevi dijeljenja s nulom ili brojem koji je vrlo blizak nuli, slučajevi logaritma negativna broja ili broja bliska nuli i sl. Stoga sam u ovomu radu u algoritam poopćene konveksne aproksimacije ugradio zaštitu koja treba spriječiti takve slučajeve.

Primijenjena zaštita se sastoji u tomu da se koeficijent aproksimacije r_i usvaja jednak jedinici ako je ispunjen bilo koji od sljedećih uvjeta:

$$\left. \begin{aligned} & x_i^{(k)} < \varepsilon \, , \\ & x_i < \varepsilon \, , \\ & \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| < \varepsilon \, , \\ & x_i^{(k)} \Big/ x_i^{(k-1)} < \varepsilon \, , \end{aligned} \right\} \tag{32}$$

gdje je x_i točka aproksimacije, a ε unaprijed određena konstanta. U ovomu radu sam primijenio $\varepsilon = 10^{-12}$.

2.2.3. Obilježja i dostupni rezultati

Broj funkcija f_i jednak je broju projektnih varijabli ($i = 1, 2, ..., n$). U točki $\mathbf{x}^{(k)}$ je iznos aproksimirane funkcije jednak iznosu izvorne funkcije $\tilde{f}(\mathbf{x}^{(k)}) = f(\mathbf{x}^{(k)})$, kao što su jednake i prve derivacije $\tilde{f}_i'(\mathbf{x}^{(k)}) = f_i'(\mathbf{x}^{(k)})$. Isto vrijedi i za prethodnu točku $\mathbf{x}^{(k-1)}$: $\tilde{f}(\mathbf{x}^{(k-1)}) = f(\mathbf{x}^{(k-1)})$ i $\tilde{f}_i'(\mathbf{x}^{(k-1)}) = f_i'(\mathbf{x}^{(k-1)})$.

Velika prednost ovoga modela aproksimacije je vrlo jednostavno određivanje koeficijenata aproksimacije. Naime, svi koeficijenti aproksimacije izvedeni su u *zatvorenom obliku*[29]. Isto tako, zbog separabilnosti varijabli funkcije aproksimacije, Hesseova matrica ima samo dijagonalne članove, pa je nužan i dovoljan uvjet konveksnosti aproksimacije da su svi oni veći od nule.

Nažalost, o primjeni modela poopćene konveksne aproksimacije objavljena su samo dva rada [81, 91]. U prvom radu dano je pet primjena aproksimacije. Prikazani rezultati ukazuju na moguću visoku kakvoću aproksimacije, ali je malen broj prikazanih primjera nedovoljan za dalekosežno zaključivanje. U drugom radu sažeti su rezultati ukupno 10889 aproksimacija, provedenih na ukupno 97 različitih funkcija. Prikazani rezultati ukazuju na prosječno vrlo visoku kakvoću aproksimacije, uz manji broj loših, čak neprihvatljivo loših, aproksimacija.

[29] Engl. *closed form*

2.3. POSTUPAK APROKSIMACIJE PRILAGODLJIVE NELINEARNOSTI XUA I GRANDHIJA

Aproksimacija prilagodljive nelinearnosti Xua i Grandhija [73], poznatija kao *TANA-3* aproksimacija, treća je u nizu sličnih modela aproksimacija autora Wanga, Grandhija i Xua. Temelji se na aproksimaciji funkcija kroz dvije točke. Za razliku od prve dvije, ova aproksimacija se odlikuje analitičkim izrazima za koeficijente aproksimacije, što je čini izuzetno prikladnom za višestruku primjenu u sklopu složenoga postupka optimiranja.

2.3.1. Temeljne postavke

Aproksimacija funkcija temelji se na uvođenju međuvarijable $\mathbf{y}$, jednadžba (6), i nepotpunom kvadratnom razvoju aproksimirane funkcije u Taylorov red, u kojemu Hesseova matrica kvadratnoga člana posjeduje samo dijagonalne članove. Ipak, dijagonalni članovi nisu konstantni, kao u modelu Chickermanea i Geae, već su funkcije projektnih varijabli. Nužni podaci za provedbu aproksimacije su iznosi funkcija i gradijenta (prve derivacije) u dvije posljednje točke $\mathbf{x}^{(k)}$ i $\mathbf{x}^{(k-1)}$.

2.3.2. Glavne jednadžbe

Po Xuu i Grandhiju [73], općenita eksplicitna ili implicitna nelinearna funkcija može se kvadratnim razvojem po međuvarijabli $\mathbf{y}$, jednadžba (6), aproksimirati s

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^{(k)}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} \cdot \frac{(x_i^{(k)})^{1-p_i}}{p_i} \cdot \left[x_i^{p_i} - \left(x_i^{(k)} \right)^{p_i} \right] + \\ + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[x_i^{p_i} - \left(x_i^{(k)} \right)^{p_i} \right]^2 ,\end{aligned} \tag{33}$$

gdje su

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{H}{\sum_{i=1}^{n} \left[x_i^{p_i} - \left(x_i^{(k-1)} \right)^{p_i} \right]^2 + \sum_{i=1}^{n} \left[x_i^{p_i} - \left(x_i^{(k)} \right)^{p_i} \right]^2} , \tag{34}$$

$$p_i = 1 + \frac{\ln\left[\dfrac{\partial f(\mathbf{x}^{(k-1)})}{\partial x_i} \Big/ \dfrac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} \right]}{\ln \dfrac{x^{(k-1)}}{x_i^{(k)}}}, \tag{35}$$

$$\begin{aligned} H = 2\Bigg\{ & f(\mathbf{x}^{(k-1)}) - f(\mathbf{x}^{(k)}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} \cdot \frac{\left(x_i^{(k)}\right)^{1-p_i}}{p_i} \cdot \\ & \cdot \left[\left(x_i^{(k-1)}\right)^{p_i} - \left(x_i^{(k)}\right)^{p_i} \right] \Bigg\}. \end{aligned} \tag{36}$$

U jednadžbi (33) $\varepsilon(\mathbf{x})$ ima značenje dijagonalnih članova Hesseove matrice funkcije aproksimacije, dok su p_i prilagodljivi eksponenti aproksimacije. p_i i H su konstante koje se određuju na temelju iznosa funkcije i gradijenta u prethodnoj točki.

Prema Xuu i Grandhiju [73], apsolutni iznosi eksponenata aproksimacije p_i, jednadžba (35), mogu postati vrlo veliki, pa ih treba ograničiti kako ne bi štetili kakvoći aproksimacije. Iako navode da se najveći p_i može birati u području od 1 do 3, kao preporučljivu vrijednost predlažu $p_{\max} = 1.5$. Na temelju pokusa tijekom istraživanja, u ovome radu sam iznos eksponenta p_i ograničio u području ± 3.

Kao i u slučaju poopćene konveksne aproksimacije, postupak aproksimacije prilagodljive nelinearnosti uključuje brojne mogućnosti koje mogu biti uzrokom računske nestabilnosti postupka aproksimacije, npr. slučajevi dijeljenja s nulom ili brojem koji je vrlo blizak nuli, slučajevi logaritma negativna broja ili broja bliska nuli i sl. Stoga sam u ovomu radu u algoritam aproksimacije prilagodljive nelinearnosti ugradio zaštitu koja treba spriječiti takve slučajeve.

Primijenjena zaštita se sastoji u tomu da se eksponent nelinearnosti p_i usvaja jednak jedinici ako je ispunjen bilo koji od sljedećih uvjeta:

$$\left.\begin{array}{l} x_i^{(k)} < \varepsilon\,, \\ x_i^{(k-1)} < \varepsilon\,, \\ x_i < \varepsilon\,, \\ x_i^{(k)} / x_i^{(k-1)} < \varepsilon\,, \\ \left| x_i^{(k-1)} / x_i^{(k)} - 1 \right| < \varepsilon\,, \\ \left| \dfrac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} \right| < \varepsilon\,, \\ \dfrac{\partial f(\mathbf{x}^{(k-1)})}{\partial x_i} \Bigg/ \dfrac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} < \varepsilon\,, \\ \dfrac{\partial f(\mathbf{x}^{(k-1)})}{\partial x_i} = 0 \quad \text{i} \quad \dfrac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} = 0\,, \end{array}\right\} \tag{37}$$

gdje je x_i točka aproksimacije, a ε unaprijed određena konstanta. U ovomu radu sam primijenio $\varepsilon = 10^{-12}$.

2.3.3. Obilježja i dostupni rezultati

TANA-3 aproksimacija vrlo je slična prethodnoj, *TANA-2* aproksimaciji. Međutim, bitna razlika je vrlo jednostavno određivanje koeficijenata aproksimacije. Naime, svi koeficijenti aproksimacije izvedeni su u zatvorenom obliku, dok se kod *TANA-2* aproksimacije oni određuju numerički – iteracijom.

U trenutnoj točki $x^{(k)}$, kao i u prethodnoj točki $\mathbf{x}^{(k-1)}$, iznos aproksimirane funkcije je jednak iznosu izvorne funkcije, tj. $\tilde{f}(\mathbf{x}^{(k)}) = f(\mathbf{x}^{(k)})$ i $\tilde{f}(\mathbf{x}^{(k-1)}) = f(\mathbf{x}^{(k-1)})$. Isto tako, podudaraju se i prve derivacije: $\tilde{f}_i^{'}(\mathbf{x}^{(k)}) = f_i^{'}(\mathbf{x}^{(k)})$ i $\tilde{f}_i^{'}(\mathbf{x}^{(k-1)}) = f_i^{'}(\mathbf{x}^{(k-1)})$.

Rezultati primjene aproksimacije prilagodljive nelinearnosti *TANA-3* objavljeni su u nekoliko radova. Xu i Grandhi [73, 76, 77] ustvrdili su njenu nadmoć u odnosu na druge modele aproksimacije. Međutim, vlastitim istraživanjem [88], ustvrdio sam visoku podudarnost kakvoće aproksimacije *TANA-3* i *GCA* aproksimacije Chickermanea i Geae.

2.4. PREDLOŽENI POSTUPAK PRIMJENE POJASNIH APROKSIMACIJA CILJA I OGRANIČENJA

Kako sam u Obrazloženju teme naveo, pojasne aproksimacije cilja i ograničenja u ovome radu primjenjuju se tijekom usmjerena pretraživanja – računski jednoga od najzahtjevnijih dijelova postupka optimiranja. U tu svrhu izrađen je, pored potprograma *LNSRCH* za usmjereno pretraživanje bez primjene pojasnih aproksimacija, i potprogram *APXLNS*, za usmjereno pretraživanje s primjenom pojasnih aproksimacija.

Potprogram *LNSRCH* primjenjuje se u slučajevima kada ne postoje podaci potrebni za tvorbu aproksimacije, npr. tijekom prve iteracije, kao i u slučajevima kada je prethodno usmjereno pretraživanje završilo neuspjehom – slučajevi lošega smjera pretraživanja [36]. U ostalim slučajevima primjenjuje se potprogram *APXLNS*.

U ovome poglavlju opisan je predloženi postupak primjene pojasnih aproksimacija, ugrađen u potprogram *APXLNS*. Ovaj postupak je po prvi put predložen i primijenjen u ovomu radu. Izvorni postupak usmjerena pretraživanja potprogramom *LNSRCH* opisan je u magistarskoj tezi [36].

2.4.1. Temeljni postupak

Usmjerenim pretraživanjem traži se korak α^* u smjeru pretraživanja $\mathbf{d}$ za koji je ispunjen uvjet spuštanja (19), primjenom izvorne (7) ili dopunske (9) funkcije spuštanja. Početna vrijednost veličine koraka $\alpha = 1$ smanjuje se do ispunjenja uvjeta (19).

Pristup primjeni pojasnih aproksimacija različit je za slučajeve funkcija troškova i slučajeve funkcija ograničenja.

Kod funkcija troškova pojasne aproksimacije se primjenjuju tijekom čitava usmjerena pretraživanja – sve do ispunjenja uvjeta spuštanja.

Kod funkcija ograničenja pristup je nešto složeniji. Radi određivanja prihvaćanja ili odbacivanja pojasne aproksimacije uveden je pojam brojača izvršenih aproksimacija n_{aj}, različit za svaku funkciju ograničenja. Na početku usmjerena pretraživanja svi brojači n_{aj}

izjednačeni su s nulom. Nakon aproksimacije svake funkcije ograničenja pripadni brojač izvršenih aproksimacija se uvećava za jedan.

Nakon aproksimacije j-te funkcije ograničenja pristupa se procjeni prihvaćanja ili odbacivanja aproksimacije. Izvršena aproksimacija se odbacuje ako su ispunjena sljedeća dva uvjeta:

1. Aproksimirano prekoračenje ograničenja je veće od $V(\mathbf{x})$ i
2. Brojač izvršenih aproksimacija n_{aj} je jednak jedinici

kada se brojač izvršenih aproksimacija umanjuje za jedan, a promatrano ograničenje ponovno izračunava – ovaj put izravno. Ako ni jedan uvjet nije ispunjen, aproksimacija funkcije ograničenja se prihvaća.

Ovim pravilom postiže se sljedeće:

- U prvom pokušaju, kada je $\alpha = 1$, aproksimacija ograničenja se prihvaća samo ako je aproksimirano prekoračenje ograničenja manje od $V(\mathbf{x})$, tj. u slučaju kada aproksimirano ograničenje ne utječe na funkciju spuštanja Pšeničnoga (7);
- U kasnijim pokušajima, za $\alpha < 1$, mogu nastupiti dva slučaja:
    1. Ako je prethodna aproksimacija prihvaćena, onda se prihvaća i ova, neovisno o iznosu aproksimiranoga prekoračenja ograničenja;
    2. Ako prethodna aproksimacija nije prihvaćena, onda se ova aproksimacija prihvaća samo ako je aproksimirano ograničenje manje od $V(\mathbf{x})$.

Nakon zadovoljavanja uvjeta spuštanja, sve aproksimirane funkcije se ponovno određuju – ovaj put izravno, kako bi se provjerilo i dokazalo ispunjenje uvjeta (19). Ako je uvjet spuštanja zadovoljen, usmjereno pretraživanje je završeno, a ako uvjet spuštanja nije zadovoljen, usmjereno pretraživanje se nastavlja daljnjim smanjenjem koraka pretraživanja.

2.4.2. Postupak otkrivanja i aproksimacije linearnih funkcija

Svojstvo stalnosti gradijenta linearnih funkcija iskorišteno je u ovomu radu za posebnu tehniku otkrivanja i aproksimacije linearnih funkcija troškova i ograničenja.

U glavnom (pod)programu postupka optimiranja, nakon određivanja gradijenta funkcija, postoji mogućnost uspoređivanja iznosa gradijenta u trenutnoj i prethodnoj točki. Ako je ispunjen uvjet

$$\left| \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} - \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k-1)})}{\partial x_i} \right| < \varepsilon_{lin} \;, \quad \forall i = 1, 2, ..., n \;, \tag{38}$$

pri čemu je $\varepsilon_{\mathrm{lin}}$ unaprijed zadana konstanta, funkcija $f(\mathbf{x})$, ili $g_j(\mathbf{x})$, može se smatrati linearnom. U ovom radu konstanta $\varepsilon_{\mathrm{lin}}$ određena je s

$$\varepsilon_{\mathrm{lin}} = \begin{cases} epsilon, & \text{ako se gradijent određuje analitički,} \\ 10^6 \cdot epsilon, & \text{ako se gradijent određuje numerički,} \end{cases} \tag{39}$$

gdje je *epsilon* najmanji pozitivni broj koji procesor računala uočava kao apsolutnu razliku dvaju brojeva [92].

Ako je gornjim pravilom neka funkcija označena linearnom, njen gradijent se pohranjuje i više ne izračunava. Tada je, u proizvoljnoj točki, iznos funkcije određen s

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^{(k)}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} \cdot \left(x_i - x_i^{(k)} \right). \tag{40}$$

2.4.3. Postupak aproksimacije za slučaj negativnih iznosa projektnih varijabli

Modeli *GCA* i *TANA-3* aproksimacije, nastali u okrilju strukturnoga optimiranja, gdje su projektne varijable dimenzije elemenata strukture, ne predviđaju negativne iznose projektnih varijabli. Štoviše, aproksimacija s negativnim iznosima projektnih varijabli nije ni moguća – javlja se problem potenciranja negativne baze s realnim, pozitivnim ili negativnim, eksponentom.

Kako u općem slučaju optimiranja strojarskih konstrukcija ova pretpostavka ne stoji, potrebno je prilagoditi izvorne postupke aproksimacije na način da se mogu aproksimirati i funkcije negativnih iznosa projektnih varijabli. U ovomu radu to je riješeno na vrlo jednostavan način: u slučajevima negativnih projektnih varijabli ($x_i < 0$), odgovarajući eksponent aproksimacije bira se jednak jedinici ($r_i = 1$ ili $p_i = 1$), čime je izbjegnuta potreba potenciranja. Istina, ovakav pristup ograničava kakvoću aproksimacije.

2.4.4. Algoritam postupka

U ovom poglavlju dan je algoritam predloženoga postupka usmjerena pretraživanja uz primjenu pojasnih aproksimacija funkcija troškova i ograničenja. Algoritam ostalih dijelova postupka optimiranja uzastopnim kvadratnim programiranjem dan je u magistarskoj tezi [36].

Korak 1. *Priprema pretraživanja*

1.1. Primjenom jednadžbe (20) odrediti iznos popravnoga parametra *r*;

1.2. Ako se točka $\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{d}^{(k)}$ nalazi unutar rubnih granica (4), nastaviti s korakom 1.4;

1.3. Ako se točka $\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{d}^{(k)}$ nalazi izvan rubnih granica (4), postupkom skraćenja vektora pomaka [36] odrediti $\mathbf{d}$ za koji točka $\mathbf{x}^{(k)}$ ostaje unutar granica (4);

1.4. Odrediti iznose funkcija spuštanja $F(\mathbf{x}^{(k-1)})$, jednadžba (7) i $F_2(\mathbf{x}^{(k-1)})$, jednadžba (9);

1.5. Prema [36] odrediti temeljnu veličinu pokusnoga koraka α_0 (1/2 ili 1/3) i granični broj pokušaja $n_{s\max}$.

Korak 2. *Korak pretraživanja*

Ponavljati najviše $n_{s\max}$ puta, pri čemu q, jednadžba (19), ide od 0 do ($n_{s\max} - 1$):

2.1. Odrediti pokusnu točku $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + \alpha_0^q \cdot \mathbf{d}^{(k)}$;

2.2. Odrediti iznos funkcije troškova u pokusnoj točki $\mathbf{x}^{(k)}$. Ako je funkcija troškova označena linearnom, primijeniti jednadžbu (40), a ako nije, primijeniti pojasnu aproksimaciju (23) ili (33), u ovisnosti o odabranom modelu aproksimacije;

2.3. Postaviti najveće prekoračenje ograničenja na nulu: $V(\mathbf{x}) = 0$;

2.4. Ponavljati za sva ograničenja iz skupa djelatnih ograničenja I_{ε}:

2.4.1. Odrediti iznos funkcije ograničenja. Ako je funkcija ograničenja označena linearnom, primijeniti (40), a ako nije, primijeniti pojasnu aproksimaciju (23) ili (33), u ovisnosti o odabranom modelu aproksimacije;

2.4.2. Provjeriti prihvatljivost izvršene aproksimacije. Ako aproksimacija nije prihvatljiva, ograničenje se ponovno određuje – ovaj put izravno;

2.4.3. Odrediti trenutno najveće prekoračenje ograničenja $V(\mathbf{x})$;

2.5. Odrediti sva rubna ograničenja (4) i obje funkcije spuštanja (7) i (9). Provjeriti ispunjenost uvjeta spuštanja. Ako je uvjet spuštanja zadovoljen, nastaviti s korakom 2.6. Ako uvjet spuštanja nije ispunjen, povećati brojač q i nastaviti s korakom 2.1;

2.6. Za svako preostalo ograničenje:

2.6.1. Ponavljati korake 2.4.1., 2.4.2. i 2.4.3.;

2.6.2. Odrediti iznos funkcije spuštanja (7) i provjeriti ispunjenost uvjeta spuštanja (19);

2.6.3. Ako je uvjet spuštanja zadovoljen, nastaviti s korakom 2.6. Ako uvjet spuštanja nije ispunjen, povećati brojač q i nastaviti s korakom 2.1.;

2.7. Sve aproksimirane funkcije, osim funkcija koje su označene linearnima, ponovno izračunati – ovaj put izravno. Ponoviti određivanje funkcija spuštanja (7) i (9). Ponoviti provjeru uvjeta spuštanja (19). Ako je uvjet spuštanja zadovoljen, nastaviti s korakom 4. Ako uvjet spuštanja nije ispunjen, povećati brojač q i nastaviti s korakom 2.1.

Korak 3. *Loš smjer pretraživanja*

Ako iz $n_{s\max}$ pokušaja nije pronađena točka $\mathbf{x}^{(k)}$ koja ispunjava uvjet spuštanja (19), nastupio je slučaj lošega smjera pretraživanja. Usmjereno pretraživanje završava neuspjehom, a izvođenje se nastavlja tehnikom prevladavanja poteškoća izazvanih lošim smjerom pretraživanja [36].

Korak 4. *Korak pretraživanja određen*

Ako je zadovoljen uvjet spuštanja (19), usmjereno pretraživanje je završeno, a pokusna točka $\mathbf{x}^{(k)}$ postaje novo pretpostavljeno rješenje zadatka optimiranja.

