Mirko Polonijo
Dean Crnković
Tajana Ban Kirigin
Mea Bombardelli
Zrinka Franušić
René Sušanj

EUKLIDSKI PROSTORI

Sveučilište u Zagrebu
PMF-Matematički odjel

Sveučilište u Rijeci
Filozofski fakultet u Rijeci

Recenzent

Dr. sc. Sanja Rukavina, izv. prof.

Sadržaj

I Afini prostori **6**

1 Pojam afinog prostora **7**

2 Potprostori afinog prostora **12**

2.1 Definicija ravnine . . . 12

2.2 Presjek i suma ravnina . . . 14

2.3 Grassmannove formule . . . 15

2.4 Odnosi među ravninama . . . 16

2.4.1 Ravnine koje se sijeku . . . 17

2.4.2 Paralelne ravnine . . . 18

2.4.3 Mimosmjerne ravnine . . . 19

3 Analitička geometrija afinog prostora **21**

3.1 Linearno zavisan i linearno nezavisan skup točaka . . . 21

3.2 Afini koordinatni sustav. Koordinate točke . . . 22

3.2.1 Dijeljenje orijentirane dužine u zadanom omjeru . . . 24

3.2.2 Transformacija afinog koordinatnog sustava . . . 27

3.3 Jednadžba k-dimenzionalne ravnine . . . 29

3.3.1 Parametarska jednadžba k-ravnine . . . 29

3.3.2 Opća jednadžba k-ravnine . . . 31

3.4 Jednadžbe hiperravnina i pravaca . . . 34

3.4.1 Parametarska jednadžba hiperravnine . . . 34

3.4.2 Jednadžba hiperravnine zadane točkama . . . 35

3.4.3 Segmentni oblik jednadžbe hiperravnine . . . 35

3.4.4 Opći oblik jednadžbe hiperravnine . . . 37

3.4.5 Jednadžbe pravca . . . 44

4 Konveksni skupovi **48**

4.1 Baricentrične koordinate . . . 48

4.2 Konveksnost . . . 51

4.2.1 Poluprostori . . . 52

4.2.2 Paralelotopi . . . 55

4.2.3 Simpleksi . . . 57

4.3 Orijentacija afinog prostora . . . 62

5 Afina preslikavanja 66
5.1 Pojam afinog preslikavanja . . . 66
5.2 Svojstva afinih preslikavanja . . . 69
5.3 Afina grupa prostora $\mathcal{A}^n$ . . . 71
5.3.1 Translacije . . . 73
5.3.2 Neka daljnja svojstva afinih preslikavanja . . . 75
5.4 Analitički prikaz afinog preslikavanja . . . 76

II Euklidski prostori 79

6 Pojam euklidskog prostora 80

7 Ortogonalnost. Udaljenost prostora 82
7.1 Okomitost ravnina . . . 82
7.1.1 Ortogonalna projekcija . . . 83
7.1.2 Paralelnost dviju ravnina . . . 86
7.1.3 Okomitost dviju ravnina . . . 86
7.2 Udaljenost ravnina . . . 87
7.2.1 Udaljenost točke od hiperravnine . . . 87
7.2.2 Udaljenost točke od k-ravnine . . . 90
7.2.3 Zajednička normala i udaljenost k-ravnina . . . 92
7.3 Kutovi ravnina . . . 96
7.3.1 Kut pravca i k-ravnine . . . 96
7.3.2 Kut dvije hiperravnine . . . 97
7.3.3 Kut između ravnina . . . 98

8 Politopi 100
8.1 Volumen paralelotopa . . . 100
8.2 Volumen simpleksa . . . 105
8.3 Politopi i Eulerova formula . . . 109

9 Preslikavanja euklidskog prostora – izometrije 112
9.1 Pomaci . . . 113
9.2 Translacije . . . 113
9.3 Rotacije . . . 114
9.4 Simetrije . . . 117

Predgovor

Skripta je namijenjena studentima druge godine preddiplomskog studija matematike. Nastala je na temelju predavanja iz kolegija Euklidski prostori na PMF-Matematičkom odjelu Sveučilišta u Zagrebu i Filozofskom fakultetu u Rijeci Sveučilišta u Rijeci. Očekuje se poznavanje standardnih matematičkih sadržaja prve godine studija matematike, posebice sadržaja Linearne algebre I i II.

