

Jednodimenzijski numerički model dvoslojnog tečenja fluida različitih gustoća u koritima proizvoljne geometrije

Krvavica, N.¹, Ožanić, N.²

Sažetak

U ovom je radu dokumentiran razvoj numeričkog modela za prognoziranje nestacionarnog toka dva fluida različitih gustoća. Procesne jednačbe za jednodimenzijski tok plitkih voda u koritima proizvoljne geometrije izvedene su iz zakona očuvanja mase i količine gibanja. Rezultirajuće jednačbe čine sustav nelinearnih, hiperboličnih, parcijalnih diferencijalnih jednačbi, a iste se mogu zapisati i kao zakoni očuvanja s izvornim članovima. Za rješavanje ovog sustava jednačbi korištena je Q-shema, temeljena na aproksimativnom Roevom rješavaču i metodi konačnih volumena. Navedena metoda je eksplicitna, drugog reda točnosti za stacionarna rješenja te zadovoljava prošireni uvjet ravnoteže. Originalni numerički algoritam je proširen kako bi uspješno aproksimirao i dodatne članove jednačbe, koji opisuju posmično naprezanje i turbulentno miješanje među slojevima. Posebna pozornost je posvećena definiranju rubnih uvjeta te rješavanju problema napredovanja fronte donjeg sloja.

Predloženi model je ranije verificiran i validiran na primjeru tečenja slane i slatke vode u izrazito stratificiranim priobalnim ušćima, i to usporedbom s analitičkim rješenjima i terenskim mjerenjima na ušću Rječine. U ovome se radu detaljnije analiziraju mogućnosti dvoslojnog modela u prognoziranju „ispiranja“ ušća, odnosno istiskivanju donjeg sloja, uslijed kontroliranog povećanja protoka slatke vode.

Ključne riječi: numerički model, metoda konačnih volumena, Q-shema, fluidi, jednačba plitkih voda, ušća

¹ **Dr.sc. Nino Krvavica, dipl.ing.grad.**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za hidrotehniku i geotehniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: nino.krvavica@uniri.hr

² **Prof.dr.sc. Nevenka Ožanić, dipl.ing.grad.**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za hidrotehniku i geotehniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: nozanic@uniri.hr

1 Uvod

Tečenje fluida različitih gustoća česta je pojava u Zemljinoj atmosferi i hidrosferi. Uslijed izraženog gradijenta gustoće i zanemarivih vanjskih utjecaja, takvo tečenje je u pravilu uslojeno, odnosno definirano slojem fluida manje gustoće koji teče iznad sloja veće gustoće. Uslojeno tečenje se primjerice javlja u morskim tjesnacima između mora i oceana različitih saliniteta, pri ispuštanju vode u prijemnik zbog različitih temperatura ili na ušćima priobalnih rijeka uslijed različitih saliniteta i temperatura (1).

Iako se danas za opisivanje tečenja fluida različitih fizikalnih karakteristika učestalo koriste 3D numerički modeli temeljeni na Navier-Stokesovim jednadžbama, uslojeno tečenje zahtijeva vrlo finu vertikalnu diskretizaciju prostorne domene ili promjenjivo lokalno proglašivanje mreže. Nažalost, oba navedena pristupa mogu rezultirati znatno produljenim trajanjem proračuna. S druge strane, dvoslojni modeli plitkih voda su jednostavniji za implementirati, računski su manje zahtjevni, a mogu podjednako precizno opisati hidrodinamičke procese u izrazito uslojenim uvjetima tečenja (2). U novije vrijeme, primjetan je znatan napredak u razvoju numeričkih modela dvoslojnog tečenja fluida različitih gustoća, koji se temelje na metodi konačnih volumena i aproksimativnim Roevim rješavačima. Navedeni modeli su razvijeni su s ciljem primjene u morskim tjesnacima te validirani na primjeru Gibraltarskog tjesnacu (3). Primjena sličnih modela na uslojena ušća podjednako je opravdana, ali nažalost rjeđe primjenjivana i još slabije istražena. Zbog svega navedenog, u ovom se radu prikazuju karakteristike i performanse numeričkog modela za dvoslojno tečenje plitkih voda, razvijenog s ciljem prognoziranja interakcije slane i slatke vode u uslojenim ušćima.