2.5. PROCJENA VALJANOSTI PREDLOŽENOGA POSTUPKA

Na temelju predloženoga postupka izrađen je računalni program *RQPOPT v2*, namijenjen rješavanju općih zadataka optimiranja strojarskih konstrukcija. Program je napisan u dvostrukoj preciznosti na programskom jeziku Fortran 90 i izveden je u obliku niza SUBROUTINE potprograma.

2.5.1. Izbor mjerila valjanosti

Procjena kakvoće postupaka optimiranja predmetom je brojnih rasprava [93-95]. Ipak, najčešće se uspoređuju sljedeća obilježja:

- Uspješnost rješavanja zadatka;
- Broj izračunavanja funkcija troškova;
- Broj izračunavanja gradijenta funkcija troškova;
- Broj izračunavanja funkcija ograničenja;
- Broj izračunavanja gradijenta funkcija ograničenja;
- Odstupanje rezultata od optimuma, ukoliko je stvarni optimum poznat;
- Prekoračenje ograničenja u optimumu;

- Vrijeme izračunavanja;

pa su ona i odabrana u ovomu radu. Obrazloženje svakoga od obilježja dano je u [36].

2.5.2. Izbor zadataka optimiranja

Za procjenu valjanosti predloženoga postupka optimiranja odabran je skup od 19 zadataka iz literature [96, 97]. Zajedničko im je obilježje što su nastali pri rješavanju stvarnih zadataka optimiranja iz inženjerske prakse, pa tako vjerno ocrtavaju stanja koja se javljaju pri optimiranju strojarskih konstrukcija. Vrijednost odabranih zadataka je i to što za njih postoje objavljeni rezultati optimiranja ostvareni drugim postupcima optimiranja, što može poslužiti kao temelj za vrednovanje predloženoga postupka.

Sažeti prikaz odabranih zadataka optimiranja dan je u tablici I. Zadaci, sa svim potrebnim podacima, dani su u [36], kao i u izvornicima [96, 97]. Značenje pojedinih oznaka u tablici I. je sljedeće:

`Br.`	Redni broj zadatka
`TP`	Redni broj zadatka u izvoru [96] ili [97]
`Zadatak`	Opis zadatka optimiranja
`N`	Broj varijabli
`MI`	Broj nejednakosnih ograničenja
`ME`	Broj jednakosnih ograničenja
`MB`	Broj rubnih ograničenja varijabli
`O`	Oblik funkcije troškova:
	`L` Linearna
	`Q` Kvadratna
	`P` Polinom
	`G` Opća
`C`	Oblik funkcije ograničenja:
	`B` Rubno ograničenje
	(ostale oznake odgovaraju onima opisanima za funkcije troškova)
`F`	Oznaka izvedivosti početnoga rješenja:
	`F` Izvedivo početno rješenje
	`N` Neizvedivo početno rješenje

Tablica I. Pregled zadataka optimiranja

Br.	TP	Zadatak	N	MI	ME	MB	O	C	F	G	FUNCT	CV
1	93	Konstrukcija transformatora	6	2	0	6	P	P	F	A	135.07596	0.77D-07
2	104	Optimalna konstrukcija reaktora	8	6	0	16	P	P	N	A	3.9511634	0.58D-10
3	106	Konstrukcija izmjenjivača topline	8	6	0	16	L	Q	N	A	7049.3309	0.0
4	107	Raspored statičke snage	9	0	6	8	P	G	N	A	5055.0118	0.18D-09
5	112	Kemijska ravnoteža	10	0	3	10	G	L	N	A	-47.707579	0.23D-07
6	114	Proces alkilacije	10	8	3	20	Q	G	N	A	-1768.8070	0.0
7	116	3-stupno membransko separiranje	13	15	0	26	L	Q	N	A	97.588409	0.0
8	328	Zupčasti prijenosnik najmanje tromosti	2	0	0	4	P	B	N	A	1.74415	0.0
9	330	Konstrukcija kliznoga ležaja	2	1	0	4	P	P	N	A	1.62058	0.34D-09
10	332	Zadatak konstrukcije grebena	2	2	0	4	G	G	F	N	114.95	0.15D-07
11	343	Konstrukcija zamašnjaka	3	2	0	6	P	P	N	A	-5.68478	0.28D-12
12	348	Zadatak konstrukcije vrtloga	3	0	1	4	G	G	N	N	36.9708	0.48D-09
13	356	Zadatak zavarene grede	4	5	0	3	P	G	F	N	2.38116	0.82D-15
14	362	Optimalni prijenosni omjeri mjenjača	5	4	0	3	G	L	F	N	0.2623	0.0
15	364	Sinteza mehanizma	6	4	0	6	G	G	F	A	0.0606002	0.21D-04
16	366	Optimiranje procesa alkilacije	7	14	0	14	P	P	F	N	704.306	0.78D-13
17	376	Optimiranje tokarilice	10	14	1	20	G	P	F	A	-4430.88	0.60D-13
18	380	Proračun kemijske ravnoteže	12	3	0	24	P	P	N	A	3.16859	0.0
19	393	Zadatak proizvodnje zemnoga plina	48	1	2	72	P	P	F	N	0.863380	0.11D-06

`G`	Oznaka načina određivanja derivacija funkcija:
	`A` Derivacije se određuju analitički
	`N` Derivacije se određuju numerički
`FUNCT`	Najbolje poznato rješenje funkcije troškova
`CV`	Iznos zbroja prekoračenja ograničenja u najboljem poznatom rješenju

2.5.3. Izvođenje pokusa

Svi računalni programi, napisani na programskom jeziku Fortran 90, prevedeni su 32-bitnim prevoditeljem Compaq Visual Fortran 6.1A. Svi računski pokusi izvedeni su na računalu Hewlett-Packard Vectra VE4/200 s Intel Pentium procesorom 200MHz MMX i 64 MB radne memorije. Operativni sustav računala bio je Microsoft Windows NT 4.0 Workstation. Vremena rješavanja pojedinih zadataka mjerena su ugrađenim satom razlučivosti 1/18 (0.055) sekunde.

Svi zadaci rješavani su istim skupom parametara postupka optimiranja, bez ikakva sudjelovanja korisnika. Ovakav način primjene, tzv. *način crne kutije*[30], prikladno oslikava stanje kada projektant, nestručnjak za teoriju optimiranja, primjenjuje *alat* za optimiranje kako bi riješio svoj konstrukcijski zadatak.

Podešavanjem parametara optimiranja može se značajno utjecati na izvođenje i rješenje zadatka optimiranja [21]. Tijekom istraživanja zabilježeni su, na pojedinim zadacima, bitno bolji, ali i bitno lošiji rezultati, izazvani promjenom parametara postupka optimiranja. Konačno odabrani parametri, tablica II., usvojeni su kao prosječno najpovoljnije vrijednosti za većinu zadataka optimiranja.

Za razliku od izvora [96, 97], sve funkcije ograničenja su, ako je to bilo moguće, programirane u svom normiranom obliku, tj. podijeljene sa svojim graničnim iznosom [13]. Time se, pored bolje uvjetovanosti zadataka optimiranja [35], postiže i zoran uvid u iznos prekoračenja ograničenja. Na primjer, prekoračenje ograničenja naprezanja normirana iznosa 0.05 pokazuje da je u promatranoj točki stvarno naprezanje veće od dopuštenoga za 5 % [36].

---

[30] Engl. *black-box mode*

Tablica II. Odabrani parametri postupka optimiranja

Opis	Iznos
Granično početno prekoračenje ograničenja V_0	`1.0`
Parametar prekoračenja ograničenja δ	`0.1`
Početni iznos popravnoga parametra r	`1.0`
Granična uvjetovanost Hesseove matrice c_0	10^{9}
Prirast argumenta pri numeričkoj diferencijaciji ε	10^{-5}
Granična razlika u mjerilu varijabli [38]	`2.0`
Uvjet zaustavljanja ε_{v}	10^{-2}
Uvjet zaustavljanje ε_{d}	10^{-2}

Prekoračenje ograničenja u optimumu, kao važno mjerilo točnosti postupka optimiranja najčešće se u literaturi prikazuje zbrojem prekoračenja svih ograničenja. U ovomu radu se, po uzoru na [34, 21], prekoračenje ograničenja mjeri najvećim prekoračenjem ograničenja $V(\mathbf{x})$.

2.5.4. Usporedba rezultata

U sljedećem poglavlju dani su rezultati rješavanja skupa pokusnih zadataka optimiranja. U cilju usporedbe i vrednovanja ostvarenih rezultata primijenjena je *teorija prednosti*[31] Thomasa L. Saatyja [98].

2.5.4.1. Saatyjeva teorija prednosti

Saatyjeva teorija prednosti na prikladan način omogućuje nepristranu, matematički utemeljenu, usporedbu inače teško usporedivih veličina, npr. pokazatelja točnosti i utrošenoga vremena [99-101].

Neka je S_i skup pokusnih zadataka koji su uspješno riješeni primjenom računalnoga programa C_i. Neka je t_{ij} promatrano obilježje, npr. CPU vrijeme, potrebno algoritmu C_i

[31] Engl. *priority theory*

(i = 1, NC ; NC – ukupni broj algoritama) za rješavanje zadatka j (j = 1, NP ; NP – ukupni broj zadataka). Tada je omjer pokazatelja promatranoga obilježja algoritama i i k dan s [21]

$$r_{ik} = \left(\sum_{j \in S_i \cap S_k} t_{ij} \right) \Big/ \left(\sum_{j \in S_i \cap S_k} t_{kj} \right), \tag{41}$$

gdje i i k idu od 1 do NC. Neka je $\mathbf{R}$ matrica omjera promatranoga obilježja

$$\mathbf{R} = \left(r_{ik} \right), \quad i,k = 1, NC , \tag{42}$$

kojoj su članovi $r_{ii} = 1$ i $r_{ki} = 1/r_{ik} > 0$. Saaty je dokazao [98] da se matrica $\mathbf{R}$ može promatrati kao aproksimacija matrice

$$\mathbf{P} = \left(w_i / w_k \right), \quad i,k = 1, NC , \tag{43}$$

čiji su članovi w_i , $i = 1, NC$, stvarne srednje vrijednosti promatrane slučajne varijable, npr. CPU vremena algoritma C_i, na svim zadacima j = 1, NP. Tada je $\mathbf{P}$ matrica ranga jedan za koju vrijedi

$$\mathbf{Pw} = \lambda \mathbf{w} , \tag{44}$$

gdje su

- $\mathbf{w}$ – jedinstveni svojstveni vektor s pozitivnim članovima, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, ..., w_{NC})^{\mathrm{T}}$,
- λ – jedina pozitivna svojstvena vrijednost matrice $\mathbf{P}$, $\lambda = NC$.

Ako nema neuspjelih proračuna, matrica $\mathbf{R}$ je jednaka matrici $\mathbf{P}$, a ako ih ima, svojstveni vektor matrice (42) je prikladna aproksimacija za $\mathbf{w}$. Ostvareni rezultati mogu se rangirati prema vrijednostima svojstvenoga vektora, pri čemu manja vrijednost označava veću prednost. Običaj je svojstvene vrijednosti – prednosti prikazati normirane, podijeljene svojim zbrojem i pomnožene sa sto

$$w_i = 100 \cdot \left(w_i \Big/ \sum_{k=1}^{NC} w_k \right) . \tag{45}$$

2.5.4.2. Predloženi postupak usporedbe rezultata

Hock i Schittkowski [102, 20] prvi su primijenili Saatyjevu teoriju prednosti pri vrednovanju i međusobnom uspoređivanju različitih računalnih programa za optimiranje. Njihov pristup, pri uspoređivanju različitih izvedbi istoga programa, primijenili su Tseng i Arora [21].

U ovomu radu je predložen i primijenjen novi postupak usporedbe rezultata koji se od izvornika [102, 20] razlikuje u sljedećem:

- Postupak je pojednostavljen, ograničen samo na točnost, djelotvornost i pouzdanost;
- Pokazatelji uspješnosti postupka optimiranja ograničeni su na veličine koje su sadržane u rezultatima, tablice IV., V. i VI.;
- Točnost funkcije troškova, izvorno određena apsolutnim odstupanjem, za iznose funkcija troškova većih od 0.01 određena je relativnim odstupanjem;
- Zbroj prekoračenja svih ograničenja zamijenjen je najvećim prekoračenjem ograničenja $V(\mathbf{x})$;
- Pri procjeni pouzdanosti geometrijske sredine promatranih pokazatelja zamijenjene su odgovarajućim aritmetičkim sredinama;
- Upliv pojedinih pokazatelja određen je drugačijim težinskim faktorima;
- Dodan je postupak za određivanje ukupne ocjene na temelju pokazatelja točnosti, djelotvornosti i pouzdanosti.

Slijedi potpuni prikaz u ovomu radu predloženoga i primijenjenoga novoga postupka usporedbe rezultata. Za određivanje prednosti – zadatak svojstvenih vrijednosti – primijenjen je potprogram *EVCRG* [103].

Usporedba programa za optimiranje primjenom teorije prednosti temelji se na pojedinačnoj usporedbi svakoga od rezultata, ostvarenih svakim od uspoređivanih programa optimiranja.

Polazište za usporedbu je ocjena je li ostvareni rezultat $\mathbf{x}^*$ predstavlja valjanu aproksimaciju točnoga rješenja, ili ne. Time se sva rješenja, ostvarena određenim postupkom optimiranja, dijele u dva skupa:

1. S – Skup svih uspješnih rješenja,
2. U – Skup svih neuspješnih rješenja.

Za razliku od Schittkowskoga [102], koji ocjenu o uspješnosti rezultata donosi na temelju četiriju pokazatelja (iznos funkcije troškova, zbroj prekoračenja ograničenja, norma Kuhn-Tuckerova vektora i broj točnih znamenki), u ovomu radu sam, po uzoru na [22], odabrao samo dva pokazatelja:

1. Odstupanje funkcije troškova (podatak **`DFX`** u tablicama rezultata),
2. Najveće prekoračenje ograničenja (podatak **`DGX`** u tablicama rezultata).

Prema [22], rješenje nekoga zadatka optimiranja se ocjenjuje uspješnim ako su najveće prekoračenje ograničenja i odstupanje funkcije troškova manji od 1%. U svim ostalim slučajevima rješenje se ocjenjuje neuspješnim. Skupu U_i pridružuju se i zadaci čije rješavanje je prekinuto.

Pokazatelji točnosti, djelotvornosti i pouzdanosti postupka optimiranja određeni su sljedećim jednadžbama:

TOČNOST

Pri procjeni točnosti postupka optimiranja, određene pokazateljima točnosti funkcije troškova i točnosti zadovoljavanja ograničenja, uzimaju se u obzir sva rješenja iz skupa S_i. Tada je, za svako rješenje iz skupa S_i

$$f_{ij} = -\log\left(\left|\mathbf{DFX}_{ij} / \mathbf{F}_j\right|\right) , \tag{46}$$

$$c_{ij} = -\log\left(\mathbf{DGX}_{ij}\right) , \tag{47}$$

gdje su

f_{ij}	–	pokazatelj točnosti funkcije troškova,
$\mathbf{DFX}_{ij}$	–	odstupanje funkcije troškova u rješenju od najboljega poznatoga rješenja,
$\mathbf{F}_j$	–	najbolje poznato rješenje, Napomena: Ako je $\mathbf{F}_j$ manje od 0.01, u (46) se umjesto $\mathbf{DFX}_{ij} / \mathbf{F}_j$ promatra samo $\mathbf{DFX}_{ij}$,
c_{ij}	–	pokazatelj točnosti zadovoljavanja ograničenja,
$\mathbf{DGX}_{ij}$	–	najveće prekoračenje ograničenja u rješenju.

Objedinjeni pokazatelj točnosti postupka optimiranja, uz primjenu težinskih faktora, tablica III., dan je s

$$a_{ij} = \varphi_1 \cdot f_{ij} + \varphi_2 \cdot c_{ij} , \tag{48}$$

gdje su

a_{ij}	–	objedinjeni pokazatelj točnosti postupka optimiranja,
φ_1	–	težinski faktor upliva točnosti funkcije troškova na ukupnu točnost postupka optimiranja,
φ_2	–	težinski faktor upliva najvećega prekoračenja ograničenja na ukupnu točnost postupka optimiranja.

DJELOTVORNOST

Djelotvornost postupka optimiranja određena je s pet obilježja: vremenom rješavanja, brojem izračunavanja funkcija troškova, brojem izračunavanja funkcija ograničenja, brojem izračunavanja gradijenta funkcija troškova i brojem izračunavanja gradijenta funkcija ograničenja. Promatraju se sva rješenja iz skupa S_i, za koja vrijedi

$$e_{1ij} = \mathbf{CPUT}_{ij} \ , \tag{49}$$

$$e_{2ij} = \mathbf{NFE}_{ij} \ , \tag{50}$$

$$e_{3ij} = \mathbf{NGE}_{ij} \ , \tag{51}$$

$$e_{4ij} = \mathbf{NFGE}_{ij} \ , \tag{52}$$

$$e_{5ij} = \mathbf{NGGE}_{ij} \ , \tag{53}$$

gdje su

e_{1ij} – pokazatelj djelotvornosti vremena rješavanja,
$\mathbf{CPUT}_{ij}$ – vrijeme rješavanja zadatka, s,
e_{2ij} – pokazatelj broja izračunavanja funkcija troškova,
$\mathbf{NFE}_{ij}$ – broj izračunavanja funkcija troškova,
e_{3ij} – pokazatelj broja izračunavanja funkcija ograničenja,
$\mathbf{NGE}_{ij}$ – broj izračunavanja funkcija ograničenja,
e_{4ij} – pokazatelj broja izračunavanja gradijenta funkcija troškova,
$\mathbf{NFGE}_{ij}$ – broj izračunavanja gradijenta funkcija troškova,
e_{5ij} – pokazatelj broja izračunavanja gradijenta funkcija ograničenja,
$\mathbf{NGGE}_{ij}$ – broj izračunavanja gradijenta funkcija ograničenja.

Objedinjeni pokazatelj djelotvornosti postupka optimiranja, uz primjenu težinskih faktora, tablica III., dan je s

$$e_{ij} = \varphi_3 \cdot e_{1ij} + \varphi_4 \cdot e_{2ij} + \varphi_5 \cdot e_{3ij} + \varphi_6 \cdot e_{4ij} + \varphi_7 \cdot e_{5ij} \ , \tag{54}$$

gdje su

e_{ij} – objedinjeni pokazatelj djelotvornosti postupka optimiranja,
φ_3 – težinski faktor upliva utrošenoga vremena rješavanja na ukupnu djelotvornost postupka optimiranja,
φ_4 – težinski faktor upliva broja izračunavanja funkcija troškova na ukupnu djelotvornost postupka optimiranja,
φ_5 – težinski faktor upliva broja izračunavanja funkcija ograničenja na ukupnu djelotvornost postupka optimiranja,

φ_6	–	težinski faktor upliva broja izračunavanja gradijenta funkcija troškova na ukupnu djelotvornost postupka optimiranja,
φ_7	–	težinski faktor upliva broja izračunavanja gradijenta funkcija ograničenja na ukupnu djelotvornost postupka optimiranja.

POUZDANOST

Pouzdanost postupka optimiranja određena je s pet obilježja: postotkom neuspješnih proračuna, postotkom prekinutih proračuna, prekoračenjem ograničenja neuspješnih proračuna i odstupanjem funkcije troškova neuspješnih proračuna. Promatraju se sva rješenja iz skupa U_i, kada je

$$v_{1i} = NU/NP \,, \tag{55}$$

$$v_{2i} = NA/NP \,, \tag{56}$$

$$v_{3i} = \frac{1}{NU} \cdot \sum_{j=1}^{NU} \mathbf{DGX}_{ij} \,, \tag{57}$$

$$v_{4i} = \frac{1}{NU} \cdot \sum_{j=1}^{NU} \max\left(0,\, \mathbf{DFX}_{ij}/\mathbf{F}_j\right) , \tag{58}$$

gdje su

v_{1i}	–	pokazatelj pouzdanosti po broju neuspješnih rješenja,
NU	–	broj neuspješnih rješenja,
NP	–	broj svih rješenja,
v_{2i}	–	pokazatelj pouzdanosti po broju prekinutih rješavanja zadataka,
NA	–	broj prekinutih rješavanja zadataka,
v_{3i}	–	pokazatelj prekoračenja ograničenja neuspješnih rješenja,
v_{4i}	–	pokazatelj odstupanja funkcija troškova neuspješnih rješenja.

Objedinjeni pokazatelj pouzdanosti postupka optimiranja, uz primjenu težinskih faktora, tablica III., tada je

$$v_i = \varphi_8 \cdot v_{1i} + \varphi_9 \cdot v_{2i} + \varphi_{10} \cdot v_{3i} + \varphi_{11} \cdot v_{4i} \ , \tag{59}$$

gdje su

v_i	–	objedinjeni pokazatelj pouzdanosti postupka optimiranja,
φ_8	–	težinski faktor upliva broja neuspješnih rezultata na ukupnu pouzdanost postupka optimiranja,
φ_9	–	težinski faktor upliva broja prekinutih rješavanja zadataka na ukupnu pouzdanost postupka optimiranja,
φ_{10}	–	težinski faktor upliva prekoračenja ograničenja neuspješnih rezultata na ukupnu pouzdanost postupka optimiranja,
φ_{11}	–	težinski faktor upliva greške funkcija troškova neuspješnih rezultata na ukupnu pouzdanost postupka optimiranja.