Točke i vektori dva su tipa matematičkih objekata koji su nam od prije poznati, kao i neka njihova svojstva. Mnoga od tih svojstava intuitivno su nam jasna, a cilj je ove skripte teorijski ih utemeljiti. U tu svrhu morat ćemo proširiti sadržaje linearne algebre.

Skripta je podijeljena u dva dijela. U prvom dijelu obrađeni su afini prostori, a u drugom euklidski prostori, kao posebna vrsta afinih prostora.

U prvom dijelu obrađuju se pojam afinog prostora, potprostori afinog prostora, analitička geometrija afinog prostora, konveksni skupovi i afina preslikavanja, a u drugom dijelu pojam euklidskog prostora, ortogonalnost, udaljenost prostora, politopi i preslikavanja euklidskog prostora.

Premda je skripta prvenstveno namijenjena studentima matematike, može poslužiti i studentima srodnih studija.

Dio I

Afini prostori

Poglavlje 1

Pojam afinog prostora

Podsjetimo se najprije nekih pojmova iz Linearne algebre koji će nam trebati pri konstrukciji afinog prostora.

Ako je S neprazan skup, tada se svako preslikavanje $\circ : S \times S \to S$ naziva *(binarnom) operacijom*, te pritom koristimo notaciju $\circ(a, b) = a \circ b$, gdje su $a, b \in S$.

Uređeni par $(S, \circ)$ nepraznog skupa i na njemu definirane operacije naziva se *grupa* ako vrijedi:

(i) $(\forall a, b, c \in S)\ \ (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ (asocijativnost);

(ii) $(\exists e \in S)\,(\forall a \in S)\ \ a \circ e = e \circ a = a$ (postojanje neutralnog elementa);

(iii) $(\forall a \in S)\,(\exists a' \in S)\ \ a \circ a' = a' \circ a = e$ (postojanje inverznog elementa).

Grupa $(S, \circ)$ je *Abelova* ili *komutativna* ako je grupovna operacija komutativna, odnosno ako je $a \circ b = b \circ a$ za sve $a, b \in S$.

$(F, +, \cdot)$ je *polje* ako su $(F, +)$ i $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ Abelove grupe (gdje je 0 neutralni element u odnosu na operaciju $+$) i vrijedi distributivnost operacije $\cdot$ prema operaciji $+$

$$(\forall a, b, c \in F)\ \ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Ako je iz konteksta jasno o kojim se operacijama radi, kažemo još i da je F polje, a umjesto $a \cdot b$ pišemo ab, gdje su $a, b \in F$.

Elemente polja nazivamo *skalarima*.

$(V, F, \cdot)$ je *vektorski prostor* nad poljem F ako je $(V, +)$ Abelova grupa, a za preslikavanje $\cdot : F \times V \to V$ (za sve $a, b \in V$, $\lambda, \mu \in F$) vrijedi:

(i) $\lambda \cdot (a + b) = \lambda \cdot a + \lambda \cdot b$;

(ii) $(\lambda + \mu) \cdot a = \lambda \cdot a + \mu \cdot a$;

(iii) $(\lambda\mu) \cdot a = \lambda \cdot (\mu \cdot a)$;

(iv) $1 \cdot a = a$ (1 je neutralni element pri operaciji množenja skalara)

Elementi vektorskog prostora nazivaju se *vektorima*, a preslikavanje za koje vrijede svojstva (i)-(iv) naziva se množenje vektora skalarima. Neutralni element grupe $(V, +)$ naziva se *nul-vektor* i označava sa θ.

Ako je iz konteksta jasno o kojim se operacijama radi, kažemo i da je V vektorski prostor.

Vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$, odnosno $\mathbb{C}$, nazivamo realnim, odnosno kompleksnim, vektorskim prostorom.

