

HRVATSKO DRUŠTVO ZA MEHANIKU
PODRUŽNICA OSIJEK

HDM 

HRVATSKO DRUŠTVO ZA MEHANIKU

ZAGREB - OSIJEK - RIJEKA - SL. BROD - SPLIT

ISBN 978-953-7539-22-1

8.

SUSRET
HRVATSKOG
DRUŠTVA ZA MEHANIKU

OSIJEK, 7. - 8. SRPNJA 2017. GODINE



UREDNICI: DAVORIN PENAVA, IVICA GULJAŠ, MIRJANA BOŠNJAK KLEČINA

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
GRAĐEVINSKI FAKULTET OSIJEK

ZBORNİK RADOVA OSMOG SUSRETA HRVATSKOG DRUŠTVA ZA
MEHANIKU

Urednici: Davorin Penava
Ivica Guljaš
Mirjana Bošnjak Klečina

Izdavač: Hrvatsko društvo za mehaniku

Oblikovanje: Filip Anić

Tisak: Grafika d. o. o., Osijek

Naklada: 100 kom

ISBN: 978-953-7539-22-1

CIP zapis dostupan u računalnome katalogu Nacionalne i Sveučilišne knjižnice u Zagrebu pod brojem 140716088

Modeliranje pukotina osnim betonskim elementima s ugrađenim diskontinuitetom

Šćulac, P.¹, Rukavina, T.² i Jelenić, G.³

Sažetak

Konačni elementi s ugrađenim diskontinuitetom jedan su od mogućih alata za analizu nastanka i razvoja pukotina u betonu. Pristup jakog diskontinuteta unutar kontinuuma koji je primijenjen u ovom radu temelji se na obogaćivanju neprekinutog polja pomaka dodatnim stupnjem slobode kojim se modelira skok u polju pomaka na mjestu pukotine.

Ponašanje betona u vlaku opisano je bilinearnim zakonom oštećenja: prije dosezanja vlačne čvrstoće beton se ponaša kao linearno-elastičan materijal, a nakon prekoračenja vlačne čvrstoće naprezanje u betonu smanjuje se s povećanjem širine pukotine (*softening*). Disipacija energije na mjestu diskontinuiteta uslijed otvaranja pukotine opisana je kohezivnim zakonom ponašanja.

U ovom radu prikazana su dva štapna (osna) konačna elementa s bitno različitim algoritmima za analizu oštećenja u betonu. Prvi pristup koristi *operator split* postupak za razdvajanje proračuna u lokalnu i globalnu fazu. U lokalnoj fazi rješavaju se jednadžbe razvoja unutarnjih varijabli kojima se modelira oštećenje na lokalnoj razini, dok se u globalnoj fazi rješavaju jednadžbe s ciljem određivanja globalnih stupnjeva slobode. U drugom pristupu nema razdvajanja na lokalnu i globalnu fazu. Modeli su testirani na nekoliko primjera, a u nastavku je prikazan primjer vlačnog štapa s oslabljenjem.

Ključne riječi: beton, štapni konačni element, ugrađeni diskontinuitet, oštećenje

¹ **Doc. dr. sc. Paulo Šćulac, dipl. ing. građ.**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: paulo.sculac@uniri.hr

² **Tea Rukavina, dipl. ing. građ.**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za računalno modeliranje materijala i konstrukcija, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: tea.rukavina@uniri.hr

³ **Prof. dr. sc. Gordan Jelenić, dipl. ing. građ.**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: gordan.jelenic@uniri.hr

1 Uvod

Modeliranje procesa nastajanja i razvoja pukotina složeni je proces koji se samo u iznimno pojednostavljenim slučajevima može riješiti analitički. Iako je od prve primjene numeričke metode konačnih elemenata u modeliranju raspucavanja prošlo točno 50 godina (vidjeti (1) i (2): Ngo i Scordelis, 1967. te Rashid, 1968.), ovo je područje i dalje vrlo aktivno i predmet je istraživanja mnogih istraživača. Navedeni autori ujedno su i začetnici dva bitno različita pristupa u modeliranju pukotina: prvi uključuje diskretne pukotine, dok se drugi bavi razmazanim pukotinama.