KONAČNI POKAZATELJ

Kada su određeni objedinjeni pokazatelji točnosti a_{ij}, djelotvornosti e_{ij} i pouzdanosti v_i, konačni pokazatelj valjanosti postupka optimiranja dan je s

$$Q_i = \varphi_{12} \cdot a_{ij} + \varphi_{13} \cdot e_{ij} + \varphi_{14} \cdot v_i \ , \tag{60}$$

gdje su

Q_i	–	objedinjeni pokazatelj valjanosti postupka optimiranja,
φ_{12}	–	težinski faktor upliva točnosti na ukupnu valjanost postupka optimiranja,
φ_{13}	–	težinski faktor upliva djelotvornosti na ukupnu valjanost postupka optimiranja,
φ_{14}	–	težinski faktor upliva pouzdanosti na ukupnu valjanost postupka optimiranja.

2.5.4.3. Usvojeni težinski faktori

Pri vrednovanju i uspoređivanju međusobno teško usporedivih veličina važnu ulogu imaju težinski faktori – veličine koje na primjeren način uravnotežuju upliv pojedinih obilježja. Hock i Schittkowski [20], kao i Tseng i Arora [21], dali su svoje težinske faktore. Kako su težinski faktori umnogome određeni stavom istraživača, u ovomu radu sam predložio drukčije težinske faktore, tablica III.

Tablica III. Usvojeni težinski faktori

Oznaka	Opis	Faktor
φ_1	Upliv točnosti funkcije troškova na ukupnu točnost (1 od 2)	0.40
φ_2	Upliv prekoračenja ograničenja na ukupnu točnost (2 od 2)	0.60
φ_3	Upliv CPU vremena na djelotvornost (1 od 5)	0.10
φ_4	Upliv broja **NFE** na djelotvornost (2 od 5)	0.20
φ_5	Upliv broja **NGE** na djelotvornost (3 od 5)	0.20
φ_6	Upliv broja **NFGE** na djelotvornost (4 od 5)	0.25
φ_7	Upliv broja **NGGE** na djelotvornost (5 od 5)	0.25
φ_8	Upliv postotka neuspjelih proračuna na pouzdanost (1 od 4)	0.30
φ_9	Upliv postotka prekinutih proračuna na pouzdanost (2 od 4)	0.35
φ_{10}	Upliv prekoračenja ograničenja neuspjelih proračuna na pouzdanost (3/4)	0.25
φ_{11}	Upliv točnosti funkcije troškova neuspjelih proračuna na pouzdanost (4/4)	0.10
φ_{12}	Upliv točnosti na ukupnu ocjenu postupka ili izvedbe (1 od 3)	0.15
φ_{13}	Upliv djelotvornosti na ukupnu ocjenu postupka ili izvedbe (2 od 3)	0.40
φ_{14}	Upliv pouzdanosti na ukupnu ocjenu postupka ili izvedbe (3 od 3)	0.45

3. REZULTATI

Ostvareni rezultati primjenom programa *RQPOPT v2* dani su u tablicama IV., V. i VI., dok su rezultati usporedbe postupaka optimiranja primjenom teorije prednosti dani u tablici VII. Tablica IV. sadrži rezultate postignute polaznom izvedbom programa *RQPOPT v2* – bez primjene pojasnih aproksimacija. Rezultati ostvareni predloženim postupkom, uz primjenu poopćene konveksne aproksimacije Chickermanea i Geae (*GCA*), dani su tablicom V. Konačno, rezultati ostvareni predloženim postupkom, uz primjenu aproksimacije prilagodljive nelinearnosti Xua i Grandhija (*TANA-3*), dani su u tablici VI.

Značenje pojedinih stupaca u tablicama IV., V. i VI. je sljedeće:

BR	Redni broj zadatka
INFO	Dojavnik stanja obrade:
	INFO = 0 Postignut optimum (zadovoljeni uvjeti zaustavljanja)
	INFO = 2 Prekid proračuna zbog nemogućnosti pronalaženja povoljnijega rješenja
NIT	Broj iteracija
NFE	Broj izračunavanja funkcije troškova
NGE	Broj izračunavanja funkcija ograničenja (posebno se broji izračunavanje svake od funkcija ograničenja)
NFGE	Broj izračunavanja gradijenta funkcije troškova (ako se gradijent određuje numerički, potreban broj izračunavanja funkcije troškova je pribrojen **NFE**)
NGGE	Broj izračunavanja gradijenta funkcija ograničenja, pri čemu se posebno broji izračunavanje svakoga od gradijenta (ako se gradijenti određuju numerički, potreban broj izračunavanja ograničenja je pribrojen **NGE**)
F	Iznos funkcije troškova u postignutom rješenju
DGX	Iznos najvećega prekoračenja ograničenja $V(\mathbf{x})$ u postignutom rješenju
DFX	Razlika iznosa funkcije troškova u postignutom rješenju i iznosa funkcije troškova u najboljem poznatom rješenju, tablica I.
CPUT	Vrijeme rješavanja, s

Tablica IV. Temelj za usporedbu: rezultati programa *RQPOPT v2* bez primjene aproksimacija

BR	INFO	NIT	NFE	NGE	NFGE	NGGE	F	DGX	DFX	CPUT
1	0	9	35	70	9	18	135.076	2.94E-07	-2.46E-05	0.02
2	0	10	11	66	10	39	3.95116	3.77E-07	-3.24E-07	0.03
3	0	34	329	1388	33	149	7049.46	3.92E-04	0.13	0.32
4	0	46	158	954	45	276	5055.01	1.08E-05	-2.39E-03	0.27
5	0	16	28	84	16	48	-47.7500	2.22E-16	-4.24E-02	0.03
6	0	41	157	1307	41	323	-1768.81	3.81E-03	-7.50E-03	0.35
7	0	63	472	3786	61	576	97.5875	3.30E-08	-8.60E-04	0.92
8	0	11	12	0	11	0	1.74415	0.0	5.63E-09	0.00
9	0	9	6	10	5	9	1.62058	2.30E-06	-1.64E-06	0.01
10	0	24	83	98	0	0	115.028	8.28E-05	7.81E-02	0.06
11	0	7	10	19	7	10	-5.68489	1.85E-05	-1.10E-04	0.01
12	0	3	13	13	0	0	36.9708	3.06E-10	3.99E-05	0.01
13	0	14	86	242	0	0	2.38112	2.86E-05	-4.29E-05	0.03
14	0	4	87	20	0	0	0.261800	0.0	-5.00E-04	0.41
15	0	16	128	118	0	0	0.606232E-01	6.98E-05	2.30E-05	0.04
16	0	7	58	586	0	0	1227.22	9.38E-07	5.23E+02	0.04
17	0	13	16	214	13	72	-4430.09	7.55E-13	0.79	0.07
18	0	19	65	105	19	38	3.17545	2.08E-05	6.86E-03	0.04
19	0	92	4529	13539	0	0	0.863529	3.24E-06	1.49E-04	2.34

Tablica V. Rezultati programa *RQPOPT v2* s primjenom *GCA* aproksimacija

BR	INFO	NIT	NFE	NGE	NFGE	NGGE	F	DGX	DFX	CPUT
1	0	9	19	58	9	18	135.076	5.61E-07	-5.95E-05	0.03
2	0	10	11	66	10	39	3.95116	3.77E-07	-3.24E-07	0.03
3	0	34	293	1279	2	79	7048.84	6.00E-04	-0.49	0.30
4	0	46	61	722	45	276	5055.01	1.08E-05	-2.39E-03	0.27
5	0	19	20	6	19	6	-47.7607	5.24E-17	-5.32E-02	0.01
6	0	41	63	658	41	183	-1768.81	3.81E-03	-7.50E-03	0.23
7	0	34	2	884	2	259	97.5875	8.67E-07	-8.84E-04	0.31
8	0	11	12	0	11	0	1.74415	0.0	5.63E-09	0.00
9	0	9	6	10	5	9	1.62058	2.30E-06	-1.64E-06	0.01
10	0	24	81	107	0	0	115.028	8.28E-05	7.81E-02	0.07
11	0	7	10	20	7	10	-5.68489	1.85E-05	-1.10E-04	0.01
12	0	3	13	13	0	0	36.9708	3.06E-10	3.99E-05	0.00
13	0	14	73	201	0	0	2.38116	8.97E-07	-5.58E-07	0.03
14	0	4	87	20	0	0	0.261800	0.0	-5.00E-04	0.40
15	0	15	121	152	0	0	0.606776E-01	3.77E-04	7.74E-05	0.05
16	0	7	57	540	0	0	1227.22	9.38E-07	5.23E+02	0.03
17	0	13	14	201	13	61	-4430.09	7.55E-13	0.79	0.06
18	0	19	21	105	19	38	3.17545	2.08E-05	6.86E-03	0.06
19	0	97	4755	4918	0	0	0.863487	6.03E-06	1.07E-04	2.38

Tablica VI. Rezultati programa *RQPOPT v2* s primjenom *TANA-3* aproksimacija

BR	INFO	NIT	NFE	NGE	NFGE	NGGE	F	DGX	DFX	CPUT
1	0	9	17	53	9	18	135.076	4.25E-07	-4.46E-05	0.03
2	0	10	11	66	10	39	3.95116	3.77E-07	-3.24E-07	0.03
3	0	34	293	1278	2	79	7048.84	6.00E-04	-0.49	0.31
4	0	46	60	723	45	276	5055.01	1.08E-05	-2.39E-03	0.44
5	0	19	20	6	19	6	-47.7607	5.24E-17	-5.32E-02	0.02
6	0	41	66	665	41	183	-1768.81	3.81E-03	-7.50E-03	0.36
7	0	34	2	900	2	259	97.5875	8.67E-07	-8.84E-04	0.54
8	0	11	12	0	11	0	1.74415	0.0	2.22E-08	0.00
9	0	9	6	10	5	9	1.62058	2.30E-06	-1.64E-06	0.01
10	0	24	81	108	0	0	115.028	8.28E-05	7.81E-02	0.07
11	0	7	10	20	7	10	-5.68489	1.85E-05	-1.10E-04	0.01
12	0	3	13	13	0	0	36.9708	3.06E-10	3.99E-05	0.00
13	0	14	74	204	0	0	2.38116	8.97E-07	-5.58E-07	0.03
14	0	4	87	20	0	0	0.261800	0.0	-5.00E-04	0.41
15	0	19	148	189	0	0	0.606005E-01	8.57E-05	2.53E-07	0.07
16	0	7	57	540	0	0	1227.22	9.38E-07	5.23E+02	0.04
17	0	13	14	201	13	61	-4430.09	7.55E-13	0.79	0.07
18	0	16	18	71	16	32	3.17553	1.10E-05	6.94E-03	0.05
19	0	97	4759	4921	0	0	0.863487	6.03E-06	1.07E-04	2.56

Sve tri izvedbe postupka optimiranja su uspješno riješile svih 19 zadataka, zadovoljavanjem postavljenih uvjeta zaustavljanja. Od 19 rješenja 18 rješenja predstavlja, u okvirima tražene točnosti, najbolja poznata rješenja, dok je jedno rješenje, u svim slučajevima na zadatku br. 16, lokalni optimum. Rješavanje ni jednoga zadatka nije prekinuto zbog greške računanja ili postizanja graničnoga broja iteracija.

Tablica VII. Usporedba rezultata primjenom teorije prednosti

Obilježje	Polazno	*GCA*	*TANA-3*
TOČNOST			
Točnost funkcije troškova	32.97 (1)	33.14 (2)	33.89 (3)
Točnost zadovoljavanja ograničenja	33.37 (2)	33.19 (1)	33.44 (3)
DJELOTVORNOST			
Vrijeme rješavanja	34.88 (2)	29.89 (1)	35.23 (3)
Izračunavanje funkcija troškova	35.41 (3)	32.21 (1)	32.38 (2)
Izračunavanje funkcija ograničenja	53.87 (3)	23.03 (1)	23.10 (2)
Izračunavanje gradijenta funkcija troškova	42.65 (3)	28.91 (2)	28.44 (1)
Izračunavanje gradijenta funkcija ograničenja	44.41 (3)	27.88 (2)	27.71 (1)
POUZDANOST			
Postotak neuspješnih proračuna	5.26% (1)	5.26% (1)	5.26% (1)
Postotak prekinutih proračuna	0.00% (1)	0.00% (1)	0.00% (1)
Prekoračenje ograničenja neuspješnih pror.	9.E-7 (1)	9.E-7 (1)	9.E-7 (1)
Pogreška funkcije troškova neuspješnih pror.	42.6% (1)	42.6% (1)	42.6% (1)
OBJEDINJENI POKAZATELJI			
Točnost	33.21 (2)	33.17 (1)	33.62 (3)
Djelotvornost	43.11 (3)	28.23 (1)	28.65 (2)
Pouzdanost	33.33 (1)	33.33 (1)	33.33 (1)
KONAČNI POKAZATELJ			
Valjanost postupka optimiranja	37.23 (3)	31.27 (1)	31.50 (2)

Napomene:
1. Niža vrijednost označava bolji rezultat - veću prednost
2. Broj u zagradama označava redoslijed prednosti

Tablica VII. daje, po uspoređivanim obilježjima, pokazatelje uspješnosti svake od uspoređivanih izvedbi postupka optimiranja. Osim toga, uz pokazatelje uspješnosti su u zagradama dani i pripadni redni brojevi prednosti. Kako je predviđenim obilježjima cilj postići što manje pokazatelje, npr. manje vrijeme rješavanja ili manje prekoračenje ograničenja, to manjim pokazateljima odgovaraju bolji rezultati, odnosno veće prednosti.

Rezultati tablice VII., osim kod pokazatelja pouzdanosti, sadrže iznose normiranih članova vektora svojstvenih vrijednosti – prednosti w_i. Ove vrijednosti predstavljaju relativnu ocjenu postignuća postupka optimiranja na promatranom obilježju i nemaju nikakvo apsolutno, fizikalno značenje. Zbroj svojstvenih vrijednosti jednak je 100.00.

Kod četiriju obilježja pouzdanosti u tablici VII. prikazani pokazatelji nisu svojstvene vrijednosti vektora prednosti, već veličine koje imaju apsolutno, fizikalno značenje. To su vjerojatnosti pojave neuspješnih i prekinutih proračuna, kao i pokazatelji kakvoće rezultata neuspješnih proračuna.

Podrobnija analiza postignutih rezultata slijedi u Raspravi.

4. RASPRAVA

Pojasne aproksimacije funkcija troškova i ograničenja, izvorno nastale i primjenjivane u strukturnom optimiranju, u ovomu su radu, po prvi put, primijenjene u općem inženjerskom optimiranju. Istina, početkom sedamdesetih godina, bilo je prijedloga o njihovoj primjeni u sklopu općenitih postupaka optimiranja [61], ali nikakav povoljan rezultat nije izviješten. Vjerojatan uzrok takva ishoda je ondašnja niska kakvoća tada raspoloživih modela aproksimacije funkcija. Danas, nakon burna razvoja vrlo uspješnih modela aproksimacije, vrijedno je pokušati ponovno. U ovomu radu dani su rezultati jednoga takva pokušaja.

Temeljna zamisao prijedloga ovoga rada je pokušaj da se primjenom pojasnih aproksimacija funkcija troškova i ograničenja smanji broj neuspjelih, a time i *nepotrebnih* pokušaja tijekom usmjerena pretraživanja temeljnoga postupka optimiranja – vjerojatno računski najzahtjevnijega dijela većine alata za optimiranje. Iako su neuspjeli pokušaji nepotrebni, oni su i neizbježni, pošto se unaprijed ne zna da li će biti uspješni ili ne.

Načelno, jedan mogući pristup smanjenju neuspjelih pokušaja može biti nasumično preskakanje nekih pokušaja za koje se sumnja da će biti neuspjeli. Međutim, takav pristup nikako ne može biti preporučljiv jer se time, u pravilu, smanjuje korak napredovanja u projektnomu prostoru i obara brzina konvergencije.

Drugi pristup, primijenjen u ovomu radu, jest iskorištavanje raspoloživih informacija o fizikalnom modelu zadatka optimiranja kako bi se oblikovao novi, jednostavniji model, a zatim se, računajući s jednostavnijim modelom, pokušalo procijeniti veličinu koraka koja omogućuje uspjeh pretraživanja. Tek tada, račun se ponavlja s temeljnim modelom kako bi se provjerila procjena i ostvario napredak u projektnomu prostoru. Naravno, ovakav pristup zahtijeva ispunjenje dvaju preduvjeta: postojanje visokokvalitetnog modela aproksimacije i postojanje postupka procjene kakvoće aproksimacije.

U ovomu radu su za modele aproksimacije odabrani poopćena konveksna aproksimacija (*GCA*) Chickermanea i Geae i aproksimacija prilagodljive nelinearnosti (*TANA-3*) Xua i

Grandhija, danas vjerojatno najtočniji modeli pojasne aproksimacije [73]. Pored visoke kakvoće aproksimacije rese ih suštinska jednostavnost i računska primjenljivost.

Za primjenu pojasnih aproksimacija tijekom usmjerena pretraživanja postupka uzastopnoga kvadratnoga programiranja – danas vjerojatno najbolje klase općenitih postupaka optimiranja [52], u ovomu je radu razvijen poseban algoritam, potanko opisan u poglavlju 2.4.4.

Predloženi postupak je općenit, razmjerno jednostavan i lako primjenljiv. Ne zahtijeva nikakva posebna svojstva modela aproksimacije, za razliku od izvornih *GCA* i *TANA-3* aproksimacija, koji, na primjer, traže nenegativne projektne varijable [81]. Ipak, predloženi postupak je samo jedan od mogućih – sigurno se mogu postaviti i drugi, vjerojatno pouzdaniji i djelotvorniji. No, to je već prijedlog za budući rad.

Postavka hipoteze ovog istraživanja da izvorna pouzdanost postupka optimiranja ne bude narušena primjenom aproksimacije umnogome je odredila predloženi postupak primjene aproksimacije. Naime, predloženi postupak je *vrlo oprezan – konzervativan*. U njega su ugrađene brojne provjere kakvoće aproksimacije, a kako se provjera može izvršiti samo uspoređivanjem sa stvarnim vrijednostima, postupak je i razmjerno nedjelotvoran – izvorne funkcije se ne izračunavaju tijekom usmjerena pretraživanja, već se izračunavaju radi provjere kakvoće aproksimacije, što u konačnici ima istu posljedicu – znatan računski napor.

Analizom algoritma primjene pojasnih aproksimacija, poglavlje 2.4.4., može se uočiti zanimljiva pojedinost – aproksimacije funkcija troškova se ne provjeravaju, dok se aproksimacije funkcija ograničenja provjeravaju, čak vrlo strogo. Razlog tomu je iskustvo stečeno tijekom istraživanja: provjera kakvoće aproksimacije funkcija troškova rijetko je opravdala dopunsko izračunavanje izvorne funkcije, pa je u konačnom algoritmu ona i izostavljena. S druge strane, funkcije ograničenja, bez provjere, često su bile uzrokom značajnih poteškoća, izraženih povećanim brojem iteracija i pripadnih dopunskih izračunavanja funkcija i ograničenja. Istina, na nekim zadacima su, bez provjere kakvoće aproksimacije, postignuti vrlo dobri rezultati, izraženih kroz značajno smanjenje izračunavanja izvornih funkcija troškova i ograničenja. Dakle, ponovno se potvrdila stara istina kako djelotvornost i pouzdanost postupka optimiranja teško *idu zajedno*. U takvom ozračju nastao je predloženi algoritam kao pokušaj mirenja ovih dvaju suprostavljenih obilježja.

U radu je predložena i jednostavna tehnika otkrivanja i aproksimacije linearnih funkcija. Istina, posebna primjena linearnih funkcija je predložena i ranije, npr. [48], ali je tada zahtjevano od korisnika da prije izvođenja optimiranja označi koje su funkcije linearne. Novost predloženoga postupka je što algoritam samostalno *traži* linearne funkcije, bez upliva korisnika. Predložena tehnika ima nedostatak što se i nelinearna funkcija, pod određenim okolnostima, može pogrešno označiti linearnom, što bi loše utjecalo na, ili čak potpuno onemogućilo, konvergenciju postupka prema rješenju. Međutim, provedeni pokusi potvrdili su korisnost predloženoga postupka, barem na ispitivanim funkcijama.

Rezultati primjene predloženoga postupka dani su u tablicama V. i VI. Radi usporedbe, u tablici IV. dani su i rezultati bez primjene aproksimacije. Prema tomu, usporedbom rezultata iz tablica IV. i V. može se procijeniti valjanost predloženoga postupka uz primjenu *GCA* aproksimacije, dok se usporedbom rezultata iz tablica IV. i VI. može procijeniti valjanost predloženoga postupka uz primjenu *TANA-3* aproksimacije. Isto tako, usporedbom rezultata iz tablica V. i VI. može se steći uvid u relativnu kakvoću *GCA* i *TANA-3* aproksimacije.

Prvo što se može uočiti iz priloženih rezultata su potpuno jednaki pokazatelji pouzdanosti za sva tri uspoređivana postupka optimiranja (tablica VII., skupina Pouzdanost). Drugim riječima, potpuno je zadovoljena postavka hipoteze u dijelu koji traži da postupak aproksimacije ne smije remetiti izvornu pouzdanost numeričkoga postupka optimiranja.