Za vektore $a_1, \ldots, a_n \in V$ i skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F$ vektor $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n$ naziva se *linearna kombinacija vektora* $a_1, \ldots, a_n$.

Vektori $a_1, \ldots, a_n$ su *linearno zavisni* ako postoje skalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ koji nisu svi jednaki 0 takvi da vrijedi $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n = \theta$. Ako vektori $a_1, \ldots, a_n$ nisu linearno zavisni kaže se da su *linearno nezavisni*.

Baza vektorskog prostora V je skup $B \subseteq V$ linearno nezavisnih vektora takav da se svaki vektor $a \in V$ može prikazati kao linearna kombinacija vektora iz B.

Kardinalni broj baze vektorskog prostora naziva se *dimenzijom* tog prostora.

Potprostor vektorskog prostora V je svaki njegov podskup W koji je i sam vektorski prostor uz iste operacije, odnosno njihove odgovarajuće restrikcije, što zapisujemo $W \preceq V$.

Ako su X i Y vektorski prostori nad istim poljem F, tada se preslikavanje $f : X \to Y$ naziva *operator*.

Operator f je *aditivan* ako je

$$(\forall\, x, y \in X) \quad f(x+y) = f(x) + f(y),$$

a *homogen* ako je

$$(\forall\, x \in X)\,(\forall \lambda \in F) \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Aditivan i homogen operator naziva se *linearnim operatorom*.

Ako je $f : X \to Y$ bijektivni linearni operator kažemo da je f *izomorfizam vektorskih prostora* X i Y, a za te prostore kažemo da su izomorfni.

Sada možemo definirati pojam afinog prostora.

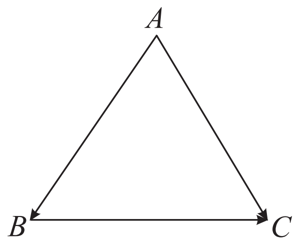
Definicija 1. *Neka je $\mathcal{A}$ neprazan skup, V vektorski prostor nad poljem F, te neka je definirano preslikavanje, $v : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$.*

Uređena trojka $(\mathcal{A}, V, v)$ naziva se afinim prostorom *nad V, a elementi skupa $\mathcal{A}$* točkama *tog prostora ako vrijedi:*

(A1) za svaki $A \in \mathcal{A}$ i svaki $x \in V$ postoji jednoznačno određena točka $B \in \mathcal{A}$ tako da je $v(A, B) = x$;

(A2) za sve $A, B, C \in \mathcal{A}$ vrijedi $v(A, B) + v(B, C) = v(A, C)$ (Charlesova jednakost).

Ako je $(\mathcal{A}, V, v)$ afini prostor, tada se vektorski prostor V naziva pripadni vektorski prostor ili smjer *afinog prostora $\mathcal{A}$.*



Slika 1.1: Zbrajanje vektora

Najčešće se, radi jednostavnosti, sam skup $\mathcal{A}$ naziva afinim prostorom.

Preslikavanje $v : \mathcal{A}\times\mathcal{A} \to V$ svakom uređenom paru točaka (A, B) pridružuje vektor $v(A, B)$. Vektori se zbrajaju prema pravilu $(A2)$, kojeg nazivamo pravilom trokuta.

Uočimo da iz $(A2)$ slijedi da je $v(A, A) = \theta$ za svaki $A \in \mathcal{A}$.

Definicija 2. *Neka su $(\mathcal{A}_1, V_1, v_1)$ i $(\mathcal{A}_2, V_2, v_2)$ afini prostori takvi da je $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$, $V_1 \preceq V_2$ i v_1 restrikcija preslikavanja v_2. Tada kažemo da je $(\mathcal{A}_1, V_1, v_1)$* afini potprostor *prostora $(\mathcal{A}_2, V_2, v_2)$ i to označavamo sa $(\mathcal{A}_1, V_1, v_1) \preceq (\mathcal{A}_2, V_2, v_2)$ ili kraće sa $\mathcal{A}_1 \preceq \mathcal{A}_2$.*