2 Numerički model

Procesne jednadžbe za tečenje u uslojenim ušćima definirane su proširenjem jednadžbi za dvoslojno tečenje u morskim tjesnacima (3) za dodatne članove koji opisuju posmično naprezanje i turbulentno miješanje među slojevima. Metoda konačnih volumena je primijenjena za aproksimaciju ovih jednadžbi, i to modificirana Q-shema u kojoj su svi izvorni članovi, uključujući posmično naprezanje i miješanje među slojevima, tretirani *upwind* pristupom (2,4).

2.1 Procesne jednadžbe

Procesne jednadžbe plitkih voda izvedene su iz zakona očuvanja mase i količine gibanja za jednodimenzijnsko dvoslojno tečenje u koritima proizvoljne geometrije. Sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi zapisan je u sljedećem obliku (2):

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w})}{\partial x} = \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + \mathbf{v}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w}) + \mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w}) + \mathbf{s}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w}), \quad (1)$$

gdje je t vrijeme, x koordinata u smjeru toka, vektor nepoznanica je $\mathbf{w} = \{A_1 \ Q_1 \ A_2 \ Q_2\}^T$, a vektor numeričkog fluksa $\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w})$ definiran je izrazom (2-4):

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w}) = \left\{ Q_1 \quad \frac{Q_1^2}{A_1} + \frac{g}{2\sigma_1} A_1^2 \quad Q_2 \quad \frac{Q_2^2}{A_2} + \frac{g}{2\sigma_2} A_2^2 \right\}^T \quad (2)$$

gdje A_i površina poprečnog presjeka, Q_i protok, g ubrzanje sile teže, σ_i širina poprečnog presjeka, a indeks $i = 1, 2$ označava gornji, odnosno donji sloj. Pritom su matrica $\mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w})$ i vektor $\mathbf{v}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w})$ definirani sljedećim izrazima (2-4):

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g \frac{A_1}{\sigma_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -g \frac{A_2}{\sigma_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w}) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \frac{g}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sigma_1} \right) A_1^2 \\ 0 \\ \frac{g}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sigma_2} \right) A_2^2 \end{array} \right\}. \quad (3)$$

Izvorni članovi $\mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w})$ i $\mathbf{s}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w})$ definiraju promjene u geometriji korita te fizikalne procese na razdjelnici među slojevima (trenje i vertikalno miješanje) (2):

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w}) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \frac{gA_1}{\sigma_1} (I_{3,1} + I_{3,2}) \\ 0 \\ \frac{rgA_2}{\sigma_1} I_{3,1} + \frac{gA_2}{\sigma_2} I_{3,1} \end{array} \right\}, \quad \mathbf{s}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w}) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \frac{\tau_w}{\rho_1} O_1 + \frac{\tau_i}{\rho_1} \sigma_3 \\ 0 \\ \frac{\tau_b}{\rho_2} O_2 - \frac{\tau_i}{\rho_2} \sigma_3 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \sigma_3 w_e \\ \sigma_3 \frac{Q_1}{A_1} w_e \\ -\sigma_3 w_e \\ -\sigma_3 \frac{Q_2}{A_2} w_e \end{array} \right\}, \quad (4)$$

gdje su $I_{3,1}$ i $I_{3,1}$ integrali koji opisuju proizvoljnu geometriju (2,3), b je visina dna kanala, h_i je dubina (debljina) sloja, r je omjer gustoće gornjeg i donjeg sloja, τ_b , τ_w i τ_i su posmična naprezanja između, redom, fluida i dna kanala, fluida i bočnih stranica te između dvaju fluida, O_i je omočeni obod, a w_e je vertikalna brzina transporta vode (eng. *entrainment*) iz donjeg sloja u gornji. Više detalja o procesnim jednadžbama dostupno je u literaturi (2).

2.2 Numerička shema

Numerički algoritam za rješavanje sustava jednadžbi (1-4) temelji se na metodi konačnih volumena, odnosno dobro uravnoteženoj Q-shemi (5,6). Korišten je aproksimativni Roeov rješavač, koji se pokazao vrlo uspješan u simuliranju nestacionarnog tečenja plitkih voda u prizmatičnim kanalima (5), a kasnije je nadograđen i za dvoslojne sustave (6) i korita nepravilne geometrije (3) te sustave koju uključuju trenje i miješanje među slojevima (2,4). Numerička shema je eksplicitna i drugog je reda točnosti za stacionarna rješenja (2,3).