Što se tiče točnosti dobivenih rezultata, razlike između uspoređivanih postupaka optimiranja su neznatne – tek nešto više od 1 %. Najveću točnost, čak veću od izvornoga postupka, polučio je postupak s primjenom *GCA* aproksimacije. Istina, razlika je tako mala (tablica VII, skupina Objedinjeni pokazatelji) da je teško ustvrditi da li je povećana točnost posljedica modela aproksimacije ili puka slučaja. Osobno, skloniji sam drugom objašnjenju.

U pogledu djelotvornosti, postupci s primjenom pojasnih aproksimacija drže se znatno bolje od rezultata temeljnoga postupka optimiranja (tablica VII., skupina Objedinjeni pokazatelji). Postupak s primjenom poopćene konveksne aproksimacije, *GCA*, djelotvorniji je od temeljnoga postupka za 34 %. Slično se drži i postupak s aproksimacijom prilagodljive nelinearnosti, *TANA-3*, čija je djelotvornost, u odnosu na temeljni postupak, veća za 33 %.

Promatrano u cijelosti, uzimajući u obzir sve pokazatelje, postupci optimiranja s primjenom aproksimacija bolji su od temeljnoga postupka za nešto više od 15 %. Pritom, najbolji rezultat ostvaruje *GCA* aproksimacija, koja je bolja od temeljnoga postupka za 16 %, dok je prednost *TANA-3* aproksimacije 15 %. Razlike između *GCA* i *TANA-3* aproksimacije su neznatne – tek nešto manje od 1 % (tablica VII., Konačni pokazatelj).

Ovi rezultati ukazuju na dva bitna zaključka. Prvo, primjenom aproksimacije povećana je djelotvornost postupka optimiranja, čime je potvrđena i temeljna postavka postavljene hipoteze. Uzevši u obzir da je zadovoljena i druga postavka hipoteze o održanju pouzdanosti, smatram kako je postavljena hipoteza u potpunosti potvrđena. Drugo, razlike između *GCA* i *TANA-3* aproksimacije su toliko male, da ih se može smatrati zanemarivima.

Podsjetio bih kako su Xu i Grandhi ocijenili *TANA-3* aproksimaciju najboljom u nizu aproksimacija kroz dvije točke [73], objavivši pritom više radova u znanstvenim časopisima i zbornicima skupova. S druge strane, osim izvornoga rada [81], o *GCA* aproksimaciji gotovo nije bilo više ni spomena (osim priopćenja [91]). Ovi rezultati pak pokazuju barem podjednaku kakvoću *GCA* i *TANA-3* aproksimacija, a uzme li se u obzir i njena suštinska jednostavnost, držim kako *GCA* aproksimacija zavrjeđuje više pozornosti i proučavanja.

Podjednako držanje *GCA* i *TANA-3* aproksimacije možda se može objasniti sljedećim razmatranjem:

- U slučaju monotonih funkcija ili kada je omjer derivacija u trenutnoj i prethodnoj točki pozitivan, *GCA* i *TANA-3* aproksimacije imaju jednake međuvarijable, tj. eksponenti nelinearnosti su im potpuno jednaki – prva od dviju jednadžbi (27) i jednadžba (35) su zapravo dva oblika iste jednadžbe;
- *TANA-3* aproksimacija je nastala nepotpunim kvadratnim razvojem po međuvarijabli $\mathbf{y}$, odnosno funkcija aproksimacije je linearna funkcija međuvarijable $\mathbf{y}$, uz popravni član drugoga reda. Popravni član, jednadžba (34), može biti konstanta ili funkcija [75];
- Iako je funkcija aproksimacije kod *GCA* aproksimacije izražena zbrojem niza separabilnih funkcija po projektnim varijablama x_i, ona se može promatrati i kao linearna funkcija međuvarijable $\mathbf{y}$ – dovoljno je (25) uvrstiti u (23);

iz čega slijedi kako obje aproksimacije, iako nastale s potpuno različitih polazišta, često dijele vrlo slične modele, čak i potpuno jednake koeficijente nelinearnosti. Načelno, zbog postojanja popravnoga člana (34), *TANA-3* aproksimacija bi trebala biti točnija, međutim rezultati ovoga istraživanja to nisu potvrdili. Konačno, podrobnija matematička analiza primijenjenih modela aproksimacije prelazi okvire ovoga istraživanja i djela.

Tablica VII. sadrži još jedan rezultat vrijedan pozornosti i rasprave. To je razmjerno dugo vrijeme rješavanja zadataka primjenom *TANA-3* aproksimacije, čak duže od izvornoga postupka. Uvidom u tablice VI. i IV. može se ustvrditi i uzrok – neobično duža vremena rješavanja zadataka br. 4 i 19. Kako je računski napor primjenom *TANA-3* aproksimacije na zadatku br. 4 gotovo 30 % manji od odgovarajućega bez aproksimacije (783 izračunavanja funkcija u odnosu na 1112), porast vremena rješavanja od preko 60 % (0.44 s u odnosu na 0.27 s) nema opravdanja. Prije je uzrok u nesavršenosti načina mjerenja vremena. Naime, ugrađeni sat mjeri ukupno procesorsko vrijeme, a ne vrijeme utrošeno na određenomu procesu. Ako je procesor računala istodobno radio i nešto drugo (operativni sustav računala bio je Microsoft Windows NT 4.0 Workstation), porast vremena dobiva logičko objašnjenje. Možda je ovim *TANA-3* aproksimacija nezasluženo kažnjena. Provjere radi, ponovio sam usporedbu rezultata, ovaj put s vremenima *TANA-3* aproksimacije na zadacima 4 i 19 jednakim onima *GCA* aproksimacije (logična pretpostavka). Rezultati usporedbe vremena rješavanja u tablici VII. tada bi glasili: **35.76 (3)**, **30.64 (1)**, **33.60 (2)**.

S druge pak strane, *GCA* aproksimacija je polučila 14 postotno skraćenje vremena rješavanja. Smatram kako bi s porastom složenosti zadataka optimiranja ova prednost bila još i veća. Naime, udio vremena izračunavanja funkcija i gradijenta brže bi rastao od udjela razmjerno stalnoga vremena optimiranja i aproksimacije.

Usporedbom pojedinačnih rezultata iz tablica V. i VI. s odgovarajućim rezultatima iz tablice IV. može se uočiti trojako djelovanje primjene postupaka aproksimacije: na 11 zadataka (zadaci br. 1, 3, 4–7, 13, 16–19) postignut je napredak, izražen smanjenjem računskoga napora, na pet zadataka (zadaci br. 2, 8, 9, 12 i 14) nema nikakve promjene, dok je u tri slučaja, na zadacima br. 10, 11 i 15, djelovanjem aproksimacije čak povećan računski napor. Uz to, zanimljivo je kako potpuno jednako djelovanje bilježe i *GCA* i *TANA-3* aproksimacije. Dok je prvi slučaj poželjan i logičan, preostala dva zavrjeđuju dopunsko obrazloženje – posljedica su predloženoga algoritma. Izostanak promjene računskoga napora nastupa u slučajevima kada je provjerama kakvoće aproksimacije *potrošena* sva ušteda ostvarena njihovom primjenom. To se najprije može očekivati kod dobro uvjetovanih zadataka, zadataka kod kojih usmjerena pretraživanja završavaju s početnim korakom $\alpha^* = 1$. S druge pak strane, porast računskoga napora nastaje u slučajevima kada se aproksimacijom nedovoljne kakvoće odbaci inače dobar korak pretraživanja. Posljedice su smanjenje brzine konvergencije i povećan napor do postizanja rješenja.

Pri kraju, vrijedno bi bilo raspraviti u ovom radu predloženi i primijenjeni postupak usporedbe rezultata, postupak bez kojega bi bilo znatno teže nepristrano usporediti predložene algoritme, ali i brojčano izraziti određene pojave i procese, npr. upliv vremena rješavanja dvaju zadataka na ukupnu ocjenu nekoga algoritma. Smatram kako je predloženi postupak jednostavan, općenit i lako primjenjiv. Prednost mu je razmjerno mali broj potrebnih podataka, tek 8 po svakom mjerenju, i to lako dostupnih, dok ih Schittkowski [102] rabi bar dvostruko više (gruba osobna procjena). Istina, složenija analiza jamči potpunije odgovore, ali smatram kako i primijenjen postupak jasno ocrtava ono najvažnije: točnost, djelotvornost i pouzdanost. Osim toga, u inženjerskom *svijetu nesigurnih znamenki*, ustrajavanje na broju točnih znamenki rezultata ima više matematički, nego inženjerski, praktični značaj. Posebno vrijednim smatram općenitost predloženoga postupka – uz manje izmjene može se primijeniti pri usporedbi i drugih numeričkih postupaka, npr. pri rješavanju sustava jednadžbi.

Pokusni skup zadataka optimiranja, tablica I., sastoji se od svega 19, na inženjerskoj struci utemeljenih zadataka. U opće dostupnoj literaturi može se pronaći podosta zadataka optimiranja, ali su oni većinom jednostavni, čisto teorijski – matematički zadaci. U znanstvenoj literaturi mogu se pronaći rezultati optimiranja složenih inženjerskih zadataka, npr. [22, 16], ali su sami zadaci nedostupni, često u vlasništvu velikih tvrtki ili vladinih organizacija. Smatram kako je odabrani skup zadataka primjeren pokazatelj zadataka iz strojarske prakse, ali je, isto tako, nedovoljan za donošenje dalekosežnih zaključaka. Prije je tek čvrsto polazište za buduća istraživanja.

Ipak, i uz sva ograničenja skromnoga skupa pokusnih zadataka, smatram kako su postignuti rezultati potvrdili hipotezu postavljenu na početku ovog istraživanja – pojasnim aproksimacijama funkcija troškova i ograničenja može se povećati djelotvornost postupka optimiranja, ne remeteći izvornu pouzdanost algoritma optimiranja.

5. ZAKLJUČAK

U radu je predložen i istražen novi algoritam optimiranja strojarskih konstrukcija utemeljen na objedinjavanju uzastopnoga kvadratnoga programiranja i primjene pojasnih aproksimacija funkcija troškova i ograničenja tijekom usmjerena pretraživanja. Osim toga, u radu je predložen i primijenjen novi postupak usporedbe rezultata, utemeljen na Saatyjevoj teoriji prednosti.

Primijenjena su i istražena dva modela pojasnih aproksimacija: poopćena konveksna aproksimacija, *GCA*, autora Chickermanea i Geae i aproksimacija prilagodljive nelinearnosti, *TANA-3*, autora Xua i Grandhija.

Računski pokusi, provedeni na skupini od 19 zadataka optimiranja iz strojarske prakse, potvrdili su valjanost predloženoga postupka.

Pouzdanost predloženoga postupka potpuno je jednaka pouzdanosti temeljnoga postupka, bez primjene aproksimacije. Točnost predloženoga postupka optimiranja približno je jednaka točnosti temeljnoga postupka optimiranja – razlike su tek nešto više od 1 %. Djelotvornost, izražena brojem izračunavanja funkcija i gradijenta troškova i ograničenja, kao i vremenom rješavanja zadataka, primjenom predloženoga postupka značajno raste: *GCA* aproksimacija omogućuje povećanje djelotvornosti od 34 %, dok je doprinos *TANA-3* aproksimacije neznatno manji, 33 %. Uzimajući u obzir sve pokazatelje (točnost, djelotvornost i pouzdanost), postupak optimiranja s primjenom *GCA* aproksimacije bolji je od temeljnoga postupka za 16 %, dok je prednost primjene *TANA-3* aproksimacije u odnosu na temeljni postupak 15 %. Razlike između primjene *GCA* i *TANA-3* aproksimacije su neznatne, manje su od 1 %.

Predloženi postupak primjene pojasnih aproksimacija, pored pouzdanosti, točnosti i djelotvornosti, resi i jednostavnost, općenitost i laka primjenjivost. Stoga ga se može preporučiti kao uobičajeni dodatak računskom postupku optimiranja strojarskih konstrukcija utemeljenom na uzastopnom kvadratnom programiranju.

ZAHVALA

Ugodna mi je dužnost zahvaliti se svima onima koji su svojim prilozima i potporom omogućili nastanak ovoga djela.

Svom prvom mentoru, nažalost prerano preminulomu, uvaženomu profesoru Špiru Matošinu, dugujem zahvalnost za ljubav prema čudesnom svijetu računalom podržana projektiranja; za rasprave, prijedloge i savjete kojima je obogatio moje spoznaje i omogućio mi je usmjeravanje istraživanja, oblikovanje zadatka i potporu tijekom izrade ovoga rada. Trenutke zajednička rada trajno ću pamtiti po zanosu, dobroti i stručnosti ovoga velikoga čovjeka i profesora.

Mentoru, profesoru Damiru Vučini, zahvaljujem na prihvaćanju zadaće koju profesor Matošin, nažalost, nije stigao dovršiti, kao i na primjedbama i prijedlozima kojima je ovaj rad dobio na potpunosti i kakvoći.

Uvaženome profesoru Michaelu J.D. Powellu s kembridškoga sveučilišta zahvaljujem za nesebično ustupanje potprograma *ZQPCVX*, a profesoru Klausu Schittkowskom, Universität Bayreuth, za ustupanje izvornika programa niza pokusnih zadataka.

Konačno, kolegama s Fakulteta, kao i svojoj obitelji, dugujem zahvalnost za dugotrajno strpljenje, razumijevanje i potporu.

LITERATURA

[1] B. ESPING, “Design Optimization as an Engineering Tool”, Structural Optimization 10(1995), 137-152.

[2] M.Z. COHN, "Theory and Practice of Structural Optimization", Structural Optimization 7(1994), 20-31.

[3] G.N. VANDERPLAATS, “Numerical Optimization: A Powerful Tool for Engineering Design”, Computer Modeling and Simulation in Engineering 1(1996), 107-126.

[4] P. JAIN, A.M. AGOGINO, “Theory of Design: An Optimization Perspective”, Mechanism and Machine Theory 25(1990)3, 287-303.

[5] R.H. GALLAGHER, O.C. ZIENKIEWICZ (Eds.), "Optimum Structural Design: Theory and Applications", John Wiley and Sons, London 1973.

[6] E. ATREK, et al. (Eds.), "New Directions in Optimum Structural Design", John Wiley and Sons, Chichester 1984.

[7] R.W. MAYNE, S. MALKIN, “Parameter Optimization of the Steel Grinding Process”, Journal of Engineering for Industry 98B(1976)3, 1048-1052.

[8] K. FUJITA, S. AKAGI, T. NAKATOGAWA, “Hybrid Approach to Plant Layout Design Using Constraint-Directed Search and an Optimization Technique”, Journal of Mechanical Design 116(1994), 1026-1033.

[9] W.J. KRIBBE, “Applicability of Nonlinear Optimization in Decision Support Systems: The Development of a Flexible Optimizer”, Delft University Press, Delft 1987.

[10] J.S. ARORA, "Computational Design Optimization: A Review and Future Directions", Structural Safety 7(1990), 131-148.

[11] P.B. THANEDAR, J.S. ARORA, G.Y. LI, T.C. LIN, "Robustness, Generality and Efficiency of Optimization Algorithms for Practical Applications", Structural Optimization 2(1990), 203-212.

[12] R. FLETCHER, "Practical Methods of Optimization", John Wiley and Sons, Chichester 1987.

[13] J.S. ARORA, "Introduction to Optimum Design", McGraw-Hill, New York 1989.

[14] G.N. VANDERPLAATS, "Numerical Optimization Techniques for Engineering Design: With Applications", McGraw-Hill, New York 1984.

[15] G.V. REKLAITIS, A. RAVINDRAN, K.M. RAGSDELL, "Engineering Optimization: Methods and Applications", John Wiley and Sons, New York 1983.

[16] K. SCHITTKOWSKI, C. ZILLOBER, R. ZOTEMANTEL, "Numerical Comparison of Nonlinear Programming Algorithms for Structural Optimization", Report No. 453, Mathematisches Institut, Universität Bayreuth, Bayreuth 1993.

[17] E.D. EASON, R.G. FENTON, "A Comparison of Numerical Optimization Methods for Engineering Design", ASME Journal for Engineering for Industry 96(1974)1, 196-200.

[18] E. SANDGREN, K.M. RAGSDELL, "The Utility of Nonlinear Programming Algorithms: A Comparative Study - Part I", ASME Journal of Mechanical Design 102(1980)3, 540-546.

[19] E. SANDGREN, K.M. RAGSDELL, "The Utility of Nonlinear Programming Algorithms: A Comparative Study - Part II", ASME Journal of Mechanical Design 102(1980)3, 547-551.

[20] W. HOCK, K. SCHITTKOWSKI, "A Comparative Performance Evaluation of 27 Nonlinear Programming Codes", Computing 30(1983), 335-358.

[21] C.H. TSENG, J.S. ARORA, "On Implementation of Computational Algorithms for Optimal Design 2: Extensive Numerical Investigation", International Journal for Numerical Methods in Engineering 26(1988), 1383-1402.

[22] S.N. PATNAIK, R.M. CORONEOS, J.D. GUPTIL, D.A. HOPKINS, “Comparative Evaluation of Different Optimization Algorithms for Structural Design Applications”, International Journal for Numerical Methods in Engineering 39(1996), 1761-1774.

[23] J.-F.M. BARTHELEMY, R.T. HAFTKA, “Approximation Concepts for Optimum Structural Design – A Review”, Structural Optimization 5(1993), 129-144.

[24] W.-H. ZHANG, C. FLEURY, “A Modification of Convex Approximation Methods for Structural Optimization”, Computers & Structures 64(1997)1-4, 89-95.

[25] J. SOBIESZCZANSKI-SOBIESKI, R.T. HAFTKA, “Multidisciplinary Aerospace Design Optimization: Survey of Recent Developments”, Structural Optimization 14(1997), 1-23.

[26] J.F. RODRIGUEZ, J.E. RENAUD, L-T. WATSON, “Trust Region Augmented Lagrangian Methods for Sequential Response Surface Approximation and Optimization”, Journal of Mechanical Design 120(1998)1, 58-66.

[27] Б.Н. ПШЕНИЧЫЙ, "Алгоритмы для общей задачи математического программирования", Кибернетика (1970)5, 120-125.

[28] B.N. PSHENICHNY, Yu.M. DANILIN, "Numerical Methods in Extremal Problems", Mir Publishers, Moscow 1982.

[29] B.N. PSHENICHNYJ, “The Linearization Method for Constrained Optimization”, Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, Haidelberg 1996.

[30] A.D. BELEGUNDU, J.S. ARORA, "A Recursive Quadratic Programming Method With Active Set Strategy for Optimal Design", International Journal for Numerical Methods in Engineering 20(1984), 803-816.

[31] K. SCHITTKOWSKI, “On the Global Convergence of Nonlinear Programming Algorithms”, Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design 107(1985), 454-458.

[32] J.S. ARORA, P.B. THANEDAR, "Computational Methods for Optimum Design of Large Complex Structures", Computational Mechanics (1986)1, 221-242.

[33] O.K. LIM, J.S. ARORA, "An Active Set RQP Algorithm for Engineering Design Optimization", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 57(1986), 51-65.

[34] C.H. TSENG, J.S. ARORA, "On Implementation of Computational Algorithms for Optimal Design 1: Preliminary Investigation", International Journal for Numerical Methods in Engineering 26(1988), 1365-1382.

[35] J.S. ARORA, C.H. TSENG, Discussion on "An Investigation of Pshenichnyi's Recursive Quadratic Programming Method for Engineering Optimization (86-DET-26)", ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design 109(1987)2, 254-256.

[36] G. MAGAZINOVIĆ, “Prilog numeričkoj optimalizaciji strojarskih konstrukcija”, magistarski rad, voditelj D. Ščap, Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb 1996.

[37] G. MAGAZINOVIĆ, “Applicability of Recursive Quadratic Programming Method in Engineering Design Optimization”, Proceedings of the 4th Symposium Design '96,

Volume 2, B. Križan (Ed.), Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, Opatija 1996, 306-313.

[38] G. MAGAZINOVIĆ, “Scaling of Variables: An Efficient Way of Design Optimization Process Improvement”, D. Marjanović (Ed.), Proceedings of the 5th International Design Conference - DESIGN'98, Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, Dubrovnik 1998, 177-182.

[39] K. SCHITTKOWSKI, Ch. ZILLOBER, “Nonlinear Programming”, to appear in Encyclopedia of Life Support Systems, UNESCO, Topic: Fundamentals of Optimization and Operations Research, 2001.

[40] V. TORCZON, M.W. TROSSET, “Using Approximations to Accelerate Engineering Design Optimization”, ICASE Report No. 98-33, Institute for Computer Applications in Science and Engineering, NASA Langley Research Center, Hampton 1998.

[41] G. VENTER, R.T. HAFTKA, J.H. STARNES, “Construction of Response Surface Approximations for Design Optimization”, AIAA Journal 36(1998)12, 2242-2249.

[42] P. HAJELA, L. BERKE, “Neurobiological Computational Models in Structural Analysis and Design”, Proceedings of the 31st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference (Atlanta, 1990) Part I, 345-355. (navedeno prema [23])

[43] P.B. THANEDAR, J.S. ARORA, C.H. TSENG, O.K. LIM, G.J. PARK, "Performance of Some SQP Algorithms on Structural Design Problems", International Journal for Numerical Methods in Engineering 23(1986), 2187-2203.

