

# Membranski element s rotacijskim stupnjevima slobode

Grbčić, S.<sup>1,2</sup>, Ibrahimbegović, A.<sup>2</sup> i Jelenić, G.<sup>1</sup>

## Sažetak

U modeliranju složenih sustava metodom konačnih elemenata istovremeno se koriste različiti elementi poput štapova, membrana, ploča i slično. Navedeni elementi izvedeni na temelju klasične (Cauchyve) teorije kontinuuma ne posjeduju uvijek nužno međusobno ekvivalentne stupnjeve slobode što dovodi do nekompatibilnosti elemenata u zajedničkim čvorovima diskretiziranog sustava. Kompatibilnost stupnjeva slobode zajedničkih čvorova je nužna kako bi se osigurala konvergencija točnom rješenju, zbog čega je predložena nova familija elemenata koji posjeduju dodatne, rotacijske stupnjeve slobode.

Počevši od regularizirane miješane varijacijske formulacije kontinuuma s nezavisnim rotacijskim stupnjevima slobode i uvođenjem nekonvencionalne obogaćene interpolacije polja pomaka izveden je novi membranski element. Obogaćenjem interpolacije pomaka skupom nekompatibilnih oblika (*incompatible modes*) postiže se visoka točnost u odnosu na analitičke rezultate.

**Ključne riječi:** metoda konačnih elemenata, membranski element, rotacijski stupnjevi slobode, nekompatibilni oblici

---

<sup>1</sup> Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet Rijeka, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: sara.grbcic@uniri.hr, e-mail: gordan.jelenic@uniri.hr

<sup>2</sup> Université de Technologie de Compiègne / Sorbonne Universités, Laboratoire Roberval, Compiègne, e-mail: adnan.ibrahimbegovic@utc.fr

## 1 Uvod

Potreba za membranskim elementima s rotacijskim stupnjevima slobode proizlazi iz praktičnih inženjerskih problema, poput analize ispunjenih okvira i zidova na stupovima gdje se za modeliranje konstrukcija kombiniraju elementi s različitim stupnjevima slobode po čvoru. U radu je prezentiran membranski element s rotacijskim stupnjevima slobode i nekonvencionalnom interpolacijom pomaka nekompatibilnim oblicima. Nekompatibilni oblici pomaka prvi puta su predstavljani 1970-ih godina s ciljem eliminiranja posmičnih naprezanja koja se pojavljuju pri čistom savijanju (*eng. shear locking*). (1) Uz modifikacije izvedena je miješana varijacijska formulacija gdje je uvedeno nezavisno polje rotacije. Pravokutni četveročvorni element izveden na modificiranoj miješanoj varijacijskoj formulaciji s nezavisnim poljem rotacije i obogaćenom interpolacijom pomaka pokazao je vrlo bliske rezultate analitičkim rezultatima.

## 2 Problem rubnih vrijednosti u Cauchyjevoj linearnoj elastičnosti

Promatramo problem rubnih vrijednosti opisan sljedećim ravnotežnim jednadžbama:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \operatorname{skew} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

gdje vektor  $\mathbf{f}$  predstavlja vektor vanjskih sila, a  $\boldsymbol{\sigma}$  predstavlja Cauchyjev tenzor naprezanja. Svaki tenzor može se zapisati kao zbroj simetričnog i antisimetričnog dijela (2), odnosno:

$$\boldsymbol{\sigma} = \operatorname{sym} \boldsymbol{\sigma} + \operatorname{skew} \boldsymbol{\sigma}, \quad \operatorname{sym} \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^T) \quad \text{i} \quad \operatorname{skew} \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^T). \quad (2)$$

Ovdje ne pretpostavljamo nužnu simetričnost tenzora naprezanja  $\boldsymbol{\sigma}$ . Za posljedicu, uvodimo novo nezavisno kinematičko polje, tenzor rotacije  $\boldsymbol{\psi}$ , koje je energetski konjugirano s antisimetričnim dijelom tenzora naprezanja. Tenzor deformacija  $\boldsymbol{\varepsilon}$  jednak je simetričnom dijelu gradijenta pomaka, dok je novo polje rotacije  $\boldsymbol{\psi}$  jednako antisimetričnom dijelu gradijenta pomaka. Kinematičke jednadžbe problema jednake su

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \operatorname{sym} (\nabla \mathbf{u}) \quad \text{i} \quad \boldsymbol{\psi} = \operatorname{skew} (\nabla \mathbf{u}), \quad (3)$$

gdje  $\mathbf{u}$  predstavlja polje pomaka, a  $\nabla$  predstavlja diferencijalni operator nabra (2). Konstitutivna jednadžba definirana je kao

$$\operatorname{sym} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \operatorname{sym} (\nabla \mathbf{u}), \quad (4)$$

gdje  $\mathbf{C}$  predstavlja konstitutivni, izotropni tenzor četvrtog reda.