Prostorna domena je podijeljena u kontrolne ćelije (volumene) definirane širinom $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$, gdje indeks $i + 1/2$ označava granicu između ćelije i i $i + 1$. Pritom, vremenski korak je označen s Δt . Indeks i , kao i u kod procesnih jednadžbi, označava prostorni položaj, dok eksponent n označava vremenski korak. Jednadžba (1) je na ovaj način aproksimirana sljedećim izrazom (2):

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_i^{n+1} &= \mathbf{w}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{f}_{i-1/2} - \mathbf{f}_{i+1/2}) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} [\mathbf{B}_{i-1/2} (\mathbf{w}_i^n - \mathbf{w}_{i-1}^n) + \\ &\mathbf{B}_{i+1/2} (\mathbf{w}_{i+1}^n - \mathbf{w}_i^n)] + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\mathbf{v}_{i-1/2} + \mathbf{v}_{i+1/2}) + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{P}_{i-1/2}^+ \mathbf{g}_{i-1/2} + \\ &\mathbf{P}_{i+1/2}^- \mathbf{g}_{i+1/2}) + \Delta t (\mathbf{P}_{i-1/2}^+ \mathbf{s}_{i-1/2} + \mathbf{P}_{i+1/2}^- \mathbf{s}_{i+1/2}). \end{aligned} \quad (5)$$

Pritom je numerički fluks definiran izrazom (2,3):

$$\mathbf{f}_{i+1/2} = \frac{1}{2} [\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}_i^n, \mathbf{w}_i^n) + \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^n, \mathbf{w}_{i+1}^n)] - \frac{1}{2} |\mathcal{A}_{i+1/2}| (\mathbf{w}_{i+1}^n - \mathbf{w}_i^n), \quad (6)$$

gdje je matrica $\mathcal{A}_{i+1/2} = \mathbf{J}_{i+1/2} - \mathbf{B}_{i+1/2}$ razlika vrijednosti Jakobijane fluksa $\mathbf{J} = \partial \mathbf{f} / \partial t$ i matrice \mathbf{B} na granici $i + 1/2$ između ćelija. Vrijednosti brzine u i dubine h na granici, izračunate su Roevim osrednjavanjem (2,3). Matrica $\mathbf{P}_{i-1/2}^+$ je projekcijska matrica koja služi *upwind* aproksimaciji izvornih članova (2,3). Preostali detalji aproksimacije pojedinih članova dokumentirani su u literaturi (2).

2.3 Fronta donjeg sloja

Fronta donjeg sloja predstavlja prijelaz između mokrog i „suhog“ dijela domena. Kako bi se izbjegle negativne dubine, definirana je granična dubina donjeg sloja ε . Na ovaj način, za slučaj $h_{i,2} < \varepsilon$, ćelija i se smatra ispunjenom samo s gornjim slojem; dubina $h_{i,2}$ se zadržava, a brzina $u_{i,2}$ postaje jednaka nuli. Jednom kada dubina donjeg sloja postane veća od granične dubine ε , ćelija i se smatra ispunjenom s oba sloja, te se dopušta tečenje fluida u donjem sloju (2).

Dodatni problem se može pojaviti kada se fronta donjeg sloja nalazi na kosom dnu. Naime, ako je dubina donjeg sloja $h_{i,2}$ u „mokroj“ ćeliji i manja od razlike visine dna $\Delta b = b_{i+1} - b_i$, uravnoteženost izvornih članova može biti narušena, a što može rezultirati u ne-fizikalnim oscilacijama (3). Kako bi se osigurala uravnoteženost sheme (tzv. *extended C-property*) potrebno je modificirati član $b_{i+1} - b_i = \Delta b$ u aproksimaciji izvornog člana $\mathbf{g}_{i+1/2}$, na sljedeći način (2,4):

$$b_{i+1} - b_i = \begin{cases} r(b_{i+1} - b_i) + (1-r)h_{i,2} & \text{ako } h_{i,2} \leq \Delta b \\ r(b_{i+1} - b_i) - (1-r)h_{i+1,2} & \text{ako } h_{i+1,2} \leq -\Delta b \\ b_{i+1} - b_i & \text{u ostalim slučajevima.} \end{cases} \quad (7)$$

2.3 Rubni uvjeti

Uzvodni rubni uvjet zadan je hidrogramom ili nivogramom. S druge strane, na nizvodnom rubu treba pažljivo odabrati i lokaciju i hidraulički uvjet. Naime, nizvodni se rubni uvjet obično definira kao otvorena granica za protoke u oba sloja, ali potrebno je precizno definirati dubinu razdjelnice. Za 1D modele ušća priobalnih rijeka, nizvodni se rubni uvjet najčešće postavlja na samom ušću a dubina razdjelnice se definira iz uvjeta kritičnog tečenja (2):