[44] M.J.D. POWELL, "The Convergence of Variable Metric Methods for Nonlinearly Constrained Optimization Calculations", p. 27-63, Nonlinear Programming 3, Eds. O.L. Mangasarian, R.R. Meyer, S.M. Robinson, Academic Press, New York 1978.

[45] K. SCHITTKOWSKI, "The Nonlinear Programming Method of Wilson, Han, and Powell with an Augmented Lagrangian Type Line Search Function. Part 1: Convergence Analysis", Numerische Mathematik 38(1981), 83-114.

[46] K. SCHITTKOWSKI, "The Nonlinear Programming Method of Wilson, Han, and Powell with an Augmented Lagrangian Type Line Search Function. Part 2: An Efficient Implementation With Linear Least Squares Subproblems", Numerische Mathematik 38(1981), 115-127.

[47] K. SCHITTKOWSKI, "On the Convergence of a Sequential Quadratic Programming Method With an Augmented Lagrangian Line Search Function", Math. Operationsforsch. u. Statist., Ser. Optimization 14(1983)2, 197-216.

[48] T.J. BELTRACCHI, G.A. GABRIELE, "An Investigation of Pshenichny's Recursive Quadratic Programming Method for Engineering Optimization", ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design 109(1987), 248-253.

[49] W.-H. ZHANG, C. FLEURY, "Structural Shape Optimization and Convex Programming Methods", D. Bestle and W. Schielen (eds.), IUTAM Symposium of Mechanical Systems, Kluwer Academic Publishers (1996), 357-364.

[50] C. FLEURY, W.-H. ZHANG, "Selection of Appropriate Approximation Schemes in Multi-Disciplinary Engineering Optimization", Advances in Engineering Software 31(2000), 385-389.

[51] C. ZILLOBER, "A Globally Convergent Version of the Method of Moving Asymptotes", Structural Optimization 6(1993), 166-174.

[52] P.Y. PAPALAMBROS, "Optimal Design of Mechanical Engineering Systems", Special 50th Anniversary Design Issue, Transactions of the ASME 117(1995), 55-62.

[53] A. LONGO, M. NO, M. AIZPITARTE, J. UNZUETA, "Conservative Approximations In Nonlinear Optimization. Theory and Examples", Computers & Structures 39(1991)5, 441-449.

[54] K. SCHITTKOWSKI, C. ZILLOBER, R. ZOTEMANTEL, "Numerical Comparison of Nonlinear Programming Algorithms for Structural Optimization", Structural Optimization 7(1994)1, 1-28.

[55] E.J. HAUG, J.S. ARORA, "Applied Optimal Design", John Wiley and Sons, New York 1979.

[56] K. SCHITTKOWSKI, "NLPQL: A FORTRAN Subroutine Solving Constrained Nonlinear Programming Problems", Annals of Operations Research 5(1985), 485-500.

[57] S.N. PATNAIK, D.A. HOPKINS, R. CORONEOS, "Structural Optimization with Approximate Sensitivities", Computers & Structures 58(1996)2, 407-418.

[58] N. STANDER, J.A. SNYMAN, "A New First-Order Interior Feasible Direction Method for Structural Optimization", International Journal for Numerical Methods in Engineering 36(1993), 4009-4025.

[59] J.A. SNYMAN, N. STANDER, "New Successive Approximation Method for Optimum Structural Design", AIAA Journal 32(1994)6, 1310-1315.

[60] N. STANDER, J.A. SNYMAN, J.E. COSTER, “On the Robustness and Efficiency of the SAM Algorithm for Structural Optimization”, International Journal for Numerical Methods in Engineering 8(1995), 119-135.

[61] N. ALEXANDROV, J.E. DENNIS, R.M. LEWIS, V. TORCZON, “A Trust Region Framework for Managing the Use of Approximation Models in Optimization”, ICASE Report No. 97-50, Institute for Computer Applications in Science and Engineering, NASA Langley Research Center, Hampton 1997.

[62] A.J. BOOKER, P.D. FRANK, D.B. SERAFINI, V. TORCZON, M.W. TROSSET, “A Rigorous Framework for Optimization of Expensive Functions by Surrogates”, ICASE Report No. 98-47, Institute for Computer Applications in Science and Engineering, NASA Langley Research Center, Hampton 1998.

[63] J.W. FREE, A.R. PARKINSON, G.R. BRYCE, R.J. BALLING, “Approximation of Computationally Expensive and Noisy Functions for Constrained Nonlinear Optimization”, Paper 86-DET-116, Design Engineering Technical Conference, Columbus, October 5-8, 1986.

[64] J.P. KARIDIS, S.R. TURNS, “Efficient Optimization of Computationally Expensive Objective Functions”, ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design 108(1986), 336-339.

[65] J. RASMUSSEN, “Nonlinear Programming by Cumulative Approximation Refinement”, Structural Optimization 15(1998), 1-7.

[66] V.V. TOROPOV, L.F. ALVAREZ, “Application of Genetic Programming to the Choice of a Structure of Multipoint Approximations”, ISSMO/NASA/AIAA First Internet Conference on Approximations and Fast Reanalysis in Engineering Optimization, June 14-27, 1998. (http://www.aero.ufl.edu/~issmo/program.htm)

[67] L.F. ALVAREZ, V.V. TOROPOV, D.C. HUGHES, A.A. ASHOUR, “Approximation Model Building Using Genetic Programming Methodology: Applications”, Second ISSMO/AIAA Internet Conference on Applications and Fast Reanalysis in Engineering Optimization”, May 25-June 2, 2000. (http://www-tm.wbmt.tudelft.nl/~wbtmavk/2aro_conf/papers.html)

[68] M.J.D. POWELL, “TOLMIN: A Fortran Package for Linearly Constrained Optimization Calculations”, Report DAMPT/1989/NA2, Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge, Cambridge 1989.

[69] M.J.D. POWELL, “Updating Conjugate Directions by the BFGS Formula”, Mathematical Programming 38(1987), 29-46.

[70] A.E. SEPULVEDA, H. THOMAS, “Global Optimization Using Accurate Approximations in Design Synthesis”, Structural Optimization 12(1996), 251-256.

[71] R.T. HAFTKA, J.A. NACHLAS, L.T. WATSON, T. RIZZO, R. DESAI, “Two-Point Constraint Approximation in Structural Optimization”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 60(1987), 289-301.

[72] G.M. FADEL, M.F. RILEY, J.M. BARTHELEMY, “Two Point Exponential Approximation Method for Structural Optimization”, Structural Optimization 2(1990), 117-124.

[73] S. XU, R.V. GRANDHI, “Effective Two-Point Function Approximation For Design Optimization”, AIAA Journal 36(1998)12, 2269-2275.

[74] L. WANG, R.V. GRANDHI, “Improved Two-Point Function Approximations for Design Optimization”, AIAA Journal 33(1995)9, 1720-1727.

[75] R.V. GRANDHI, S. XU, “Two-Point Function Approximations in Structural Optimization”, ISSMO/NASA/AIAA First Internet Conference on Approximations and Fast Reanalysis in Engineering Optimization, June 14-27, 1998. (http://www.aero.ufl.edu/~issmo/program.htm)

[76] S. XU, R.V. GRANDHI, “Multipoint Approximation Development: Thermal Structural Optimization Case Study”, International Journal for Numerical Methods in Engineering 48(2000), 1151-1164.

[77] S. XU, R.V. GRANDHI, “Structural Optimization with Thermal and Mechanical Constraints”, Journal of Aircraft 36(1999)1, 29-35.

[78] E. SALAJEGHEH, “Optimum Design of Plate Structures Using Three-Point Approximation”, Structural Optimization 13(1997), 142-147.

[79] L. WANG, R.V. GRANDHI, “Multivariate Hermite Approximation for Design Optimization”, International Journal for Numerical Methods in Engineering 39(1996), 787-803.

[80] L. WANG, R.V. GRANDHI, “Multipoint Approximations: Comparisons Using Structural Size, Configuration and Shape Design”, Structural Optimization 2(1996), 177-185.

[81] H. CHICKERMANE, H. C. GEA, “Structural Optimization Using a New Local Approximation Method”, International Journal for Numerical Methods in Engineering 39(1996), 829-846 .

[82] M. KEGL, M.M. OBLAK, “Optimization of Mechanical Systems: On Non-Linear First-Order Approximation with an Additive Convex Term”, Communications in Numerical Methods in Engineering 13(1997)1, 13-20.

[83] K.G. MAHMOUD, “An Efficient Approach to Structural Optimization”, Computers and Structures 64(1997)1-4, 97-112.

[84] S.-P. HAN, “A Globally Convergent Method for Nonlinear Programming”, Journal of Optimization Theory and Applications, 22(1977)3, 297-309.

[85] S.P. HAN, "Superlinearly Convergent Variable Metric Algorithms for General Nonlinear Programming Problems", Mathematical Programming 11(1976), 263-282.

[86] M.J.D. POWELL, "Algorithms for Nonlinear Constraints That Use Lagrangian Functions", Mathematical Programming 14(1978), 224-248.

[87] Б.Н. ПШЕНИЧЫЙ, "Метод линеаризации", Техническая кибернетика (1987)1, 92-104.

[88] G. MAGAZINOVIĆ, “Numerical Experience with Two-Point Adaptive Nonlinearity Approximation for Design Optimization”, u pripremi za International Design Conference DESIGN 2002, Dubrovnik 2002.

[89] M.J.D. POWELL, "ZQPCVX - A FORTRAN Subroutine for Convex Quadratic Programming", Report DAMTP/1983/NA17, Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge, Cambridge 1983.

[90] M.J.D. POWELL, "On the Quadratic Programming Algorithm of Goldfarb and Idnani", Mathematical Programming 25(1985), 46-61.

[91] G. MAGAZINOVIĆ, “Numerical Experience with Generalized Convex Approximation for Design Optimization”, Proceedings of the 6th International Design Conference DESIGN 2000, D. Marjanović (Ed.), Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, Cavtat 2000, 325-328.

[92] ***, “Digital Fortran – Language Reference Manual”, AA-Q66SC-TK, Digital Equipment Corporation, Maynard 1997.

[93] H. CROWDER, R.S. DEMBO, J.M. MULVEY, "On Reporting Computational Experiments With Mathematical Software", ACM Transactions on Mathematical Software 5(1979)2, 193-203.

[94] M. MINKOFF, "Methods for Evaluating Nonlinear Programming Software", p. 519-548, Nonlinear Programming 4, Edited by O.L. Mangasarian, R.R. Meyer, S.M. Robinson, Academic Press, New York 1981.

[95] A. MIELE, S. GONZALES, "On the Comparative Evaluation of Algorithms for Mathematical Programming Problems", p. 337-359, Nonlinear Programming 3, Edited by O.L. Mangasarian, R.R. Meyer, S.M. Robinson, Academic Press, New York 1981.

[96] W. HOCK, K. SCHITTKOWSKI, "Test Examples for Nonlinear Programming Codes", Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 187, Springer-Verlag, Berlin 1981.

[97] K. SCHITTKOWSKI, "More Test Examples for Nonlinear Programming Codes", Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 282, Springer-Verlag, Berlin 1987.

[98] T.L. SATTY, “A Scaling Method for Priorities in Hierarchical Structures”, Journal of Mathematical Psychology, 15(1977), 234-281.

[99] T.L. SAATY, “The Analytic Hierarchy and Analytic Network Processes”, PowerPoint presentation, Kobe, Japan 1999; osobna prepiska, srpanj 2000.

[100] T.L. SAATY, “The Analytic Hierarchy Process (AHP) for Decision Making”, PowerPoint presentation, osobna prepiska, srpanj 2000.

[101] T.L. SAATY, “The Seven Pillars of the Analytic Hierarchy Process”, rukopis rada, osobna prepiska, srpanj 2000.

[102] K. SCHITTKOWSKI, "Nonlinear Programming Codes: Information, Tests, Performance", Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 183, Springer-Verlag, Berlin 1980.

[103] ***, “IMSL – Fortran Subroutines for Mathematical Applications”, Vol. 1, Visual Numerics, Houston 1997.

[104] P. SPELLUCCI, “A New Technique for Inconsistent QP Problems in the SQP Method – Donlp2 – Numerical Results”, Detail.PS, Netlib Repository, 2001. (http://www.netlib.org/opt/donlp2)

[105] P. SPELLUCCI, “Donlp2 - General Differentiable Nonlinear Programming Using Dense Linear Algebra”, Donlp2, Netlib Repository, 2001 (http://www.netlib.org/opt)

[106] H. MITTELMANN, P. SPELLUCCI, “Benchmarks for Optimization Software”, 2001 (http://plato.la.asu.edu/bench.html)

[107] K.E. HILLSTROM, “User Guide for JAKEF”, Argonne National Laboratory, Argonne 1988.

POPIS TABLICA

UDK 620:519.688

SAŽETAK

U radu je predložen i istražen novi algoritam optimiranja strojarskih konstrukcija utemeljen na objedinjavanju uzastopnoga kvadratnoga programiranja i postupka pojasnih aproksimacija funkcija troškova i ograničenja. Temeljni postupak uzastopnoga kvadratnoga programiranja, kako su ga odredili Pšeničnij, Lim, Belegundu i Arora, a dopunio Magazinović, izmijenjen je u dijelu jednodimenzionalnoga optimiranja, kada se pojasnim aproksimacijama određuje veličina koraka u smjeru pretraživanja. Predložena je i istražena primjena dvaju modela pojasnih aproksimacija: poopćena konveksna aproksimacija Chickermanea i Geae i aproksimacija prilagodljive nelinearnosti Xua i Grandhija. Predloženi algoritam oživotvoren je u računalnom potprogramu *RQPOPT v2* koji je namijenjen općem optimiranju strojarskih konstrukcija. Rad programa provjeren je na skupu od 19 zadataka optimiranja iz literature. Odabrani zadaci nastali su primjenom optimiranja u strojarstvu i tehnici i zato vjerno odražavaju stanja koja se javljaju pri optimiranju strojarskih konstrukcija. Svi zadaci su rješavani istim skupom parametara optimiranja, bez ikakva upliva korisnika. Za vrednovanje i usporedbu rezultata u radu je predložen i primijenjen novi postupak, utemeljen na Schittkowskijevoj primjeni Saatyjeve teorije prednosti. Rezultati usporedbe su pokazali kako je pouzdanost predloženoga postupka potpuno jednaka pouzdanosti temeljnoga postupka optimiranja. Isto tako, točnost predloženoga postupka je približno jednaka točnosti temeljnoga postupka – razlike su tek nešto veće od 1 %. Najveće su razlike u djelotvornosti: predloženi postupak optimiranja uz primjenu poopćene konveksne aproksimacije djelotvorniji je od temeljnoga postupka za 34 %, dok je prednost primjene aproksimacije prilagodljive nelinearnosti nešto manja – 33 %. Promatrano u cijelosti, prednost predloženoga postupka iznosi 15 %. Svojim rezultatima, u prvom redu pokazanom pouzdanošću, točnošću i djelotvornošću, kao i općenitošću i jednostavnošću, predloženi postupak se pokazao prikladnim za rješavanje suvremenih zadataka optimiranja strojarskih konstrukcija.

KLJUČNE RIJEČI: strojarstvo, konstrukcija, optimiranje, aproksimacija, cilj, ograničenje

UDC 620:519.688

SUMMARY

IMPROVING THE EFFICIENCY OF MECHANICAL DESIGN OPTIMIZATION UTILIZING MID-RANGE APPROXIMATIONS OF COSTS AND CONSTRAINTS

The thesis proposes and examines an algorithm for mechanical design optimization. The proposed algorithm combines a recursive quadratic programming method with two-point function approximations. The baseline recursive quadratic programming algorithm of Pshenichny, Lim, Belegundu and Arora, with some modifications of Magazinović, is enhanced with the two-point function approximations during the line search. Two approximation models are proposed and examined, i.e. a generalized convex approximation of Chickermane and Gea, and a two-point adaptive nonlinearity approximation of Xu and Grandhi. The proposed algorithm is implemented in Fortran subroutine named *RQPOPT v2* intended to general design optimization purposes. The computer code is tested against a set of 19 real-life design optimization problems taken from literature. All test problems were solved with the same set of optimization parameters, in the so-called black-box mode. To obtain quantitative scores for the performance, a special ranking scheme is proposed and applied. The proposed ranking scheme is a modification of the Schittkowski's implementation of the Saaty's priority theory. The performance evaluation has shown that the reliability of the proposed algorithm was exactly the same as the reliability of the baseline algorithm. Besides, the accuracy of the proposed algorithm was nearly the same as the accuracy of the baseline procedure – the differences amounted to slightly more than 1 % only. The greatest differences were observed with respect to efficiency: the proposed optimization procedure utilizing the generalized convex approximation was 34 % more efficient. On the other hand, the efficiency of the proposed optimization procedure utilizing the two-point adaptive nonlinearity approximation was slightly lower, amounting to 33 %. Taking all performance criteria into account, the priority of the proposed procedure was 15 %. The results showed that the proposed optimization procedure is reliable, accurate and efficient. It is also generally applicable and simple, and hence suitable for recent mechanical design optimization applications.

KEY WORDS: mechanical engineering, design, optimization, approximation, cost, constraint

ŽIVOTOPIS

Rođen sam u Splitu 13. svibnja 1956. godine. Osnovnu i srednju tehničku školu, strojarski smjer, završio sam u Splitu. Studij strojarstva na Fakultetu elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Splitu upisao sam 1975. godine. Nakon četvrtoga semestra prekinuo sam studij i zaposlio se u Jadranskoj slobodnoj plovidbi kao vježbenik stroja. Nakon jednogodišnjega pomorskoga iskustva nastavio sam studij strojarstva kojega sam završio 1982. godine sa završnim radom pod naslovom "Računsko određivanje faktora realnosti". Po odsluženju vojnoga roka, 1983. godine, zaposlio sam se u Brodograđevnoj industriji Split kao organizator-programer u OOUR Konstrukcije. Pored drugih radova, razvio sam programski sustav za projektiranje brodskih ventilacijskih instalacija, kao i programski sustav za projektiranje cjevovoda za grijanje tankova tereta. Godine 1986. prešao sam u Institut Brodograđevne industrije Split na mjesto asistenta za istraživanje i razvoj novih plovnih objekata. Područja djelovanja su mi bila računalom podržano konstruiranje, inženjersko optimiranje i vibracijska analiza brodskih porivnih sustava, gdje sam za više brodova izradio analize torzijskih i aksijalnih vibracija, te projekte grijanja tankova tereta. Od 1994. godine u Institutu sam obavljo dužnosti rukovoditelja razvoja plovnih objekata. Istodobno, s polovičnim radnim vremenom, zaposlio sam se na Fakultetu elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Splitu, gdje pri Zavodu za strojarstvo i brodogradnju obavljam dužnosti asistenta iz kolegija Primjena elektroničkih računala, Metode optimalizacije, Tehničko crtanje, Uvod u računala i Primjena računala. Od ožujka 1999. stalno sam zaposlen na Fakultetu s punim radnim vremenom. Postdiplomski studij iz teorije konstrukcija, na Fakultetu strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, upisao sam 1987. godine, a završio 1996. godine s magistarskim radom pod naslovom "Prilog numeričkoj optimalizaciji strojarskih konstrukcija". Objavio sam šest znanstvenih i stručnih članaka u domaćim časopisima i šest znanstvenih i stručnih priopćenja na domaćim i inozemnim skupovima. Autor sam četiriju internih skripti, 17 računalnih programa i 40 projekata i elaborata. Od 1986. godine član sam The American Society of Mechanical Engineers.

P R I L O Z I

PRILOG A:

PRIKAZ REZULTATA PO ZADACIMA

Ovaj prilog sadrži potpuni prikaz rezultata proračuna programom *RQPOPT v2* u izvedbi s poopćenom konveksnom aproksimacijom tijekom usmjerena pretraživanja. Odgovarajući sažeti prikaz rezultata dan je tablicom V.