Definicija 3. *Afini prostor je* realan (kompleksan) *ako je pridruženi vektorski prostor realan (kompleksan).*

Afini prostor je konačno-dimenzionalan *(*beskonačno-dimenzionalan*) ako je pridruženi vektorski prostor konačno-dimenzionalan (beskonačno-dimenzionalan).*

Dimenzija afinog prostora *jednaka je dimenziji pripadnog vektorskog prostora. Ubuduće ćemo n-dimenzionalni afini prostor $(\mathcal{A}, V, v)$ često označavati sa $(\mathcal{A}^n, V^n, v)$.*

Napomena. U afinom prostoru općenito nisu definirani neki pojmovi s kojima smo se susreli već u srednjoškolskoj geometriji, kao što su udaljenost dviju točaka i kut između dva pravca. Takva svojstva promatrat ćemo u drugom dijelu skripte u kojem su obrađeni euklidski prostori.

Primjer 1.

Svaki vektorski prostor može se interpretirati kao afini prostor nad samim sobom.

U tom slučaju dovoljno je definirati da je skup točaka jednak skupu V, a preslikavanje $v : V \times V \to V$ definirati sa

$$v(x, y) = y - x, \quad x, y \in V.$$

Tada za svaki $x \in V$ i svaki $a \in V$ postoji takav $y \in V$ da vrijedi $v(x, y) = a$. Očito je $y = x + a$ jer je $v(x, y) = y - x = (x + a) - x = a$.

Dalje, za sve $x, y, z \in V$ vrijedi $v(x, y) + v(y, z) = (y - x) + (z - y) = z - x = v(x, z)$. Uvjeti $(A1)$ i $(A2)$ su ispunjeni, pa je (V, V, v) afini prostor.

Može se provjeriti da je (V, V, w) afini prostor i uz preslikavanje $w : V \times V \to V$ zadano sa $w(x, y) = k(y - x)$, $k \in F$, $k \neq 0$.

Primjer 2.

Neka je V realan ili kompleksan vektorski prostor, a $v : V \times V \longrightarrow V$ preslikavanje definirano sa $v(x, y) = x + y$.

(V, V, v) nije afini prostor. Uvjet $(A1)$ je ispunjen, ali nije uvjet $(A2)$. Naime, $v(x, y) + v(y, z) = (x + y) + (y + z) = x + 2y + z \neq v(x, z)$.

Primjer 3.

Neka je V vektorski prostor, a preslikavanje $v : V \times V \longrightarrow V$ definirano sa $v(x, y) = \theta$.

(V, V, v) nije afini prostor. Uvjet $(A2)$ je ispunjen, a $(A1)$ nije.

Iz primjera 2. i 3. zaključujemo da su uvjeti $(A1)$ i $(A2)$ nezavisni.

Primjer 4.

Neka je F polje. Vektorima ćemo zvati $(n + 1)$-torke oblika

$$(a_1, \ldots, a_n, 0), \quad a_i \in F,\ i \in \{1, \ldots, n\}, \tag{1.1}$$

a točkama $(n + 1)$-torke:

$$(b_1, \ldots, b_n, 1), \quad b_i \in F,\ i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{1.2}$$

Zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom definiramo jednakostima:

$$\begin{aligned} &(a_1, \ldots, a_n, 0) + (a'_1, \ldots, a'_n, 0) = (a_1 + a'_1, \ldots, a_n + a'_n, 0), \\ &\lambda \cdot (a_1, \ldots, a_n, 0) = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n, 0), \quad \lambda \in F, \end{aligned}$$

a funkciju v koja paru točaka pridružuje vektor definiramo sa

$$v\left((b_1, \ldots, b_n, 1), (b'_1, \ldots, b'_n, 1)\right) = (b'_1 - b_1, \ldots, b'_n - b_n, 0).$$

Lako se pokazuje da je skup svih vektora (1.1) n-dimenzionalni vektorski prostor nad F, a skup svih točaka (1.2) s funkcijom v afini prostor nad tim vektorskim prostorom.