U ovom radu primijenjen je pristup jakog diskontinuiteta unutar kontinuuma koji se temelji na ugradnji jakog diskontinuiteta u konačni element na način da se neprekinuto polje pomaka konačnog elementa obogaćuje dodatnim stupnjevima slobode kojima modeliramo skok u polju pomaka na mjestu pukotine. Prednost ovog pristupa je što se njime izbjegava problem utjecaja ovisnosti veličine mreže na rezultate (koji se javlja kod modela s razmazanim pukotinama) i problem ovisnosti propagacije pukotine o rasporedu konačnih elemenata (koji se javlja kod elemenata s diskretnim pukotinama).

Cilj ovog istraživanja je razviti model za analizu pukotina u betonu i sličnim kvazikrtim materijalima koji se temelji na najjednostavnijem štapnom konačnom elementu. Kako ovdje modeliramo samo ponašanje u vlaklu, definiramo da se materijal prije dosezanja vlačne čvrstoće ponaša linearno elastično. Slom štapa opterećenog na vlak nastat će nakon prekoračenja vlačne čvrstoće u najslabijem presjeku i otvaranjem pukotine. Prema modelu kohezivnih pukotina kojeg su predložili Hillerborg i suradnici (3) naprezanja postoje na stjenkama pukotine dok god je pukotina dovoljno uska. U trenutku otvaranja pukotine naprezanja ne iščezavaju odjednom, već se smanjuju s povećanjem širine pukotine dok se ne potroši ukupna energija loma, koja ovisi o razredu betona i granulometrijskom sastavu.

U nastavku su detaljnije prikazana dva modela temeljena na istim pretpostavkama, ali s bitno različitim algoritmima rješavanja.

2 Pristup s razdvajanjem proračuna u faze

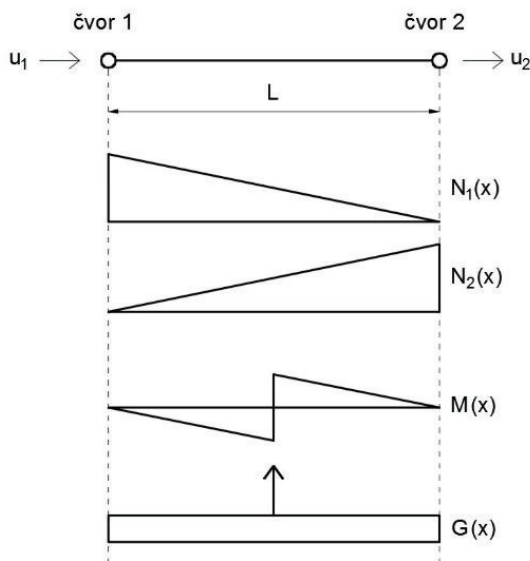
U ovom pristupu koristi se model oštećenja s omekšanjem za štapni konačni element koji je opisan u (4). Promotrimo štapni konačni element duljine L i površine A , s jednim osnim stupnjem slobode u svakom čvoru u_i , $i=1,2$ (vidjeti sliku 1.). N_1 i N_2 predstavljaju standardne interpolacijske funkcije, dok je M funkcija kojom se opisuje skok u polju pomaka na sredini elementa, a G je njena derivacija. Strelica na sredini predstavlja Diracovu delta funkciju koja opisuje singularni dio polja deformacija.