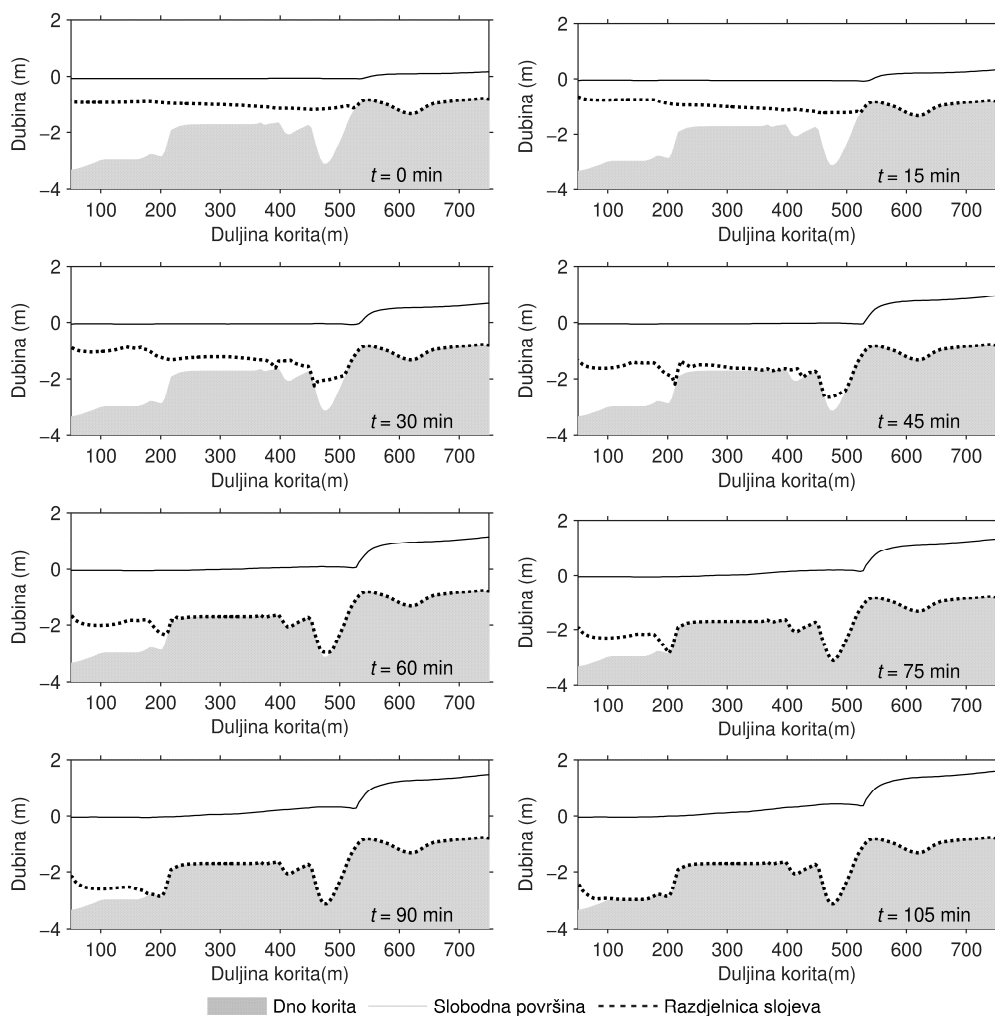
$$F_1^2 + F_2^2 + (1-r)F_1^2 F_2^2 = 1, \quad (8)$$

gdje su F_1^2 i F_2^2 denzimetrijski Froudovi brojevi gornjeg i donjeg sloja (2,3). Rubni uvjet se u svakom vremenskom koraku rješava iterativno dok pretpostavljene vrijednosti nepoznanica A_1, A_2, Q_1 i Q_2 ne zadovolje izraz (8).

3 Rezultati

U predmetnoj analizi ispituju se mogućnosti modela u numerički izrazito zahtjevnom scenariju ispiranja ušća, odnosno pri istiskivanju donjeg sloja slane vode uslijed povećanja protoka rijeke.