Propozicija 1. *Neka je $\mathcal{A}^n$ n-dimenzionalni afini prostor nad vektorskim prostorom V^n s preslikavanjem $v : \mathcal{A}^n \times \mathcal{A}^n \longrightarrow V^n$. Tada za sve $A, B \in \mathcal{A}^n$ vrijedi:*

a) $v(A, B) = v(A, C) \ \Rightarrow\ B = C$;

b) $v(A, B) = \theta \ \Leftrightarrow\ A = B$;

c) $v(A, B) = -v(B, A)$.

Dokaz. Prva tvrdnja slijedi direktno iz uvjeta $(A1)$.

Za dokaz tvrdnje *b)* pretpostavimo najprije da je $A = B$. Tada je $v(A, B) = v(A, A) = \theta$.

Obratno, ako je $v(A, B) = \theta$, budući da je $v(A, A) = \theta$, tada iz *a)* slijedi $B = A$.

Tvrdnja *c)* slijedi iz $v(A, B) + v(B, A) = v(A, A) = \theta$ prema $(A2)$ i tvrdnji *b)*. $\square$

Neka je $\mathcal{A} = (A, V, v)$ afini prostor i $A, B \in \mathcal{A}$. Uređeni par točaka (A, B) nazvamo *orijentiranom dužinom* i označavamo sa $\overrightarrow{AB}$. Pritom je točka A početna, a B krajnja točka orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$.
Na skupu orijentiranih dužina definiramo relaciju $\approx$ sa

$$\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{CD} \qquad \text{ako i samo ako je} \qquad v(A, B) = v(C, D).$$

Dokažimo da je $\approx$ relacija ekvivalencije na skupu orijentiranih dužina:

1. Refleksivnost
   Za svake dvije točke $A, B \in \mathcal{A}$ je $v(A, B) = v(A, B)$, pa je $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{AB}$.

2. Simetričnost
   Ako je $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{CD}$, odnosno $v(A, B) = v(C, D)$, onda je $v(C, D) = v(A, B)$, dakle $\overrightarrow{CD} \approx \overrightarrow{AB}$.

3. Tranzitivnost
   Neka je $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{CD} \approx \overrightarrow{EF}$, odnosno $v(A, B) = v(C, D)$ i $v(C, D) = v(E, F)$. Tada je $v(A, B) = v(E, F)$, iz čega slijedi $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{EF}$.

Vektore prostora V^n možemo identificirati s klasama ekvivalentnih orijentiranih dužina, pa pišemo

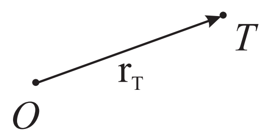
$$v(A, B) = [\overrightarrow{AB}].$$

Također, po dogovoru, pišemo

$$v(A, B) = \overrightarrow{AB},$$

odnosno vektore identificiramo s predstavnicima klasa ekvivalencije orijentiranih dužina.

Definicija 4. *Neka je $O \in \mathcal{A}^n$ neka čvrsta točka afinog prostora. Tada vektor $v(O, T) = r_T \in V^n$ nazivamo* radijus-vektorom točke T s obzirom na ishodište O.



Slika 1.2: Radijus-vektor točke T s obzirom na ishodište O

Uvjet $(A1)$ možemo sada interpretirati na ovaj način: *svakoj točki $O \in \mathcal{A}^n$ pridružen je vektorski prostor radijus-vektora čiji je početak u O.*
Taj prostor radijus-vektora izomorfan je s vektorskim prostorom V^n.

Uočimo da je u vektorskom prostoru istaknut jedan element, nul-vektor, dok su u afinom prostoru svi elementi (točke) ravnopravni.

Poglavlje 2

Potprostori afinog prostora

2.1 Definicija ravnine

Definicija 5. *Neka je T_0 točka n-dimenzionalnog afinog prostora $\mathcal{A}^n$, V^n njemu pridruženi vektorski prostor i W^k k-dimenzionalni potprostor od V^n. Skup svih točaka $T \in \mathcal{A}^n$ za koje je $\overrightarrow{T_0T} \in W^k$ naziva se k-*dimenzionalna ravnina *(k-ravnina) točkom T_0 sa smjerom W^k i označava sa Π^k, tj. ravnina Π^k točkom T_0 sa smjerom W^k je skup*

$$\left\{T \in \mathcal{A}^n \mid \overrightarrow{T_0T} \in W^k\right\}. \tag{2.1}$$

Ubuduće ćemo smjer ravnine Π označavati sa W.