Napomene:

1. Ispis iznosa ograničenja u točki optimuma, **`G*`**, ne sadrži rubna ograničenja.
2. Rezultat za najveće prekoračenje ograničenja u točki optimuma, **`V`**, uključuje i sva rubna ograničenja.
3. Rezultati za vektor pomaka u smjeru pretraživanja, **`DN`**, i gradijent Lagrangeove funkcije, **`LGN`**, prikazani su u obliku Euklidovih normi odgovarajućih vektora. Obje vrijednosti se odnose na točku koja je prethodila točki rješenja.
4. U ispisu Lagrangeovih množitelja djelatnih ograničenja u točki optimuma, **`U*`**, se rubna ograničenja broje s indeksima od $m+1$ do $m+2n$, gdje je m ukupni broj ograničenja, a n broj varijabli, pri čemu se za svako rubno ograničenje najprije broji donja, pa gornja vrijednost.
5. U ispisu broja izračunavanja ograničenja, **`NGE`**, i broja izračunavanja gradijenta ograničenja, **`NGGE`**, se izračunavanje svake funkcije ograničenja, ili njena gradijenta, broji posebno.

```
ZADATAK BR.  1     KONSTRUKCIJA TRANSFORMATORA


BROJ VARIJABLI .................................. N    =    6
BROJ OGRANIČENJA ................................ M    =    2
BROJ RUBNIH OGRANIČENJA ......................... MB   =    6
IZRAČUNAVANJE GRADIJENTA ........................ ANALITIČKO
POČETNO RJEŠENJE ................................ IZVEDIVO

POČETNI VEKTOR RJEŠENJA:
X0( 1) =     5.540     X0( 2) =     4.400     X0( 3) =    12.020
X0( 4) =    11.820     X0( 5) =     0.702     X0( 6) =     0.852

POČETNA FUNKCIJA TROŠKOVA .................. F0   =    137.066
NAJVEĆE POČETNO PREKORAČENJE OGRANIČENJA ... V0   =  0.000D+00


REZULTATI


DOJAVNIK STANJA OBRADE .....................  INFO =           0

VEKTOR RJEŠENJA:
X*( 1) =     5.333     X*( 2) =     4.657     X*( 3) =    10.433
X*( 4) =    12.082     X*( 5) =     0.753     X*( 6) =     0.879
IZNOSI OGRANIČENJA:
G*( 1) =     0.000     G*( 2) =     0.000

FUNKCIJA TROŠKOVA .......................... F*   =    135.076
NAJVEĆE PREKORAČENJE OGRANIČENJA ........... V    =  0.561D-06
POMAK U SMJERU PRETRAŽIVANJA ............... DN   =  0.102D-02
GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE ............. LGN  =  0.531D-01

BROJ DJELATNIH OGRANIČENJA U OPTIMUMU ...... NAC  =          2
LAGRANGEOVI MNOŽITELJI DJELATNIH OGRANIČENJA:
U*( 1) =   364.259     U*( 2) =   127.794


BROJ ITERACIJA ............................... NIT  =        9
BROJ IZRAČUNAVANJA FUNKCIJE TROŠKOVA .......... NFE  =       19
BROJ IZRAČUNAVANJA OGRANIČENJA ................ NGE  =       58
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROŠKOVA  NFGE =        9
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA OGRANIČENJA ..... NGGE =       18

VRIJEME IZRAČUNAVANJA ........................ CPUT =     0.03
```

```
ZADATAK BR.  2     OPTIMALNA KONSTRUKCIJA REAKTORA


BROJ VARIJABLI ..................................  N   =    8
BROJ OGRANIČENJA ................................  M   =    6
BROJ RUBNIH OGRANIČENJA .........................  MB  =   16
IZRAČUNAVANJE GRADIJENTA ........................  ANALITIČKO
POČETNO RJEŠENJE ................................  NEIZVEDIVO


POČETNI VEKTOR RJEŠENJA:
X0( 1) =     6.000     X0( 2) =     3.000     X0( 3) =     0.400
X0( 4) =     0.200     X0( 5) =     6.000     X0( 6) =     6.000
X0( 7) =     1.000     X0( 8) =     0.500

POČETNA FUNKCIJA TROŠKOVA ..................  F0  =      3.657
NAJVEĆE POČETNO PREKORAČENJE OGRANIČENJA ...  V0  =  0.417D+00


REZULTATI


DOJAVNIK STANJA OBRADE ....................   INFO =          0

VEKTOR RJEŠENJA:
X*( 1) =     6.464     X*( 2) =     2.234     X*( 3) =     0.667
X*( 4) =     0.596     X*( 5) =     5.933     X*( 6) =     5.527
X*( 7) =     1.014     X*( 8) =     0.401
IZNOSI OGRANIČENJA:
G*( 1) =     0.000     G*( 2) =     0.000     G*( 3) =     0.000
G*( 4) =     0.000     G*( 5) =    -2.951     G*( 6) =    -0.249

FUNKCIJA TROŠKOVA ..........................  F*  =      3.951
NAJVEĆE PREKORAČENJE OGRANIČENJA ...........  V   =  0.377D-06
POMAK U SMJERU PRETRAŽIVANJA ...............  DN  =  0.298D-02
GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE .............  LGN =  0.465D-02

BROJ DJELATNIH OGRANIČENJA U OPTIMUMU ......  NAC =          4
LAGRANGEOVI MNOŽITELJI DJELATNIH OGRANIČENJA:
U*( 1) =     1.843     U*( 2) =     4.371     U*( 3) =     0.849
U*( 4) =     0.878


BROJ ITERACIJA ...............................  NIT  =      10
BROJ IZRAČUNAVANJA FUNKCIJE TROŠKOVA ..........  NFE  =      11
BROJ IZRAČUNAVANJA OGRANIČENJA ................  NGE  =      66
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROŠKOVA   NFGE =      10
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA OGRANIČENJA .....  NGGE =      39

VRIJEME IZRAČUNAVANJA ........................  CPUT =    0.03
```

```
ZADATAK BR.  3    KONSTRUKCIJA IZMJENJIVAČA TOPLINE


BROJ VARIJABLI ..................................  N    =    8
BROJ OGRANIČENJA ................................  M    =    6
BROJ RUBNIH OGRANIČENJA .........................  MB   =   16
IZRAČUNAVANJE GRADIJENTA ........................  ANALITIČKO
POČETNO RJEŠENJE ................................  NEIZVEDIVO


POČETNI VEKTOR RJEŠENJA:
X0( 1) =  5000.000     X0( 2) =  5000.000     X0( 3) =  5000.000
X0( 4) =   200.000     X0( 5) =   350.000     X0( 6) =   150.000
X0( 7) =   225.000     X0( 8) =   425.000

POČETNA FUNKCIJA TROŠKOVA .................. F0  =   15000.000
NAJVEĆE POČETNO PREKORAČENJE OGRANIČENJA ... V0  =   0.625D+05


REZULTATI


DOJAVNIK STANJA OBRADE ....................  INFO =          8

VEKTOR RJEŠENJA:
X*( 1) =   576.955     X*( 2) =  1358.604     X*( 3) =  5113.280
X*( 4) =   181.856     X*( 5) =   295.469     X*( 6) =   218.144
X*( 7) =   286.388     X*( 8) =   395.469
IZNOSI OGRANIČENJA:
G*( 1) =     0.000     G*( 2) =     0.000     G*( 3) =     0.000
G*( 4) =     0.001     G*( 5) =    -0.939     G*( 6) =     0.000

FUNKCIJA TROŠKOVA .......................... F*  =    7048.838
NAJVEĆE PREKORAČENJE OGRANIČENJA ........... V   =   0.600D-03
POMAK U SMJERU PRETRAŽIVANJA ............... DN  =   0.393D-02
GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE ............. LGN =   0.195D+02

BROJ DJELATNIH OGRANIČENJA U OPTIMUMU ...... NAC =           6
LAGRANGEOVI MNOŽITELJI DJELATNIH OGRANIČENJA:
U*( 1) =  1226.341     U*( 2) =  6009.951     U*( 3) = 28129.246
U*( 4) =  5247.568     U*( 5) =  7153.752     U*( 6) = 24082.064


BROJ ITERACIJA ............................... NIT  =      34
BROJ IZRAČUNAVANJA FUNKCIJE TROŠKOVA ......... NFE  =     293
BROJ IZRAČUNAVANJA OGRANIČENJA ............... NGE  =    1279
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROŠKOVA  NFGE =       2
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA OGRANIČENJA ..... NGGE =      79

VRIJEME IZRAČUNAVANJA ........................ CPUT =    0.31
```

```
ZADATAK BR.  4     RASPORED STATIČKE SNAGE


BROJ VARIJABLI ................................... N   =   9
BROJ OGRANIČENJA ................................. M   =   6
BROJ RUBNIH OGRANIČENJA .......................... MB  =   8
IZRAČUNAVANJE GRADIJENTA ......................... ANALITIČKO
POČETNO RJEŠENJE ................................. NEIZVEDIVO


POČETNI VEKTOR RJEŠENJA:
X0( 1) =     0.800     X0( 2) =     0.800     X0( 3) =     0.200
X0( 4) =     0.200     X0( 5) =     1.045     X0( 6) =     1.045
X0( 7) =     1.045     X0( 8) =     0.000     X0( 9) =     0.000

POČETNA FUNKCIJA TROŠKOVA .................. F0  =   4853.334
NAJVEĆE POČETNO PREKORAČENJE OGRANIČENJA ... V0  =  0.100D+01


REZULTATI


DOJAVNIK STANJA OBRADE ....................  INFO =          64

VEKTOR RJEŠENJA:
X*( 1) =     0.668     X*( 2) =     1.022     X*( 3) =     0.228
X*( 4) =     0.185     X*( 5) =     1.091     X*( 6) =     1.091
X*( 7) =     1.069     X*( 8) =     0.106     X*( 9) =    -0.339
IZNOSI OGRANIČENJA:
G*( 1) =     0.000     G*( 2) =     0.000     G*( 3) =     0.000
G*( 4) =     0.000     G*( 5) =     0.000     G*( 6) =     0.000

FUNKCIJA TROŠKOVA .......................... F*  =   5055.009
NAJVEĆE PREKORAČENJE OGRANIČENJA ........... V   =  0.108D-04
POMAK U SMJERU PRETRAŽIVANJA ............... DN  =  0.456D-02
GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE ............. LGN =  0.120D+05

BROJ DJELATNIH OGRANIČENJA U OPTIMUMU ...... NAC =          8
LAGRANGEOVI MNOŽITELJI DJELATNIH OGRANIČENJA:
U*( 1) = -8821.202     U*( 2) =-11914.271     U*( 3) =-11413.141
U*( 4) =    -0.001     U*( 5) =    -0.001     U*( 6) =    -1.064
U*(16) =   277.096     U*(18) =   575.233


BROJ ITERACIJA ................................ NIT  =      46
BROJ IZRAČUNAVANJA FUNKCIJE TROŠKOVA .......... NFE  =      61
BROJ IZRAČUNAVANJA OGRANIČENJA ................ NGE  =     722
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROŠKOVA  NFGE =      45
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA OGRANIČENJA ...... NGGE =     276

VRIJEME IZRAČUNAVANJA ......................... CPUT =    0.26
```

ZADATAK BR. 5 KEMIJSKA RAVNOTEŽA

```
BROJ VARIJABLI .................................. N   =   10
BROJ OGRANIČENJA ................................ M   =    3
BROJ RUBNIH OGRANIČENJA ......................... MB  =   10
IZRAČUNAVANJE GRADIJENTA ........................ ANALITIČKO
POČETNO RJEŠENJE ................................ NEIZVEDIVO


POČETNI VEKTOR RJEŠENJA:
X0( 1) =     0.100     X0( 2) =     0.100     X0( 3) =     0.100
X0( 4) =     0.100     X0( 5) =     0.100     X0( 6) =     0.100
X0( 7) =     0.100     X0( 8) =     0.100     X0( 9) =     0.100
X0(10) =     0.100

POČETNA FUNKCIJA TROŠKOVA .................. F0  =    -20.960
NAJVEĆE POČETNO PREKORAČENJE OGRANIČENJA ... V0  =  0.650D+00


REZULTATI


DOJAVNIK STANJA OBRADE .....................  INFO =         0

VEKTOR RJEŠENJA:
X*( 1) =     0.039     X*( 2) =     0.150     X*( 3) =     0.783
X*( 4) =     0.001     X*( 5) =     0.486     X*( 6) =     0.001
X*( 7) =     0.026     X*( 8) =     0.021     X*( 9) =     0.037
X*(10) =     0.095
IZNOSI OGRANIČENJA:
G*( 1) =     0.000     G*( 2) =     0.000     G*( 3) =     0.000

FUNKCIJA TROŠKOVA .......................... F*  =    -47.761
NAJVEĆE PREKORAČENJE OGRANIČENJA ........... V   =  0.524D-16
POMAK U SMJERU PRETRAŽIVANJA ............... DN  =  0.652D-02
GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE ............. LGN =  0.150D+03

BROJ DJELATNIH OGRANIČENJA U OPTIMUMU ...... NAC =          3
LAGRANGEOVI MNOŽITELJI DJELATNIH OGRANIČENJA:
U*( 1) =   -32.448     U*( 2) =   -34.309     U*( 3) =   -43.055


BROJ ITERACIJA ............................... NIT  =      19
BROJ IZRAČUNAVANJA FUNKCIJE TROŠKOVA .......... NFE  =      20
BROJ IZRAČUNAVANJA OGRANIČENJA ................ NGE  =       6
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROŠKOVA  NFGE =      19
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA OGRANIČENJA ..... NGGE =       6

VRIJEME IZRAČUNAVANJA ........................ CPUT =    0.02
```

ZADATAK BR. 6 PROCES ALKILACIJE

```
BROJ VARIJABLI ................................... N    =   10
BROJ OGRANIČENJA ................................. M    =   11
BROJ RUBNIH OGRANIČENJA .......................... MB   =   20
IZRAČUNAVANJE GRADIJENTA ......................... ANALITIČKO
POČETNO RJEŠENJE ................................. NEIZVEDIVO


POČETNI VEKTOR RJEŠENJA:
X0( 1) =  1745.000     X0( 2) = 12000.000     X0( 3) =   110.000
X0( 4) =  3048.000     X0( 5) =  1974.000     X0( 6) =    89.200
X0( 7) =    92.800     X0( 8) =     8.000     X0( 9) =     3.600
X0(10) =   145.000

POČETNA FUNKCIJA TROŠKOVA .................. F0   =   -872.387
NAJVEĆE POČETNO PREKORAČENJE OGRANIČENJA ... V0   =  0.440D+00


REZULTATI


DOJAVNIK STANJA OBRADE .....................  INFO =       104

VEKTOR RJEŠENJA:
X*( 1) =  1698.119     X*( 2) = 15822.059     X*( 3) =    54.090
X*( 4) =  3031.245     X*( 5) =  2000.000     X*( 6) =    90.114
X*( 7) =    95.000     X*( 8) =    10.495     X*( 9) =     1.562
X*(10) =   153.535
IZNOSI OGRANIČENJA:
G*( 1) =     0.000     G*( 2) =     0.000     G*( 3) =     0.000
G*( 4) =    -0.009     G*( 5) =     0.000     G*( 6) =     0.000
G*( 7) =    -0.023     G*( 8) =     0.004     G*( 9) =     0.000
G*(10) =   -60.935     G*(11) =    -0.033

FUNKCIJA TROŠKOVA .......................... F*   =  -1768.814
NAJVEĆE PREKORAČENJE OGRANIČENJA ........... V    =  0.381D-02
POMAK U SMJERU PRETRAŽIVANJA ............... DN   =  0.391D-02
GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE ............. LGN  =  0.412D+05

BROJ DJELATNIH OGRANIČENJA U OPTIMUMU ...... NAC  =          9
LAGRANGEOVI MNOŽITELJI DJELATNIH OGRANIČENJA:
U*( 1) =-19188.202     U*( 2) =  6892.023     U*( 3) =   902.677
U*( 5) = 21928.278     U*( 6) = 10126.782     U*( 8) =  2919.898
U*( 9) = 22158.507     U*(21) =  1747.761     U*(25) = 16086.195


BROJ ITERACIJA ................................ NIT  =      41
BROJ IZRAČUNAVANJA FUNKCIJE TROŠKOVA .......... NFE  =      63
BROJ IZRAČUNAVANJA OGRANIČENJA ................ NGE  =     658
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROŠKOVA NFGE =      41
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA OGRANIČENJA ..... NGGE =     183
VRIJEME IZRAČUNAVANJA ......................... CPUT =    0.24
```