Naime, ovaj scenarij uključuje pomicanje fronte donjeg sloja duž prostorne domene, koja može sadržavati vrlo nagle prijelaze i promjene geometrije korita. Uz to, uslijed naglog povećanja protoka rijeka, očekuje se povećanje brzine slatke vode, odnosno povećanje razlike između brzine vode u gornjem i donjem sloju. Pritom, velika razlika brzina može uzrokovati pojavu nestabilnosti na razdjelnici, uslijed čega jednadžba (1) gubi hiperbolni karakter, a vlastite vrijednosti matrice \mathcal{A} mogu poprimiti kompleksne vrijednosti (2,3). U ranijim analizama, pokazalo se kako dodatno uključivanje vertikalnog transporta mase i količine gibanja kroz posmično naprezanje i miješanje, može pomoći u očuvanju hiperbolnog karaktera procesnih jednadžbi i spriječiti pojavu nestabilnosti (2).



Slika 1. Rezultati numeričke analize ispiranja ušća Rječine uslijed povećanja protoka

Kako bi se pobliže ispitale gore navedene pretpostavke, analiziran je slučaj ispiranja morske vode iz korita Rječine, pri povećanju protoka od $40 \text{ m}^3/\text{s}$ u periodu od 90 min. Korito

ušća Rječine u duljini od 1000 m podijeljeno je u 200 ćelija, a vremenski korak je definiran da zadovolji $CFL = 0,9$. Početni uvjet dobiven je stacionarnom analizom za zadani protok od $4,3 \text{ m}^3/\text{s}$ i razinu mora $-0,05 \text{ m n. m.}$, ubrzanje gravitacije je $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, a razlika gustoća je $r = 0,975$. Na slici 1. prikazani su rezultati modela u različitim vremenskim koracima (uzdužni presjeci s izračunatim profilima razdjelnice). Primjetno je kako se uslijed povećanja protoka donji sloj morske vode povlači nizvodno, sve dok nije u potpunosti istisnut iz korita za $t > 105 \text{ min.}$ Model je uspješno izračunao dubine razdjelnice te zadržao stabilnost (bez pojave kompleksnih vlastitih vrijednosti) tijekom trajanja simulacije.

4 Zaključak

Predloženi model uspješno je simulirao proces ispiranja morske vode iz ušća Rječine. Iako su dvoslojni modeli plitkih voda podložni pojavi nestabilnosti na razdjelnici slojeva kod naglih promjena protoka ili na fronti donjeg sloja u koritima promjenjive geometrije, pokazalo se kako odgovarajuća modifikacija izvornih članova na fronti te uključivanje fizikalnih procesa trenja i vertikalnog miješanja doprinose stabilnosti modela. U budućem periodu planira se navedeni model proširiti za dvodimenzionalne probleme te uključiti treći među-sloj, kako bi se preciznije opisali izrazito dinamički i turbulentni procesi na razdjelnici slojeva pri različitim scenarijima tečenja u stratificiranim ušćima.

Zahvale

Ovaj rad je financiralo Sveučilište u Rijeci projektom broj 13.05.1.1.03 (Hidrologija vodnih resursa i identifikacija rizika od poplava i blatnih tokova na krškom području).

Literatura

1. Krvavica N, Mofardin B, Ružić I i Ožanić N. Mjerenje i analiza zaslanjivanja na ušću Rječine. *Građevinar*. 2012;64(11):923-933.
2. Krvavica N. One-dimensional numerical model for layered shallow water flow in highly stratified estuaries. Doktorski rad. Sveučilište u Rijeci, 2016.
3. Castro MJ, Garcia-Rodriguez JA, González-Vida JM, Macias J, Parés C i Vázquez-Cendón, ME. Numerical simulation of two-layer shallow water flows through channels with irregular geometry. *Journal of Computational Physics*. 2014;195(1):202-235.
4. Krvavica N, Kožar I, Travaš V i Ožanić N. Numerical modelling of two-layer shallow water flow in microtidal salt-wedge estuaries: Finite volume solver and field validation. *Journal of Hydrology and Hydromechanics*. 2017;65(1):49-59.
5. Vázquez-Cendón ME. Improved treatment of source terms in upwind schemes for the shallow water equations in channels with irregular geometry. *Journal of Computational Physics*. 1999;148(2):497-526.
6. Castro MJ, Macias J i Parés C. A Q-scheme for a class of systems of coupled conservation laws with source term. Application to a two-layer 1-D shallow water system. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. 2001;35(1):107-127.