Primjer 5.
Posebno, 0-ravnina se sastoji od samo jedne točke. Pridruženi vektorski prostor je trivijalan, $W^0 = \{\theta\}$. Prema tome je svaka točka afinog prostora 0-dimenzionalna ravnina.

n-ravnina je identična s cijelim prostorom $\mathcal{A}^n$.

Definicija 6. *U n-dimenzionalnom afinom prostoru $(n-1)$-ravnina naziva se* hiperravninom, *a 1-ravnina se naziva* pravcem.

U definiciji k-ravnine istaknuta je jedna točka. Pokažimo da su sve točke k-ravnine ravnopravne.

Propozicija 2. *Neka je $\mathcal{A}$ afini prostor, Π ravnina točkom $A \in \mathcal{A}$ sa smjerom W, a $B \in \Pi$ bilo koja točka te ravnine. Tada je* $\Pi = \left\{T \in \mathcal{A} \mid \overrightarrow{AT} \in W\right\} = \left\{T \in \mathcal{A} \mid \overrightarrow{BT} \in W\right\}$.

Dokaz. Odaberimo bilo koju točku $B \in \Pi = \left\{T \in \mathcal{A} \mid \overrightarrow{AT} \in W\right\}$. Treba dokazati da točka T pripada ravnini Π ako i samo ako je $\overrightarrow{BT} \in W$, odnosno da vrijedi

$$\overrightarrow{BT} \in W \;\Leftrightarrow\; T \in \Pi.$$

Pretpostavimo da je $\overrightarrow{BT} \in W$. Kako je $B \in \Pi$ to je $\overrightarrow{AB} \in W$. Slijedi da je $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BT} \in W$ i zato je $T \in \Pi$.

Obratno, iz $T \in \Pi$ slijedi da je $\overrightarrow{AT} \in W$ pa je i $\overrightarrow{BT} = \overrightarrow{AT} - \overrightarrow{AB} \in W$. □

Propozicija 3. *Neka je $\mathcal{A}^n$ afini prostor nad V^n i neka je Π^k k-dimenzionalna ravnina točkom $A \in \mathcal{A}^n$ sa smjerom $W^k \preceq V^n$. Ravnina Π^k je k-dimenzionalni afini prostor nad vektorskim prostorom W^k.*

Dokaz. Odaberimo u Π^k bilo koje dvije točke B i C. Tada je $\overrightarrow{BC} \in W^k$, a preslikavanje $v : \mathcal{A}^n \times \mathcal{A}^n \to V^n$ inducira preslikavanje $v' : \Pi^k \times \Pi^k \to W^k$ jednakošću $v'(B,C) = v(B,C) = \overrightarrow{BC}$, $B, C \in \Pi^k$. (Preslikavanje v' je restrikcija preslikavanja v).

Uvjet $(A1)$ za Π^k slijedi iz definicije ravnine i prije dokazane ravnopravnosti točaka u Π^k (propozicija 2).

Uvjet $(A2)$ vrijedi za cijeli prostor A^n, pa vrijedi posebno i za Π^k. □

Dokazali smo da je svaka k-dimenzionalna ravnina afinog prostora $\mathcal{A}^n$ k-dimenzionalni afini potprostor od $\mathcal{A}^n$. Pokažimo da vrijedi i obrat te tvrdnje.

Propozicija 4. *Svaki k-dimenzionalni afini potprostor afinog prostora $\mathcal{A}^n$ je k-dimenzionalna ravnina prostora $\mathcal{A}^n$.*

Dokaz. Neka je (Π^k, W^k, v') k-dimenzionalni afini potprostor afinog prostora $(\mathcal{A}^n, V^n, v)$, te neka je $T_0 \in \Pi^k$. Dokažimo da je

$$\Pi^k = \left\{ T \in \mathcal{A}^n \;\middle|\; \overrightarrow{T_0T} \in W^k \right\}. \tag{2.2}$$

Budući da funkcija v' preslikava $\Pi^k \times \Pi^k$ u W^k, za svaku točku $T \in \Pi^k$ je $\overrightarrow{T_0T} \in W^k$.