Uvođenje diskontinuiteta zahtijeva intervenciju u kinematičke jednadžbe pa je polje pomaka definirano kao zbroj standardnog i obogaćenog polja pomaka

$$u(x) = \mathbf{N}u + M(x)\alpha, \quad (1)$$

gdje α predstavlja širinu pukotine, tj. pomak u diskontinuitetu, koji je uveden u formulaciju kao nekompatibilni oblik (5), dok je funkcija M kojom se opisuje skok na mjestu pukotine definirana kao

$$M(x) = \begin{cases} -\frac{x}{L} & x \in \left[0, \frac{L}{2}\right) \\ 1 - \frac{x}{L} & x \in \left(\frac{L}{2}, L\right] \end{cases} \quad (2)$$

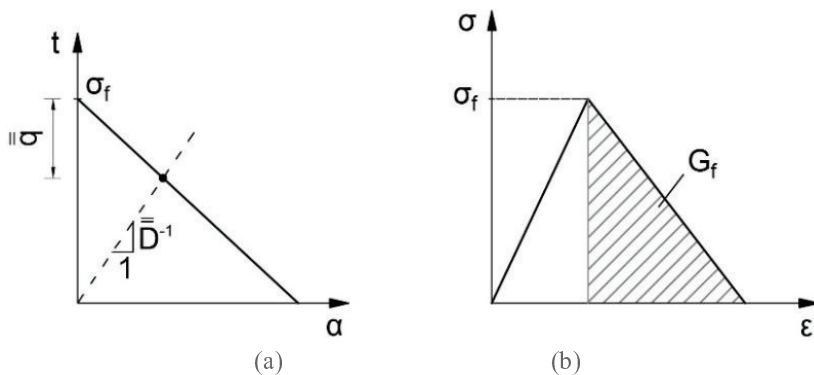


Slika 1. Interpolacijske funkcije za štapni konačni element s ugrađenim diskontinuitetom

Konstitutivni model betona određen je Hookeovim zakonom, dok je ponašanje materijala u diskontinuitetu opisano kohezivnim zakonom (vidjeti sliku 2.a)

$$t = \bar{\bar{D}}^{-1} \alpha \quad (3)$$

gdje je t sila u diskontinuitetu, a $\bar{\bar{D}}$ varijabla oštećenja koja može poprimiti vrijednosti od nula do beskonačno.



Slika 2. (a) Kohezivni zakon ponašanja u diskontinuitetu (b) Energija loma G_f

Oštećenje materijala opisano je uz pomoć još nekoliko unutarnjih varijabli, kao što su modul omekšanja, varijable oštećenja, te funkcija oštećenja koja provjerava je li vrijednost sile u diskontinuitetu dopustiva ili nije. Detalji postupka mogu se pronaći u (6). Na dijagramu naprezanje-deformacija (vidjeti sliku 2.b) površina ispod dijela kojim je opisano omekšanje materijala predstavlja energiju loma G_f .

Kako bi se omogućila efikasna numerička implementacija predloženog pristupa, proračun će se razdvojiti u dvije faze pomoću *operator split* postupka (6). U lokalnoj fazi rješavaju se jednadžbe razvoja oštećenja opisane unutarnjim varijablama, dok se u globalnoj fazi rješavaju jednadžbe ravnoteže na razini cijele konstrukcije. Proračun je inkrementalan i iterativan i koristi Newton-Raphsonovu metodu za rješavanje diferencijalnih jednadžbi, te implicitnu Eulerovu metodu za integraciju jednadžbi unutarnjih varijabli.

U lokalnoj fazi prvo računamo funkciju oštećenja $\bar{\Phi}$: ako je $\bar{\Phi} \leq 0$, korak je elastičan, a ako je $\bar{\Phi} > 0$, korak nije elastičan i došlo je do oštećenja. Nakon računanja vrijednosti svih unutarnjih varijabli, prelazimo u globalnu fazu gdje provjeravamo je li ravnoteža zadovoljena u cijeloj konstrukciji

$$\bar{K} \Delta d = -r \quad (4)$$

gdje \bar{K} označava kondenziranu matricu krutosti, Δd je inkrement pomaka, a r je rezidual koji predstavlja razliku unutarnjih i vanjskih sila. Ako je vrijednost reziduala $\|r\| > tol$, gdje je tol odabrana tolerancija greške, moramo provesti još iteracija, sve dok ne dobijemo $\|r\| \leq tol$, što znači da je ravnoteža zadovoljena i da možemo prijeći u novi korak.