## 3 Varijacijska formulacija u 3D

Reissner je predložio varijacijsku formulaciju gdje je antisimetrični dio tenzora naprezanja skew  $\sigma$  predstavljen kao Lagrangeov multiplikator, čime je osigurana jednakost nezavisnih rotacija s antisimetričnim dijelom gradijenta pomaka (3). Reissnerov funkcional jednak je

$$\pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\sigma}) = \int_V \left[ -\frac{1}{2} \text{symm } \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C}^{-1} \text{symm } \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} : (\nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\psi}) \right] dV - \pi_{\text{ext}}. \quad (5)$$

Formulacija (5) neprikladna je za numeričku implementaciju. Hughes i Brezzi proveli su analizu konvergencije Reissnerove formulacije i utvrdili da je istu potrebno modificirati kako bi se osigurala stabilnost rješenja (4). Modificirana Reissnerova formulacija jednaka je

$$\pi_\gamma(\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\sigma}) = \pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\sigma}) - \frac{1}{2} \int_V [\text{skew } \boldsymbol{\sigma} : \gamma^{-1} \text{skew } \boldsymbol{\sigma}] dV, \quad (6)$$

gdje je  $\gamma$  skalar koji predstavlja regularizacijski parametar ovisan o analiziranom problemu. Za izotropnu elastičnost predloženo je da je vrijednost  $\gamma$  jednaka vrijednosti modula posmika (4). Varijacijom modificiranog funkcionala zadovoljavaju se Euler-Lagrangeove jednadžbe (1) – (4) i dobiva se dodatna jednadžba

$$\text{skew } \boldsymbol{\sigma} = \gamma (\text{skew } (\nabla \mathbf{u}) - \boldsymbol{\psi}). \quad (7)$$

Korištenjem konstitutivne jednadžbe (4) i zamjenom  $\gamma^{-1} \text{skew } \boldsymbol{\sigma} = \text{skew } (\nabla \mathbf{u}) - \boldsymbol{\psi}$  iz jednadžbe (7) modificirani funkcional  $\pi_\gamma(\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\sigma})$  koji čini bazu za formiranje metode konačnih elemenata se svodi samo na kinematičke varijable:

$$\pi_\gamma(\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}) = \frac{1}{2} \int_V [\text{symm}(\nabla \mathbf{u}) : \mathbf{C} \text{symm}(\nabla \mathbf{u}) + (\text{skew}(\nabla \mathbf{u}) - \boldsymbol{\psi}) : \gamma (\text{skew}(\nabla \mathbf{u}) - \boldsymbol{\psi})] dV - \pi_{\text{ext}}, \quad (8)$$

## 4 Interpolacija membranskim elementom s rotacijskim stupnjevima stupnjevima slobode za ravninsko stanje naprezanja ili deformacija

Za diskretizaciju 2D mreže odabrali smo četverokutni konačni element (Q4) s 4 čvora i 3 stupnja slobode po čvoru (horizontalni pomak, vertikalni pomak i rotacija).

### 1.1 Interpolacija kinematičkih polja

Tenzor rotacije  $\boldsymbol{\psi}$  se u ravnini svodi na jednu komponentu  $\psi$ . Odabrana je konvencionalna interpolacija bilinearnim Lagrangeovim funkcijama:

$$\psi \rightarrow \psi^h|_{Ve} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \psi_i, \quad (9)$$

gdje

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta); \quad \xi_i = \pm 1, \quad \eta_i = \pm 1, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (10)$$

i  $\psi_i$  predstavlja rotaciju čvora  $i$ . Polje pomaka interpolirano je nekonvencionalno, uključujući nekompatibilne oblike, kako slijedi:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \rightarrow \mathbf{u}^h|_{V^e} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^2 M_i(\xi, \eta) \boldsymbol{\alpha}_i, \quad (11)$$

gdje je  $\mathbf{u}_i$  vektor pomaka čvora  $i$ ,  $\boldsymbol{\alpha}_i$  vektor interpolacijskih parametara definiran na svakom elementu nezavisno i  $M_1(\xi, \eta) = 1 - \xi^2$ ,  $M_2(\xi, \eta) = 1 - \eta^2$  parabolne interpolacijske funkcije. Na osnovi definiranih interpolacija dobivamo deformacije