ZADATAK BR. 7 3-STUPNO MEMBRANSKO SEPARIRANJE

```
BROJ VARIJABLI .................................. N   =   13
BROJ OGRANIČENJA ................................ M   =   15
BROJ RUBNIH OGRANIČENJA ......................... MB  =   26
IZRAČUNAVANJE GRADIJENTA ........................ ANALITIČKO
POČETNO RJEŠENJE ................................ NEIZVEDIVO

POČETNI VEKTOR RJEŠENJA:
X0( 1) =     0.500     X0( 2) =     0.800     X0( 3) =     0.900
X0( 4) =     0.100     X0( 5) =     0.140     X0( 6) =     0.500
X0( 7) =   489.000     X0( 8) =    80.000     X0( 9) =   650.000
X0(10) =   450.000     X0(11) =   150.000     X0(12) =   150.000
X0(13) =   150.000
POČETNA FUNKCIJA TROŠKOVA .................. F0  =     450.000
NAJVEĆE POČETNO PREKORAČENJE OGRANIČENJA ... V0  =   0.306D+02


REZULTATI


DOJAVNIK STANJA OBRADE .....................  INFO =         24
VEKTOR RJEŠENJA:
X*( 1) =     0.804     X*( 2) =     0.900     X*( 3) =     0.968
X*( 4) =     0.100     X*( 5) =     0.191     X*( 6) =     0.439
X*( 7) =   574.079     X*( 8) =    74.078     X*( 9) =   500.015
X*(10) =     0.100     X*(11) =    20.233     X*(12) =    77.347
X*(13) =     0.007
IZNOSI OGRANIČENJA:
G*( 1) =    -0.068     G*( 2) =    -0.096     G*( 3) =     0.000
G*( 4) =    -0.952     G*( 5) =    -0.610     G*( 6) =     0.000
G*( 7) =     0.000     G*( 8) =     0.000     G*( 9) =     0.000
G*(10) =     0.000     G*(11) =     0.000     G*(12) =     0.000
G*(13) =     0.000     G*(14) =     0.000     G*(15) =     0.000

FUNKCIJA TROŠKOVA .......................... F*  =      97.588
NAJVEĆE PREKORAČENJE OGRANIČENJA ........... V   =   0.867D-06
POMAK U SMJERU PRETRAŽIVANJA ............... DN  =   0.288D-02
GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE ............. LGN =   0.288D-02

BROJ DJELATNIH OGRANIČENJA U OPTIMUMU ...... NAC =          12
LAGRANGEOVI MNOŽITELJI DJELATNIH OGRANIČENJA:
U*( 6) =   153.414     U*( 7) =   341.293     U*( 8) =     0.046
U*( 9) =     0.007     U*(10) =   227.349     U*(11) =   235.493
U*(12) =    25.207     U*(13) =    66.218     U*(14) =   158.289
U*(15) =   524.505     U*(23) =    23.034     U*(34) =    54.004


BROJ ITERACIJA ............................... NIT  =     34
BROJ IZRAČUNAVANJA FUNKCIJE TROŠKOVA ......... NFE  =      2
BROJ IZRAČUNAVANJA OGRANIČENJA ............... NGE  =    884
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROŠKOVA  NFGE =      2
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA OGRANIČENJA ..... NGGE =    259
VRIJEME IZRAČUNAVANJA ........................ CPUT =   0.33
```

```
ZADATAK BR.  8     ZUPČASTI PRIJENOSNIK NAJMANJE TROMOSTI


BROJ VARIJABLI ...................................  N   =    2
BROJ OGRANIČENJA .................................  M   =    0
BROJ RUBNIH OGRANIČENJA ..........................  MB  =    4
IZRAČUNAVANJE GRADIJENTA .........................  ANALITIČKO
POČETNO RJEŠENJE .................................  IZVEDIVO

POČETNI VEKTOR RJEŠENJA:
X0( 1) =     0.500     X0( 2) =     0.500

POČETNA FUNKCIJA TROŠKOVA ..................  F0  =    2563.325
NAJVEĆE POČETNO PREKORAČENJE OGRANIČENJA ...  V0  =   0.000D+00


REZULTATI


DOJAVNIK STANJA OBRADE .....................   INFO =          0

VEKTOR RJEŠENJA:
X*( 1) =     1.743     X*( 2) =     2.030

FUNKCIJA TROŠKOVA ..........................  F*  =       1.744
NAJVEĆE PREKORAČENJE OGRANIČENJA ...........  V   =   0.000D+00
POMAK U SMJERU PRETRAŽIVANJA ...............  DN  =   0.557D-03
GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE .............  LGN =   0.291D-03

BROJ DJELATNIH OGRANIČENJA U OPTIMUMU ......  NAC =           0


BROJ ITERACIJA ..............................  NIT  =       11
BROJ IZRAČUNAVANJA FUNKCIJE TROŠKOVA ........  NFE  =       12
BROJ IZRAČUNAVANJA OGRANIČENJA ..............  NGE  =        0
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROŠKOVA  NFGE =      11
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA OGRANIČENJA ...  NGGE =        0

VRIJEME IZRAČUNAVANJA .......................  CPUT =    0.00
```

```
ZADATAK BR.  9    KONSTRUKCIJA KLIZNOGA LEŽAJA


BROJ VARIJABLI ................................... N   =    2
BROJ OGRANIČENJA ................................. M   =    1
BROJ RUBNIH OGRANIČENJA .......................... MB  =    4
IZRAČUNAVANJE GRADIJENTA ......................... ANALITIČKO
POČETNO RJEŠENJE ................................. NEIZVEDIVO


POČETNI VEKTOR RJEŠENJA:
X0( 1) =     2.500     X0( 2) =     2.500

POČETNA FUNKCIJA TROŠKOVA ................. F0  =       0.519
NAJVEĆE POČETNO PREKORAČENJE OGRANIČENJA ... V0  =   0.529D+02


REZULTATI


DOJAVNIK STANJA OBRADE ....................  INFO =         0

VEKTOR RJEŠENJA:
X*( 1) =     1.287     X*( 2) =     0.530
IZNOSI OGRANIČENJA:
G*( 1) =     0.000

FUNKCIJA TROŠKOVA ......................... F*  =       1.621
NAJVEĆE PREKORAČENJE OGRANIČENJA .......... V   =   0.230D-05
POMAK U SMJERU PRETRAŽIVANJA .............. DN  =   0.354D-02
GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE ............ LGN =   0.576D-02

BROJ DJELATNIH OGRANIČENJA U OPTIMUMU ...... NAC =           1
LAGRANGEOVI MNOŽITELJI DJELATNIH OGRANIČENJA:
U*( 1) =     4.182


BROJ ITERACIJA ............................... NIT  =       9
BROJ IZRAČUNAVANJA FUNKCIJE TROŠKOVA .......... NFE  =       6
BROJ IZRAČUNAVANJA OGRANIČENJA ................ NGE  =      10
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROŠKOVA   NFGE =       5
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA OGRANIČENJA .....  NGGE =       9

VRIJEME IZRAČUNAVANJA ........................ CPUT =    0.00
```

```
ZADATAK BR. 10    ZADATAK KONSTRUKCIJE GREBENA


BROJ VARIJABLI .................................. N   =   2
BROJ OGRANIČENJA ................................ M   =   2
BROJ RUBNIH OGRANIČENJA ......................... MB  =   4
IZRAČUNAVANJE GRADIJENTA ........................ NUMERIČKO
POČETNO RJEŠENJE ................................ IZVEDIVO

POČETNI VEKTOR RJEŠENJA:
X0( 1) =     0.750     X0( 2) =     0.750

POČETNA FUNKCIJA TROŠKOVA ................. F0  =    217.361
NAJVEĆE POČETNO PREKORAČENJE OGRANIČENJA ... V0  =  0.000D+00


REZULTATI


DOJAVNIK STANJA OBRADE .....................  INFO =         0

VEKTOR RJEŠENJA:
X*( 1) =     0.909     X*( 2) =     0.033
IZNOSI OGRANIČENJA:
G*( 1) =     0.000     G*( 2) =    -2.000

FUNKCIJA TROŠKOVA ......................... F*  =    115.028
NAJVEĆE PREKORAČENJE OGRANIČENJA ........... V   =  0.828D-04
POMAK U SMJERU PRETRAŽIVANJA ............... DN  =  0.946D-03
GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE ............. LGN =  0.385D+02

BROJ DJELATNIH OGRANIČENJA U OPTIMUMU ...... NAC =          1
LAGRANGEOVI MNOŽITELJI DJELATNIH OGRANIČENJA:
U*( 1) =   227.001


BROJ ITERACIJA ............................... NIT  =      24
BROJ IZRAČUNAVANJA FUNKCIJE TROŠKOVA .......... NFE  =      81
BROJ IZRAČUNAVANJA OGRANIČENJA ................ NGE  =     107
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROŠKOVA NFGE =       0
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA OGRANIČENJA ..... NGGE =       0

VRIJEME IZRAČUNAVANJA ........................ CPUT =    0.06
```

```
ZADATAK BR. 11     KONSTRUKCIJA ZAMAŠNJAKA


BROJ VARIJABLI ...................................  N    =     3
BROJ OGRANIČENJA .................................  M    =     2
BROJ RUBNIH OGRANIČENJA ..........................  MB   =     6
IZRAČUNAVANJE GRADIJENTA .........................  ANALITIČKO
POČETNO RJEŠENJE .................................  NEIZVEDIVO


POČETNI VEKTOR RJEŠENJA:
X0( 1) =    22.300     X0( 2) =     0.500     X0( 3) =   125.000

POČETNA FUNKCIJA TROŠKOVA ..................  F0   =      -3.883
NAJVEĆE POČETNO PREKORAČENJE OGRANIČENJA ...  V0   =   0.854D+00


REZULTATI


DOJAVNIK STANJA OBRADE .....................   INFO =          0

VEKTOR RJEŠENJA:
X*( 1) =    18.595     X*( 2) =     1.952     X*( 3) =   110.079
IZNOSI OGRANIČENJA:
G*( 1) =     0.000     G*( 2) =     0.000

FUNKCIJA TROŠKOVA ..........................  F*   =      -5.685
NAJVEĆE PREKORAČENJE OGRANIČENJA ...........  V    =   0.185D-04
POMAK U SMJERU PRETRAŽIVANJA ...............  DN   =   0.465D-02
GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE .............  LGN  =   0.119D+00

BROJ DJELATNIH OGRANIČENJA U OPTIMUMU ......  NAC  =           2
LAGRANGEOVI MNOŽITELJI DJELATNIH OGRANIČENJA:
U*( 1) =    13.483     U*( 2) =    18.598


BROJ ITERACIJA ...............................  NIT  =         7
BROJ IZRAČUNAVANJA FUNKCIJE TROŠKOVA ..........  NFE  =        10
BROJ IZRAČUNAVANJA OGRANIČENJA ................  NGE  =        20
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROŠKOVA   NFGE =         7
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA OGRANIČENJA .....  NGGE =        10

VRIJEME IZRAČUNAVANJA .........................  CPUT =      0.01
```

```
ZADATAK BR. 12    ZADATAK KONSTRUKCIJE VRTLOGA


BROJ VARIJABLI ...................................  N   =    3
BROJ OGRANIČENJA .................................  M   =    1
BROJ RUBNIH OGRANIČENJA ..........................  MB  =    4
IZRAČUNAVANJE GRADIJENTA .........................  NUMERIČKO
POČETNO RJEŠENJE .................................  NEIZVEDIVO


POČETNI VEKTOR RJEŠENJA:
X0( 1) =     0.100     X0( 2) =    18.000     X0( 3) =   144.000

POČETNA FUNKCIJA TROŠKOVA ..................  F0  =      30.986
NAJVEĆE POČETNO PREKORAČENJE OGRANIČENJA ...  V0  =   0.352D-01



REZULTATI


DOJAVNIK STANJA OBRADE ....................    INFO =          0

VEKTOR RJEŠENJA:
X*( 1) =     0.044     X*( 2) =    24.000     X*( 3) =    85.608
IZNOSI OGRANIČENJA:
G*( 1) =     0.000

FUNKCIJA TROŠKOVA ..........................  F*  =      36.971
NAJVEĆE PREKORAČENJE OGRANIČENJA ...........  V   =   0.306D-09
POMAK U SMJERU PRETRAŽIVANJA ...............  DN  =   0.832D-04
GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE .............  LGN =   0.943D+02

BROJ DJELATNIH OGRANIČENJA U OPTIMUMU ......  NAC =           3
LAGRANGEOVI MNOŽITELJI DJELATNIH OGRANIČENJA:
U*( 1) =   -47.135     U*( 3) =    21.500     U*( 5) =     2.158


BROJ ITERACIJA ..............................   NIT  =         3
BROJ IZRAČUNAVANJA FUNKCIJE TROŠKOVA ..........   NFE  =        13
BROJ IZRAČUNAVANJA OGRANIČENJA ................   NGE  =        13
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROŠKOVA   NFGE =         0
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA OGRANIČENJA .....   NGGE =         0

VRIJEME IZRAČUNAVANJA .......................   CPUT =      0.01
```

```
ZADATAK BR. 13    ZADATAK ZAVARENE GREDE


BROJ VARIJABLI ................................... N   =    4
BROJ OGRANIČENJA ................................. M   =    5
BROJ RUBNIH OGRANIČENJA .......................... MB  =    3
IZRAČUNAVANJE GRADIJENTA ......................... NUMERIČKO
POČETNO RJEŠENJE ................................. IZVEDIVO

POČETNI VEKTOR RJEŠENJA:
X0( 1) =     1.000     X0( 2) =     7.000     X0( 3) =     8.000
X0( 4) =     1.000

POČETNA FUNKCIJA TROŠKOVA ................. F0  =      15.815
NAJVEĆE POČETNO PREKORAČENJE OGRANIČENJA ... V0  =   0.000D+00


REZULTATI


DOJAVNIK STANJA OBRADE ....................  INFO =           0

VEKTOR RJEŠENJA:
X*( 1) =     0.244     X*( 2) =     6.219     X*( 3) =     8.291
X*( 4) =     0.244
IZNOSI OGRANIČENJA:
G*( 1) =     0.000     G*( 2) =     0.000     G*( 3) =     0.000
G*( 4) =     0.000     G*( 5) =    -0.937

FUNKCIJA TROŠKOVA ......................... F*  =       2.381
NAJVEĆE PREKORAČENJE OGRANIČENJA ........... V   =   0.897D-06
POMAK U SMJERU PRETRAŽIVANJA ............... DN  =   0.651D-03
GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE ............. LGN =   0.371D-02

BROJ DJELATNIH OGRANIČENJA U OPTIMUMU ...... NAC =           4
LAGRANGEOVI MNOŽITELJI DJELATNIH OGRANIČENJA:
U*( 1) =     3.449     U*( 2) =     6.038     U*( 3) =     0.936
U*( 4) =     4.786


BROJ ITERACIJA .............................. NIT  =       14
BROJ IZRAČUNAVANJA FUNKCIJE TROŠKOVA ........ NFE  =       73
BROJ IZRAČUNAVANJA OGRANIČENJA .............. NGE  =      201
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROŠKOVA NFGE =      0
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA OGRANIČENJA ..... NGGE =      0

VRIJEME IZRAČUNAVANJA ....................... CPUT =     0.03
```

```
ZADATAK BR. 14    OPTIMALNI PRIJENOSNI OMJERI MJENJAČA


BROJ VARIJABLI ...................................  N   =    5
BROJ OGRANIČENJA .................................  M   =    4
BROJ RUBNIH OGRANIČENJA ..........................  MB  =    3
IZRAČUNAVANJE GRADIJENTA .........................  NUMERIČKO
POČETNO RJEŠENJE .................................  IZVEDIVO

POČETNI VEKTOR RJEŠENJA:
X0( 1) =    15.000     X0( 2) =     9.050     X0( 3) =     6.140
X0( 4) =     4.550     X0( 5) =     3.610

POČETNA FUNKCIJA TROŠKOVA .................  F0  =       0.271
NAJVEĆE POČETNO PREKORAČENJE OGRANIČENJA ...  V0  =   0.000D+00



REZULTATI


DOJAVNIK STANJA OBRADE ....................   INFO =          0

VEKTOR RJEŠENJA:
X*( 1) =    15.000     X*( 2) =     9.050     X*( 3) =     5.763
X*( 4) =     4.395     X*( 5) =     3.871
IZNOSI OGRANIČENJA:
G*( 1) =    -5.950     G*( 2) =    -3.287     G*( 3) =    -1.368
G*( 4) =    -0.524

FUNKCIJA TROŠKOVA .........................  F*  =       0.262
NAJVEĆE PREKORAČENJE OGRANIČENJA ..........  V   =   0.000D+00
POMAK U SMJERU PRETRAŽIVANJA ..............  DN  =   0.284D-02
GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE ............  LGN =   0.455D-01

BROJ DJELATNIH OGRANIČENJA U OPTIMUMU ......  NAC =           0


BROJ ITERACIJA ...............................  NIT  =       4
BROJ IZRAČUNAVANJA FUNKCIJE TROŠKOVA ..........  NFE  =      87
BROJ IZRAČUNAVANJA OGRANIČENJA ................  NGE  =      20
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROŠKOVA  NFGE =       0
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA OGRANIČENJA .....  NGGE =       0

VRIJEME IZRAČUNAVANJA ........................  CPUT =    0.41
```

```
ZADATAK BR. 15    SINTEZA MEHANIZMA


BROJ VARIJABLI ................................... N   =    6
BROJ OGRANIČENJA ................................. M   =    4
BROJ RUBNIH OGRANIČENJA .......................... MB  =    6
IZRAČUNAVANJE GRADIJENTA ......................... NUMERIČKO
POČETNO RJEŠENJE ................................. IZVEDIVO

POČETNI VEKTOR RJEŠENJA:
X0( 1) =     1.000    X0( 2) =     4.500    X0( 3) =     4.000
X0( 4) =     5.000    X0( 5) =     3.000    X0( 6) =     3.000

POČETNA FUNKCIJA TROŠKOVA .................. F0  =      2.309
NAJVEĆE POČETNO PREKORAČENJE OGRANIČENJA ... V0  =  0.000D+00


REZULTATI


DOJAVNIK STANJA OBRADE .....................  INFO =         0

VEKTOR RJEŠENJA:
X*( 1) =     0.996    X*( 2) =     4.221    X*( 3) =     3.037
X*( 4) =     3.981    X*( 5) =     1.668    X*( 6) =     1.234
IZNOSI OGRANIČENJA:
G*( 1) =    -2.280    G*( 2) =    -1.801    G*( 3) =     0.000
G*( 4) =   -20.394

FUNKCIJA TROŠKOVA .......................... F*  =      0.061
NAJVEĆE PREKORAČENJE OGRANIČENJA ........... V   =  0.377D-03
POMAK U SMJERU PRETRAŽIVANJA ............... DN  =  0.977D-02
GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE ............. LGN =  0.175D+00

BROJ DJELATNIH OGRANIČENJA U OPTIMUMU ...... NAC =          1
LAGRANGEOVI MNOŽITELJI DJELATNIH OGRANIČENJA:
U*( 3) =     0.119


BROJ ITERACIJA ............................... NIT  =      15
BROJ IZRAČUNAVANJA FUNKCIJE TROŠKOVA ......... NFE  =     121
BROJ IZRAČUNAVANJA OGRANIČENJA ............... NGE  =     152
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROŠKOVA   NFGE =       0
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA OGRANIČENJA ..... NGGE =       0

VRIJEME IZRAČUNAVANJA ........................ CPUT =    0.05
```

```
ZADATAK BR. 16    OPTIMIRANJE PROCESA ALKILACIJE


BROJ VARIJABLI ..................................  N   =   7
BROJ OGRANIČENJA ................................  M   =  14
BROJ RUBNIH OGRANIČENJA .........................  MB  =  14
IZRAČUNAVANJE GRADIJENTA ........................  NUMERIČKO
POČETNO RJEŠENJE ................................  IZVEDIVO

POČETNI VEKTOR RJEŠENJA:
X0( 1) =  1745.000     X0( 2) =   110.000     X0( 3) =  3048.000
X0( 4) =    89.000     X0( 5) =    92.800     X0( 6) =     8.000
X0( 7) =   145.000

POČETNA FUNKCIJA TROŠKOVA .................  F0  =    2125.660
NAJVEĆE POČETNO PREKORAČENJE OGRANIČENJA ...  V0  =  0.000D+00


REZULTATI


DOJAVNIK STANJA OBRADE ....................  INFO =          0

VEKTOR RJEŠENJA:
X*( 1) =  1698.187     X*( 2) =    53.663     X*( 3) =  3031.301
X*( 4) =    90.110     X*( 5) =    95.000     X*( 6) =    10.500
X*( 7) =   153.535
IZNOSI OGRANIČENJA:
G*( 1) =     0.000     G*( 2) =    -0.020     G*( 3) =     0.000
G*( 4) =    -0.020     G*( 5) =    -0.009     G*( 6) =     0.000
G*( 7) =     0.000     G*( 8) =    -0.023     G*( 9) =     0.000
G*(10) =    -0.541     G*(11) =    -0.612     G*(12) =    -0.018
G*(13) =    -0.011     G*(14) =    -9.321

FUNKCIJA TROŠKOVA .........................  F*  =    1227.222
NAJVEĆE PREKORAČENJE OGRANIČENJA ..........  V   =  0.938D-06
POMAK U SMJERU PRETRAŽIVANJA ..............  DN  =  0.182D-02
GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE ............  LGN =  0.910D+01

BROJ DJELATNIH OGRANIČENJA U OPTIMUMU ......  NAC =          6
LAGRANGEOVI MNOŽITELJI DJELATNIH OGRANIČENJA:
U*( 1) =  2920.885     U*( 3) = 22174.838     U*( 6) = 12212.714
U*( 7) = 22180.754     U*( 9) =  3641.416     U*(24) = 16291.399


BROJ ITERACIJA ..............................  NIT  =        7
BROJ IZRAČUNAVANJA FUNKCIJE TROŠKOVA ........  NFE  =       57
BROJ IZRAČUNAVANJA OGRANIČENJA ..............  NGE  =      540
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROŠKOVA  NFGE =        0
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA OGRANIČENJA .....  NGGE =        0

VRIJEME IZRAČUNAVANJA .......................  CPUT =     0.04
```

ZADATAK BR. 17 OPTIMIRANJE TOKARILICE

```
BROJ VARIJABLI ..................................  N   =   10
BROJ OGRANIČENJA ................................  M   =   15
BROJ RUBNIH OGRANIČENJA .........................  MB  =   20
IZRAČUNAVANJE GRADIJENTA ........................  ANALITIČKO
POČETNO RJEŠENJE ................................  IZVEDIVO

POČETNI VEKTOR RJEŠENJA:
X0( 1) =    10.000    X0( 2) =     0.005    X0( 3) =     0.008
X0( 4) =   100.000    X0( 5) =     0.002    X0( 6) =     0.001
X0( 7) =     0.003    X0( 8) =     0.002    X0( 9) =     0.150
X0(10) =     0.105

POČETNA FUNKCIJA TROŠKOVA ..................  F0  =   -2931.470
NAJVEĆE POČETNO PREKORAČENJE OGRANIČENJA ...  V0  =   0.000D+00


REZULTATI


DOJAVNIK STANJA OBRADE ....................  INFO =          8

VEKTOR RJEŠENJA:
X*( 1) =     0.147    X*( 2) =     0.100    X*( 3) =     0.008
X*( 4) =   628.717    X*( 5) =     0.002    X*( 6) =     0.001
X*( 7) =     0.002    X*( 8) =     0.001    X*( 9) =     0.157
X*(10) =     0.098
IZNOSI OGRANIČENJA:
G*( 1) =     0.000    G*( 2) =     0.000    G*( 3) =     0.000
G*( 4) =     0.000    G*( 5) =    -0.010    G*( 6) =     0.000
G*( 7) =  -999.953    G*( 8) =  -999.479    G*( 9) =  -999.935
G*(10) =  -965.900    G*(11) =  -999.147    G*(12) =  -994.404
G*(13) =  -973.474    G*(14) =  -999.836    G*(15) =     0.000

FUNKCIJA TROŠKOVA .........................  F*  =   -4430.088
NAJVEĆE PREKORAČENJE OGRANIČENJA ..........  V   =   0.755D-12
POMAK U SMJERU PRETRAŽIVANJA ..............  DN  =   0.467D-05
GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE ............  LGN =   0.600D+01

BROJ DJELATNIH OGRANIČENJA U OPTIMUMU ......  NAC =           9
LAGRANGEOVI MNOŽITELJI DJELATNIH OGRANIČENJA:
U*( 1) =     2.999    U*( 2) =  2016.945    U*( 3) =   175.130
U*( 4) =   121.726    U*( 6) =    12.110    U*(15) =    24.905
U*(19) =    11.542    U*(21) =     5.588    U*(25) =     0.135


BROJ ITERACIJA ..............................  NIT  =      13
BROJ IZRAČUNAVANJA FUNKCIJE TROŠKOVA ..........  NFE  =      14
BROJ IZRAČUNAVANJA OGRANIČENJA ................  NGE  =     201
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROŠKOVA  NFGE =      13
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA OGRANIČENJA .....  NGGE =      61
VRIJEME IZRAČUNAVANJA .........................  CPUT =    0.06
```

```
ZADATAK BR. 18    PRORAČUN KEMIJSKE RAVNOTEŽE


BROJ VARIJABLI ..................................  N   =   12
BROJ OGRANIČENJA ................................  M   =    3
BROJ RUBNIH OGRANIČENJA .........................  MB  =   24
IZRAČUNAVANJE GRADIJENTA ........................  ANALITIČKO
POČETNO RJEŠENJE ................................  NEIZVEDIVO


POČETNI VEKTOR RJEŠENJA:
X0( 1) =     4.000     X0( 2) =     4.000     X0( 3) =     4.000
X0( 4) =     4.000     X0( 5) =     4.000     X0( 6) =     4.000
X0( 7) =     4.000     X0( 8) =     4.000     X0( 9) =     4.000
X0(10) =     4.000     X0(11) =     4.000     X0(12) =     4.000

POČETNA FUNKCIJA TROŠKOVA .................  F0  =       0.228
NAJVEĆE POČETNO PREKORAČENJE OGRANIČENJA ...  V0  =   0.757D+00


REZULTATI


DOJAVNIK STANJA OBRADE ....................  INFO =          0

VEKTOR RJEŠENJA:
X*( 1) =     3.366     X*( 2) =     4.109     X*( 3) =     4.399
X*( 4) =     2.960     X*( 5) =     3.081     X*( 6) =     1.382
X*( 7) =     4.824     X*( 8) =     2.902     X*( 9) =     3.276
X*(10) =     3.858     X*(11) =     4.004     X*(12) =     6.725
IZNOSI OGRANIČENJA:
G*( 1) =    -0.238     G*( 2) =     0.000     G*( 3) =     0.000

FUNKCIJA TROŠKOVA .........................  F*  =       3.175
NAJVEĆE PREKORAČENJE OGRANIČENJA ..........  V   =   0.208D-04
POMAK U SMJERU PRETRAŽIVANJA ...............  DN  =   0.419D+00
GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE ............  LGN =   0.544D-02

BROJ DJELATNIH OGRANIČENJA U OPTIMUMU ......  NAC =           2
LAGRANGEOVI MNOŽITELJI DJELATNIH OGRANIČENJA:
U*( 2) =     4.551     U*( 3) =     2.401


BROJ ITERACIJA ..............................  NIT  =      19
BROJ IZRAČUNAVANJA FUNKCIJE TROŠKOVA ..........  NFE  =      21
BROJ IZRAČUNAVANJA OGRANIČENJA ................  NGE  =     105
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROŠKOVA   NFGE =      19
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA OGRANIČENJA .....  NGGE =      38

VRIJEME IZRAČUNAVANJA .......................  CPUT =    0.06
```