Naposlijetku dobivamo vrijednosti čvornih pomaka, pomaka u diskontinuitetu, unutarnjih varijabli i naprezanja u svakom vremenskom koraku.

3 Pristup s cjelovitim proračunom

Ovaj pristup podrazumijeva kako nema razdvajanja na lokalnu i globalnu fazu. Kohezivna naprezanja koja nastaju na mjestu otvaranju pukotine definirana su kao dodatna sila koja je jednaka umnošku površine poprečnog presjeka i kohezivnog naprezanja koje je zavisno o širini pukotine α u promatranoj iteraciji.

Nakon otvaranja pukotine izraz (3) sada se definira kao

$$t = \begin{cases} \sigma_f \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_0}\right) & 0 < \alpha \leq \alpha_0 \\ 0 & \alpha > \alpha_0 \end{cases}, \quad (5)$$

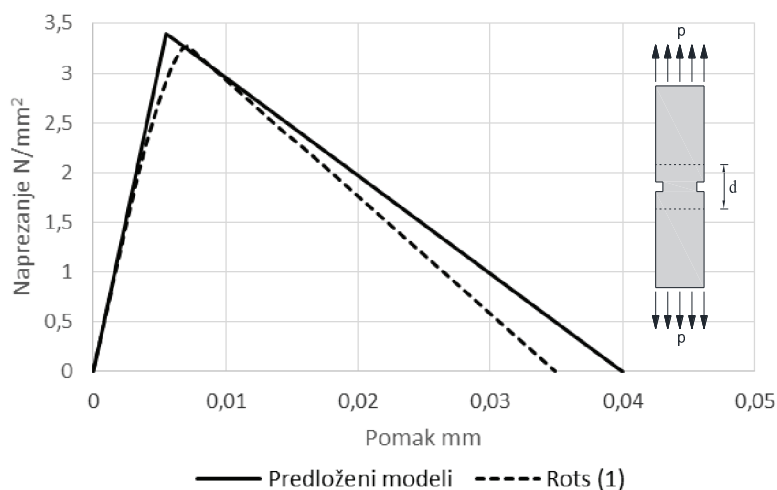
gdje je $\alpha_0 = 2G_f/\sigma_f$ najveća širina pukotine pri kojoj pukotina još može prenositi naprezanja. Varijable i funkcija oštećenja u ovom se pristupu ne računaju, a nepoznanice problema (čvorni pomaci i širine pukotina) dobivaju se rješavanjem globalne jednadžbe ravnoteže.

4 Numerički primjer

Kako bi se validirali predloženi modeli, razvijen je računalni kod u softverima *Mathematica* i *FEAP (Finite Element Analysis Program)*. Modeli su testirani na nekoliko primjera, a u nastavku se prikazuje primjer vlačnog štapa sa zarezom (oslabljenjem) u polovici duljine koji je numerički obrađen u (1) četveročvorovnim ravninskim elementima koristeći princip s razmazanim pukotinama. Analizirani štاپ je duljine 250 mm, širine 60 mm i visine 50 mm, a na mjestu oslabljenja širina iznosi 50 mm. Korištene su sljedeće materijalne karakteristike: modul elastičnosti $E = 18\,000\text{ N/mm}^2$, vlačna čvrstoća $\sigma_f = 3,4\text{ N/mm}^2$, dok je za energiju loma usvojeno $G_f = 68\text{ J/m}^2$ što daje širinu pukotine $a_0 = 0,04\text{ mm}$ (u (4) je za G_f korišteno $= 59,3\text{ J/m}^2$, ali pri toj vrijednosti ovdje prikazani postupci nisu konvergirali, stoga je u predloženim modelima usvojena gore navedena malo veća vrijednost).