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{symm}(\nabla \mathbf{u}) \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^h|_{V^e} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^2 \mathbf{G}_i \boldsymbol{\alpha}_i, \quad (12)$$

gdje su matrice  $\mathbf{B}_i$  i  $\mathbf{G}_i$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial y} & \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_i(\xi, \eta)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_i(\xi, \eta)}{\partial y} \\ \frac{\partial M_i(\xi, \eta)}{\partial y} & \frac{\partial M_i(\xi, \eta)}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Kako bi element s nekompatibilnim oblicima pomaka zadovoljio patch test (2), energija deformacije povezana s nekompatibilnim oblicima mora biti jednaka nuli za stanje konstantnog napreznja, što znači da treba biti zadovoljena sljedeća jednadžba:

$$\int_{V^e} \mathbf{G}_i dV = 0. \quad (14)$$

Kako bi zadovoljili uvjet (14) matrica  $\mathbf{G}_i$  treba biti modificirana na sljedeći način (5):

$$\tilde{\mathbf{G}}_i = \mathbf{G}_i - \frac{1}{V^e} \int_{V^e} \mathbf{G}_i dV = 0 \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^h|_{V^e} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^2 \tilde{\mathbf{G}}_i \boldsymbol{\alpha}_i \quad (15)$$

Referentna konfiguracija izoparametarskog elementa s nekompatibilnim pomacima se definira isključivo preko kompatibilnih funkcija oblika,  $\mathbf{x}^h|_{V^e} = \sum_{i=1}^{br. elem} N_i(\xi, \eta) \mathbf{x}_i$ , što dalje implicira da se derivacije funkcija nekompatibilnih pomaka računaju na isti način kao funkcije oblika odabrane za izoparametarski element. U ravnini antisimetrični dio tenzora deformacija ima samo jednu komponentu te uvođenjem interpolacije dobivamo izraz

$$\text{skew}(\nabla \mathbf{u}) - \psi = \sum_{i=1}^4 (\mathbf{A}_i \mathbf{u}_i - \mathbf{N}_i \psi_i) + \sum_{i=1}^2 \mathbf{E}_i \boldsymbol{\alpha}_i, \quad (16)$$

gdje  $\mathbf{A}_i = \frac{1}{2} \langle -\frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial y} \quad \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial x} \rangle$  i  $\mathbf{E}_i = \frac{1}{2} \langle -\frac{\partial M_i(\xi, \eta)}{\partial y} \quad \frac{\partial M_i(\xi, \eta)}{\partial x} \rangle$ . Uvođenjem izraza (12) i (16) u funkcional (8) i njegovom minimizacijom dobivamo ravnotežne jednadžbe elementa

$$\mathbf{K}^e \mathbf{d}^e + \mathbf{F}^{eT} \boldsymbol{\alpha}^e = \mathbf{f}^e, \quad (17)$$

$$\mathbf{F}^e \mathbf{d}^e + \mathbf{H}^e \boldsymbol{\alpha}^e = \mathbf{f}^e, \quad (18)$$

gdje

$$\mathbf{K}^e = \int_{V^e} \{ [\mathbf{B}_i^T] \mathbf{C} [\mathbf{B}_i] + \gamma ([\mathbf{A}_i] - [\mathbf{N}_i])^T ([\mathbf{A}_i] - [\mathbf{N}_i]) \} dV, \quad (19)$$

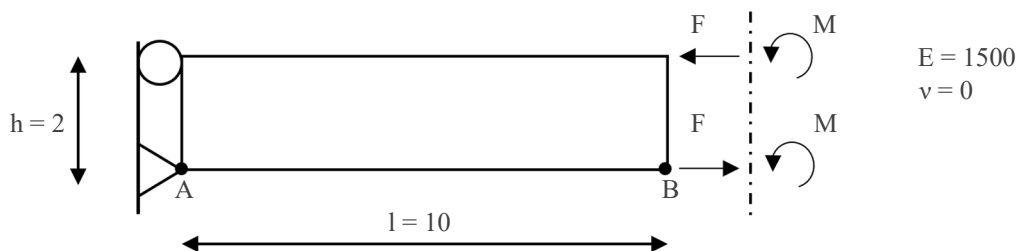
$$\mathbf{F}^e = \int_{V^e} \{ [\mathbf{B}_i^T] \mathbf{C} [\tilde{\mathbf{G}}_i] + \gamma ([\mathbf{A}_i] - [\mathbf{N}_i])^T ([\mathbf{E}_i]) \} dV, \quad (20)$$

$$\mathbf{H}^e = \int_{V^e} \{ [\tilde{\mathbf{G}}_i^T] \mathbf{C} [\mathbf{B}_i] + \gamma [\mathbf{E}_i]^T [\mathbf{E}_i] \} dV, \quad (21)$$

$$\mathbf{f}^e = \int_{V^e} [\mathbf{N}_i] \mathbf{b} dV + \int_{S_\sigma^e} [\mathbf{N}_i] \bar{\mathbf{t}} dS. \quad (22)$$