ZADATAK BR. 19 ZADATAK PROIZVODNJE ZEMNOGA PLINA

```
BROJ VARIJABLI ................................... N  =  48
BROJ OGRANIČENJA ................................. M  =   3
BROJ RUBNIH OGRANIČENJA .......................... MB =  72
IZRAČUNAVANJE GRADIJENTA ......................... NUMERIČKO
POČETNO RJEŠENJE ................................. IZVEDIVO

POČETNI VEKTOR RJEŠENJA:
X0( 1) =     1.000     X0( 2) =     1.000     X0( 3) =     1.000
X0( 4) =     1.000     X0( 5) =     1.000     X0( 6) =     1.000
X0( 7) =     1.000     X0( 8) =     1.000     X0( 9) =     1.000
X0(10) =     1.000     X0(11) =     1.000     X0(12) =     1.000
X0(13) =     1.000     X0(14) =     1.000     X0(15) =     1.000
X0(16) =     1.000     X0(17) =     1.000     X0(18) =     1.000
X0(19) =     1.000     X0(20) =     1.000     X0(21) =     1.000
X0(22) =     1.000     X0(23) =     1.000     X0(24) =     1.000
X0(25) =     1.300     X0(26) =     1.300     X0(27) =     1.300
X0(28) =     1.300     X0(29) =     1.300     X0(30) =     1.300
X0(31) =     1.000     X0(32) =     1.000     X0(33) =     1.000
X0(34) =     1.000     X0(35) =     1.000     X0(36) =     1.000
X0(37) =     1.000     X0(38) =     1.000     X0(39) =     1.000
X0(40) =     1.000     X0(41) =     1.000     X0(42) =     1.000
X0(43) =     1.000     X0(44) =     1.000     X0(45) =     1.000
X0(46) =     1.000     X0(47) =     1.000     X0(48) =     1.000

POČETNA FUNKCIJA TROŠKOVA .................. F0  =       1.862
NAJVEĆE POČETNO PREKORAČENJE OGRANIČENJA ... V0  =   0.000D+00
```

REZULTATI

```
DOJAVNIK STANJA OBRADE ....................  INFO =        16

VEKTOR RJEŠENJA:
X*( 1) =     2.000     X*( 2) =     0.002     X*( 3) =     2.000
X*( 4) =     0.004     X*( 5) =     0.005     X*( 6) =     2.000
X*( 7) =     1.920     X*( 8) =     0.002     X*( 9) =     2.000
X*(10) =     0.062     X*(11) =     0.005     X*(12) =     2.000
X*(13) =     2.000     X*(14) =     0.002     X*(15) =     2.000
X*(16) =     0.002     X*(17) =     0.002     X*(18) =     1.988
X*(19) =     2.000     X*(20) =     0.002     X*(21) =     2.000
X*(22) =     0.002     X*(23) =     0.002     X*(24) =     2.000
X*(25) =     1.014     X*(26) =     0.002     X*(27) =     1.004
X*(28) =     0.002     X*(29) =     0.002     X*(30) =     0.997
X*(31) =     1.113     X*(32) =     0.002     X*(33) =     1.101
X*(34) =     0.024     X*(35) =     0.002     X*(36) =     1.101
X*(37) =     0.923     X*(38) =     0.934     X*(39) =     0.928
X*(40) =     0.913     X*(41) =     0.903     X*(42) =     0.891
X*(43) =     1.196     X*(44) =     0.002     X*(45) =     1.122
X*(46) =     0.002     X*(47) =     0.002     X*(48) =     1.113
IZNOSI OGRANIČENJA:
G*( 1) =     0.000     G*( 2) =     0.000     G*( 3) =     0.000

FUNKCIJA TROŠKOVA .........................  F*  =      0.863
NAJVEĆE PREKORAČENJE OGRANIČENJA ...........  V   =  0.603D-05
POMAK U SMJERU PRETRAŽIVANJA ...............  DN  =  0.935D-02
GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE .............  LGN =  0.137D+01

BROJ DJELATNIH OGRANIČENJA U OPTIMUMU ......  NAC =         28
LAGRANGEOVI MNOŽITELJI DJELATNIH OGRANIČENJA:
U*( 1) =    -0.673     U*( 2) =     0.138     U*( 3) =     1.001
U*( 5) =     0.042     U*( 6) =     0.016     U*( 9) =     0.059
U*(15) =     0.062     U*(18) =     0.016     U*(21) =     0.011
U*(27) =     0.017     U*(29) =     0.004     U*(30) =     0.040
U*(34) =     0.040     U*(36) =     0.040     U*(41) =     0.044
U*(42) =     0.040     U*(45) =     0.038     U*(46) =     0.040
U*(48) =     0.040     U*(51) =     0.038     U*(54) =     0.001
U*(58) =     0.002     U*(60) =     0.001     U*(66) =     0.001
U*(72) =     0.001     U*(90) =     0.100     U*(94) =     0.100
U*(96) =     0.100


BROJ ITERACIJA ................................  NIT  =     97
BROJ IZRAČUNAVANJA FUNKCIJE TROŠKOVA ..........  NFE  =   4755
BROJ IZRAČUNAVANJA OGRANIČENJA ................  NGE  =   4918
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROŠKOVA  NFGE =      0
BROJ IZRAČUNAVANJA GRADIJENTA OGRANIČENJA .....  NGGE =      0

VRIJEME IZRAČUNAVANJA .........................  CPUT =   2.43
```

PRILOG B:

USPOREDBA REZULTATA PROGRAMA *RQPOPT v2* S REZULTATIMA PROGRAMA DRUGIH AUTORA

Ovaj prilog sadrži usporedbu rezultata ostvarenih programom *RQPOPT v2*, u izvedbi s *GCA* aproksimacijom, i rezultata programa drugih autora. U usporedbu su uključeni svi dostupni i raspoloživi rezultati programa za optimiranje utemeljenih na uzastopnom kvadratnom programiranju.

VFO2AD je poznati program Michaela J.D. Powella, utemeljen na Hanovoj postavci postupka optimiranja uzastopnim kvadratnim programiranjem [102]. Drukčiju postavku uzastopnoga kvadratnoga programiranja, utemeljenu na jednakosnim ograničenjima i klasičnim kaznenim funkcijama, zastupa program *OPRQP* autora Bartholomew-Biggsa [102]. *DONLP2* je program Petera Spelluccija sa Tehničkoga sveučilišta u Darmstadtu. Program koristi automatsko diferenciranje na razini izvornoga oblika programa i dostupan je preko Interneta [104, 105]. Čuveni program Klausa Schittkowskoga *NLPQL* [56, 97], utemeljen na Hanovoj i Powellovoj postavci postupka uzastopnoga kvadratnoga programiranja, dostupan je i u IMSL biblioteci pod nazivom *DNCONG* [103]. *NPSOL* je program uzastopnoga kvadratnoga programiranja razvijen na Sveučilištu Stanford (Gill, Murray, Saunders i Wright) [106] koji je dostupan i u NAG biblioteci pod nazivom *E04UCF*, dok je *FSQP* djelo skupine istraživača sa Sveučilišta Maryland (Panier, Tits i Zhou) [106]. Konačno, *RQOPT* autora Beltraccija i Gabrielea [48] je program utemeljen na pristupu Pšeničnoga.

U priloženim tablicama dojavnik stanja obrade **`INFO`** ima sljedeća značenja:

- **`INFO = 0`** Postignut optimum (zadovoljeni uvjeti zaustavljanja)
- **`INFO = 2`** Neuspjeh rješavanja (divergencija ili nemogućnost pronalaženja povoljnijega rješenja)

Ostale oznake jednake su onima opisanima uz rezultate, tablice IV., V. i VI., stranica 46.

Prilikom uspoređivanja rezultata trebalo bi voditi računa o sljedećim ograničenjima:

- Različiti programi rabe različite uvjete zaustavljanja. *RQPOPT v2* primjenjuje inženjerske, labave uvjete $\varepsilon_{\mathrm{d}} = \varepsilon_{\mathrm{v}} = 10^{-2}$. S druge strane, većina uspoređivanih programa rabi matematičke, krute uvjete, npr. kod *NLPQL* je $\varepsilon = 10^{-8}$.
- Prekoračenje ograničenja u optimumu **DGX** ima različito značenje kod različitih programa. Kod *RQPOPT v2* je to najveće prekoračenje ograničenja, dok je kod većine ostalih to zbroj prekoračenja svih ograničenja. Štoviše, kod *RQOPT* se prekoračenju ograničenja pribraja relativno odstupanje funkcije troškova [48]. Isto tako, kod *RQPOPT v2* su ograničenja, ako je to bilo moguće, normirana svojim graničnim iznosom [36], tako da izravna usporedba **DGX** nije moguća.
- Rezultati za programe *DONLP2*, *NPSOL* i *FSQP* dobiveni su pomoću Spelluccijeva ispitnoga okruženja [105]. Kako ono uključuje automatsku diferencijaciju funkcija na razini izvornoga oblika programa [107], izravna usporedba djelotvornosti s programima *RQPOPT*, *VF02AD*, *OPRQP*, *NLPQL* i *RQOPT* nije moguća. Kako bi se ona ipak omogućila, pokazatelje izračunavanja gradijenta kod zadataka br. 8, 10, 12-16 i 19 sam sveo na odgovarajući broj izračunavanja funkcija. Svođenje sam izvršio na način da sam svaki gradijent računao kao n izračunavanja funkcija, pri čemu je n broj varijabli u zadatku optimiranja. Preračunavanje izračunavanja gradijenta sam iz slična razloga izvršio i kod rezultata programa *RQOPT*.

Tablica B.I. Zadatak br. 1 – Konstrukcija transformatora

PROGRAM	NFE	NGE	NFGE	NGGE	F	DGX	INFO
RQPOPT	19	58	9	18	135.076	5.6E-07	0
VF02AD	18	36	18	36	135.076	1.3E-09	0
OPRQP	18	36	10	20	-605837.	3.2E-01	2
DONLP2	13	46	11	22	135.076	4.4E-16	0
NLPQL	16	32	13	26	135.076	3.2E-13	0
NPSOL	13	26	13	26	135.08	1.8E-09	0
FSQP	19	77	16	32	135.076	0.0E+00	0

Tablica B.II. Zadatak br. 2 – Optimalna konstrukcija reaktora

PROGRAM	NFE	NGE	NFGE	NGGE	F	DGX	INFO
RQPOPT	11	66	10	39	3.95116	3.8E-07	0
VF02AD	19	114	19	114	3.95116	4.7E-10	0
OPRQP	32	192	28	168	3.95116	1.7E-06	0
DONLP2	29	210	16	66	3.95116	8.5E-15	0
NLPQL	19	114	18	74	3.95116	4.4E-09	0
NPSOL	18	108	18	108	3.9512	7.4E-10	0
FSQP	41	334	24	162	3.95116	0.0E+00	0
RQOPT	350	1400	20	80	3.95116	6.3E-07	0

Tablica B.III. Zadatak br. 3 – Konstrukcija izmjenjivača topline

PROGRAM	NFE	NGE	NFGE	NGGE	F	DGX	INFO
RQPOPT	293	1279	2	79	7048.84	6.0E-04	0
VF02AD	44	264	44	264	7049.24	8.0E-05	0
OPRQP	423	2538	201	1206	4360.61	1.3E+03	2
DONLP2	66	610	33	153	7049.25	0.0E+00	0
NLPQL	81	486	71	321	7049.25	0.2E-11	0
NPSOL	25	150	25	150	7049.2	5.0E-09	0
FSQP	995	33318	995	6000	10228.4	0.0E+00	0
RQOPT	289	8363	1	420	7049.34	1.4E-05	0

Tablica B.IV. Zadatak br. 4 – Raspored statičke snage

PROGRAM	NFE	NGE	NFGE	NGGE	F	DGX	INFO
RQPOPT	61	722	45	276	5055.01	1.1E-05	0
VF02AD	7	42	7	42	5055.01	6.0E-07	0
OPRQP	28	168	24	144	5054.92	2.1E-05	0
DONLP2	16	135	9	60	5055.01	2.3E-15	0
NLPQL	122	732	34	204	5055.01	5.3E-12	0
NPSOL	18	108	18	108	5055.0	1.1E-15	0
FSQP	18	213	16	96	5055.01	4.8E-11	0

Tablica B.V. Zadatak br. 5 – Kemijska ravnoteža

PROGRAM	NFE	NGE	NFGE	NGGE	F	DGX	INFO
RQPOPT	20	6	19	6	-47.7607	5.2E-17	0
VF02AD	11	33	11	33	-47.5970	3.0E-10	0
OPRQP	2249	6747	201	603	-47.7117	7.2E-06	0
DONLP2	43	151	24	3	-47.7607	0.0E+00	0
NLPQL	50	150	29	87	-47.7607	3.3E-16	0
NPSOL	34	102	34	102	-47.761	0.0E+00	0
FSQP	107	433	38	114	-47.7607	2.5E-14	0

Tablica B.VI. Zadatak br. 6 – Proces alkilacije

PROGRAM	NFE	NGE	NFGE	NGGE	F	DGX	INFO
RQPOPT	63	658	41	183	-1768.81	3.8E-03	0
VF02AD	33	363	33	363	-1768.81	5.9E-07	0
OPRQP	379	4169	201	2211	-1560.52	5.4E-06	0
DONLP2	51	836	35	105	-1768.81	2.5E-11	0
NLPQL	37	407	33	230	-1768.81	1.9E-15	0
NPSOL	17	187	17	51	-1768.8	1.6E-12	0
FSQP	247	3230	117	1287	-2399.33	4.9E+01	2

Tablica B.VII. Zadatak br. 7 – 3-stupno membransko separiranje

PROGRAM	NFE	NGE	NFGE	NGGE	F	DGX	INFO
RQPOPT	2	884	2	259	97.5875	8.7E-07	0
VF02AD	15	225	15	225	181.977	1.0E+00	2
OPRQP	29	435	18	270	177.252	2.7E-02	2
DONLP2	70	1600	40	412	0.97588	1.2E-10	0
NLPQL	23	345	21	217	0.97588	2.6E-06	0
NPSOL	18	270	18	270	0.97591	1.0E-09	0
FSQP	172	5660	158	2475	0.97588	0.0E+00	0

Tablica B.VIII. Zadatak br. 8 – Zupčasti prijenosnik najmanje tromosti

PROGRAM	NFE	NGE	NFGE	NGGE	F	DGX	INFO
RQPOPT	12	0	11	0	1.74415	0.0E+00	0
DONLP2	22	0	10	0	1.74415	0.0E+00	0
NLPQL	11	0	11	0	1.74415	0.0E+00	0
NPSOL	14	0	14	0	1.7442	0.0E+00	0
FSQP	14	0	14	0	1.74415	0.0E+00	0
RQOPT	69	0	10	0	1.74415	0.0E+00	0

Tablica B.IX. Zadatak br. 9 – Konstrukcija kliznoga ležaja

PROGRAM	NFE	NGE	NFGE	NGGE	F	DGX	INFO
RQPOPT	6	10	5	9	1.62058	2.3E-06	0
DONLP2	13	18	11	11	1.62058	0.0E+00	0
NLPQL	10	10	10	10	1.62058	0.3E-09	0
NPSOL	21	21	21	21	1.6206	3.0E-11	0
FSQP	48	51	31	32	1.62058	0.0E+00	0
RQOPT	50	50	10	10	1.62058	0.0E+00	0

Tablica B.X. Zadatak br. 10 – Zadatak konstrukcije grebena

PROGRAM	NFE	NGE	NFGE	NGGE	F	DGX	INFO
RQPOPT	81	107	0	0	115.028	8.3E-05	0
DONLP2	46	118	0	0	29.4598	0.0E+00	0
NLPQL	164	254	0	0	114.950	0.2E-07	0
NPSOL	27	81	0	0	29.460	0.0E+00	0
FSQP	24	85	0	0	29.4598	0.0E+00	0

Tablica B.XI. Zadatak br. 11 – Konstrukcija zamašnjaka

PROGRAM	NFE	NGE	NFGE	NGGE	F	DGX	INFO
RQPOPT	10	20	7	10	-5.68489	1.9E-05	0
DONLP2	27	65	10	15	-5.68478	0.0E+00	0
NLPQL	5	10	5	10	-5.68478	0.3E-12	0
NPSOL	9	18	9	18	-5.6848	2.8E-13	0
FSQP	15	77	15	38	-5.68478	0.0E+00	0
RQOPT	36	68	5	9	-5.68466	2.2E-05	0

Tablica B.XII. Zadatak br. 12 – Zadatak konstrukcije vrtloga

PROGRAM	NFE	NGE	NFGE	NGGE	F	DGX	INFO
RQPOPT	13	13	0	0	36.9708	3.1E-10	0
DONLP2	129	277	0	0	36.9708	9.1E-13	0
NLPQL	76	76	0	0	36.9708	0.2E-10	0
NPSOL	44	88	0	0	36.971	9.1E-13	0
FSQP	92	204	0	0	36.9708	9.8E-07	0
RQOPT	1463	1463	0	0	27.3059	9.5E-06	0

Tablica B.XIII. Zadatak br. 13 – Zadatak zavarene grede

PROGRAM	NFE	NGE	NFGE	NGGE	F	DGX	INFO
RQPOPT	73	201	0	0	2.38116	9.0E-07	0
DONLP2	139	444	0	0	2.38116	9.1E-17	0
NLPQL	55	203	0	0	2.38116	0.8E-15	0
NPSOL	105	525	0	0	2.3812	1.0E-08	0
FSQP	112	646	0	0	2.38116	0.0E+00	0
RQOPT	195	574	0	0	2.38116	1.6E-07	0

Tablica B.XIV. Zadatak br. 14 – Optimalni prijenosni omjeri mjenjača

PROGRAM	NFE	NGE	NFGE	NGGE	F	DGX	INFO
RQPOPT	87	20	0	0	0.26180	0.0E+00	0
DONLP2	105	380	0	0	0.26223	0.0E+00	0
NLPQL	6	24	0	0	0.27080	0.0E+00	0
NPSOL	222	888	0	0	0.2615	0.0E+00	0
FSQP	204	287	0	0	0.26201	0.0E+00	0

Tablica B.XV. Zadatak br. 15 – Sinteza mehanizma

PROGRAM	NFE	NGE	NFGE	NGGE	F	DGX	INFO
RQPOPT	121	152	0	0	0.06068	3.8E-04	0
DONLP2	208	306	0	0	0.06060	0.0E+00	0
NLPQL	186	222	0	0	0.06060	0.1E-04	0
NPSOL	231	928	0	0	0.06060	1.4E-10	0
FSQP	388	1267	0	0	0.06060	0.0E+00	0
RQOPT	1179	1426	0	0	0.06067	1.2E-03	0

Tablica B.XVI. Zadatak br. 16 – Optimiranje procesa alkilacije

PROGRAM	NFE	NGE	NFGE	NGGE	F	DGX	INFO
RQPOPT	57	540	0	0	1227.22	9.4E-07	0
DONLP2	163	1628	0	0	1227.23	4.0E-08	0
NLPQL	209	1162	0	0	1227.23	0.8E-13	0
NPSOL	88	1232	0	0	1227.2	2.7E-12	0
FSQP	8008	136511	0	0	1351.63	0.0E+00	0
RQOPT	980	5398	0	0	1227.15	5.8E-05	0

Tablica B.XVII. Zadatak br. 17 – Optimiranje tokarilice

PROGRAM	NFE	NGE	NFGE	NGGE	F	DGX	INFO
RQPOPT	14	201	13	61	-4430.09	7.6E-13	0
DONLP2	80	1330	26	34	-4318.03	3.3E-05	0
NLPQL	23	345	23	112	-4430.09	3.3E-11	0
NPSOL	1593	23895	1593	23895	-4430.1	6.1E-03	0
FSQP	30	868	28	420	-4430.09	1.5E-11	0

Tablica B.XVIII. Zadatak br. 18 – Proračun kemijske ravnoteže

PROGRAM	NFE	NGE	NFGE	NGGE	F	DGX	INFO
RQPOPT	21	105	19	38	3.17545	2.1E-05	0
DONLP2	390	1534	132	381	3.16832	3.6E-08	0
NLPQL	605	1815	343	985	3.16832	0.0E+00	0
NPSOL	308	924	308	924	3.1682	0.0E+00	0
FSQP	8580	8673	998	3000	3.16893	0.0E+00	0
RQOPT	225	459	9	18	3.17951	3.4E-03	0

Tablica B.XIX. Zadatak br. 19 – Zadatak proizvodnje zemnoga plina

PROGRAM	NFE	NGE	NFGE	NGGE	F	DGX	INFO
RQPOPT	4755	4918	0	0	0.86349	6.0E-06	0
DONLP2	6928	7680	0	0	0.86338	1.6E-15	0
NLPQL	4362	13086	0	0	0.86338	0.1E-06	0
NPSOL	5782	17347	0	0	0.86338	2.7E-10	0
FSQP	12156	36771	0	0	0.86338	6.7E-16	0
RQOPT	3050	3247	0	0	1.130	3.1E-01	2