Rezultati u (1) prikazani su u ovisnosti o pomaku koji se ostvaruje na sredini štapa na bazi duljine $d = 35\text{ mm}$, pa su prilikom modeliranja broj, odnosno duljina elementa odabrani tako da čvorovi središnjeg elementa (u kojem se nalazi oslabljenje) odgovaraju toj duljini, pa je štاپ modeliran sa 7 štاپnih elemenata duljine 35 mm ($7 \times 35 = 245\text{ mm}$). Oslabljenje u sredini štapa modelirano je smanjenjem vlačne čvrstoće središnjeg elementa za 16,7% (postotak je dobiven iz odnosa dimenzija oslabljenog i neoslabljenog presjeka). Na donjem rubu štapa pomak je spriječen, dok na gornjem rubu nanosimo pomak slobodnog kraja.

Na slici 3 prikazan je dijagram srednjeg naprezanja u štapu u ovisnosti o razlici pomaka čvorova središnjeg elementa u kojem se zbog oslabljenja otvara pukotina. Srednje naprezanje definirano je kao nanosena vlačna sila podijeljena s površinom poprečnog presjeka na mjestu oslabljenja ($50 \times 50\text{ mm}^2$). Oba predložena modela daju iste rezultate, te se može primijetiti vrlo dobro podudaranje s rezultatima iz (1), a neznatno odstupanje rezultata posljedica je primjene različitih vrijednosti za energiju loma G_f . Na grafu možemo primijetiti linearno elastični odziv sve do dostizanja vršne vlačne čvrstoće, a nakon dosezanja vršne čvrstoće cjelokupna se deformacija lokalizira na mjestu pukotine (koja naposljetku razdvaja uzorak na dva dijela), dok se ostatak uzorka rasterećuje.



Slika 3. Dijagram srednjeg naprezanja u ovisnosti o pomaku

5 Zaključak

U ovom radu prikazana su dva algoritamski bitno različita štapna konačna elementa s ugrađenom pukotinom za analizu raspucavanja u betonu i sličnim kvazikrtim materijalima, koja se temelje na pristupu jakog diskontinuiteta unutar kontinuuma. Na primjeru vlačnog štapa s oslabljenjem pokazano je kako oba pristupa daju iste rezultate.

Za pravilno modeliranje bitno je poznavanje materijalnih svojstava, posebice parametara kojim se definira *softening* funkcija koja opisuje zakonitost smanjenja naprezanja uslijed povećanja širine pukotine. Planirana nadogradnja modela uključit će korištenje složenije *softening* funkcije poput bilinearne ili eksponencijalne, koje će omogućiti i realnije modeliranje stvarnog ponašanja materijala.

Zahvale

Izradu ovog rada financijski je poduprla Hrvatska zaklada za znanost preko projekta br. IP-11-2013-9068 "Multi-scale concrete model with parameter identification" i projekta br. IP 11-2013-1631 "Configuration-dependent approximation in non-linear finite-element analysis of structures", te Sveučilište u Rijeci preko potpore br. 13.05.1.1.02. "Multi-rezolucijsko modeliranje konstrukcija s parametarskom identifikacijom", potpore br. 13.05.1.1.01 "Procjena oštećenja i ojačanje građevinskih konstrukcija" te potpore br. 13.05.1.3.06 "Ispitivanje vitkih grednih prostornih konstrukcija s naglaskom na validaciju modela".

Literatura

1. Rots JG. Computational modeling of concrete structures, PhD thesis, Delft University of Technology, Delft, 1988.
2. Bažant ZP i Planas J. Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials. CRC Press, 1998.
3. Hillerborg, A, Modeer M i Petersson, PE. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements, Cement and Concrete Research, 1976;6:773-782.
4. Jukic, M, Brank, B i Ibrahimbegovic, A. Failure analysis of reinforced concrete frames by beam finite element that combines damage, plasticity and embedded discontinuity. Engineering Structures. 2014;75:507-527.
5. Ibrahimbegovic, A i Wilson, E. A modified method of incompatible modes. Communications in Applied Numerical Methods. 1991;7:187-194.
6. Ibrahimbegovic, A. Nonlinear solid mechanics, theoretical formulations and finite element solution methods. Springer, 2009.