Prije nego što pristupimo sabiranju konačnih elemenata potrebno je izvršiti statičku kondenzaciju kako bi eliminirali parametre nekompatibilnih pomaka  $\boldsymbol{\alpha}^e$  na razini elementa (7). Iz jednadžbe (18) dobivamo  $\boldsymbol{\alpha}^e = -\mathbf{H}^{e-1} \mathbf{F}^e \mathbf{d}^e$ , zatim uvrštavanjem izraza u jednadžbu (17) dobivamo reduciranu matricu krutosti  $\tilde{\mathbf{K}}^e = \mathbf{K}^e - \mathbf{F}^{eT} \mathbf{H}^{e-1} \mathbf{F}^e$ . Dalje provodimo standardnu proceduru sabiranja, kojom dolazimo do sustava linearnih jednadžbi iz kojih dobivamo vrijednosti čvornih pomaka i rotacija  $\mathbf{d}$ . Nakon dobivenih čvornih pomaka možemo na razini elementa izračunati vrijednosti parametara nekompatibilnih pomaka  $\boldsymbol{\alpha}^e$  i uvrštavanjem u jednadžbu (12) dobivamo polje deformacija  $\boldsymbol{\varepsilon}^h$ . Naprezanja  $\boldsymbol{\sigma}^h$  dobivamo iz konstitutivne jednadžbe (4) reducirane na 2D.

## 5 Numerički primjer



Slika 1. Konzola opterećena čistim savijanjem

Analiziramo konzolu prikazanu na slici 1. opterećenu čistim savijanjem u dva različita slučaja opterećenja. Prvi slučaj opterećenja je opterećenje spregom sila  $F=10$ , a drugi slučaj koncentriranim momentima  $M=10$ . Konzola je diskretizirana pravilnom mrežom koja se sastoji od dva pravokutna elementa s četiri čvora. Rezultati u točkama A i B dobiveni membranskim elementom s rotacijskim stupnjevima slobode su prikazani u tablici 1.

Tablica 1. Numerički rezultati čistog savijanje konzole

opterećenje	vertikalni pomak $v_B$	rotacija $\psi_B$	naprezanje $\sigma_\Lambda$
spreg sila F	1.00	0.2	30.00
koncentrirani moment	1.0063	0.2047	30.00
analitičko rješenje	1.00	0.2	30.00

## 6 Zaključak

Membranski element s rotacijskim stupnjevima slobode pokazao se kao robusan element pomoću kojeg eliminiramo potrebu uvođenja prijelaznih elemenata. S obzirom na odlične performanse ovog elementa predviđeno je ovakvu interpolaciju primijeniti u formulaciji alternativnih teorija kontinuuma, što zbog već postojećih rotacijskih stupnjeva slobode olakšava njeno izvođenje, bez potrebe regularizacije kako bi se osigurala stabilnost.

## Zahvale

Rezultati prikazani u ovom radu dobiveni su u sklopu rada na projektu IP 1631 Hrvatske zaklade za znanost (Configuration-dependent approximation in non-linear finite-element analysis of structures) i stipendije Francuske Vlade.

## Literatura

1. Wilson E. L., Taylor R. L, Doherty i Ghaboussi J. Incompatible Displacement Models, Proceedings, ONR Symposium on Numerical and Computer Method in Structural Mechanics, University of Illinois, Urbana, 1971.
2. Ibrahimbegović A., Nonlinear Solid Mechanics: Theoretical Formulations and Finite Element Solution Methods, Springer, London, 2009.
3. Reissner E., A note on variational principles in elasticity, International Journal of Solids and Structures, 1965; 1: 93-95.
4. Hughes T. J. R., Brezzi F. On drilling degrees of freedom. Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 1989; 72: 105-121.
5. Ibrahimbegović A., Frey F. i Rebora B. Une approche unifiée de la modélisation des structures complexes: les éléments finis avec degré de liberté de rotation, Revue Européenne des Eléments. 2015; 2:3: 257-286.
6. Ibrahimbegović A., Nonlinear Solid Mechanics: Theoretical Formulations and Finite Element Solution Methods, Springer, London, 2009.
7. Wilson E. L. The static condensation algorithm, International Journal for Numerical Methods In Engineering, 1974;8: 199-203.