Obratno, ako za neku točku $T \in \mathcal{A}^n$ vrijedi $\overrightarrow{T_0T} \in W^k$, onda zbog uvjeta $(A1)$ iz definicije afinog prostora mora biti $T \in \Pi^k$. □

Ubuduće pojmove ravnina i afini potprostor koristimo kao sinonime.

Primjer 6.

Neka je V^n n-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem F, a $\mathcal{A}^n$ afini prostor nad V^n. Neka je $A \in \mathcal{A}^n$ i $a_1, a_2, \ldots, a_m \in V^n$ pri čemu je $\dim[a_1, a_2, \ldots, a_m] = k$.[1] Tada je skup

$$\Pi^k = \left\{ X \;\middle|\; \overrightarrow{AX} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i, \lambda_i \in F \right\}$$

potprostor od $\mathcal{A}^n$ dimenzije k, budući da je skup

$$W^k = \left\{ \overrightarrow{AX} \;\middle|\; X \in \Pi^k \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \;\middle|\; \lambda_i \in F \right\}$$

k-dimenzionalni potprostor od V^n razapet vektorima $a_1, a_2, \ldots, a_m$, tj. $W^k = [a_1, a_2, \ldots, a_m]$.

[1] Najmanji vektorski prostor koji sadrži vektore $v_1, \ldots, v_m$ zovemo *vektorski potprostor razapet vektorima* $v_1, \ldots, v_m$ i označavamo sa $[v_1, \ldots, v_m]$.

2.2 Presjek i suma ravnina

Znamo da je presjek dvaju potprostora nekog vektorskog prostora V potprostor od V, te da je presjek (konačno ili beskonačno mnogo) potprostora od V također potprostor od V.

Za potprostore afinog prostora vrijedi sljedeća tvrdnja.

Propozicija 5. *Neka su Π_1 i Π_2 potprostori afinog prostora $\mathcal{A}^n$ nad prostorom V^n. Presjek $\Pi_1 \cap \Pi_2$ potprostora je ili prazan skup ili potprostor od $\mathcal{A}^n$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\Pi_1 \cap \Pi_2 \neq \emptyset$. Tada postoji bar jedna točka $A \in \Pi_1 \cap \Pi_2$. Promatrajmo skup W radijus-vektora svih točaka T presjeka $\Pi_1 \cap \Pi_2$ s obzirom na ishodište A. Pokažimo da je W potprostor od V^n. Naime,

$$W = \left\{ \overrightarrow{AT} \mid T \in \Pi_1 \cap \Pi_2 \right\} = \left\{ \overrightarrow{AT} \mid T \in \Pi_1 \right\} \cap \left\{ \overrightarrow{AT} \mid T \in \Pi_2 \right\}$$

pa je W presjek potprostora od V^n i kao takav i sam potprostor od V^n. Zato je $\Pi_1 \cap \Pi_2$ potprostor afinog prostora $\mathcal{A}^n$ točkom A s pridruženim vektorskim prostorom W. $\square$

$\Pi_1 \cap \Pi_2$ može biti prazan skup, npr. kada je $\Pi_1 = \{A\}$, $\Pi_2 = \{B\}$, za $A \neq B$, $A, B \in \mathcal{A}^n$.

Iz propozicije 5 slijedi da je presjek konačno mnogo potprostora afinog prostora $\mathcal{A}^n$ ili prazan skup ili potprostor od $\mathcal{A}^n$. Također je presjek beskonačno mnogo afinih potprostora od $\mathcal{A}^n$ ili prazan skup ili afini potprostor od $\mathcal{A}^n$.

S druge strane unija afinih potprostora od $\mathcal{A}^n$ ne mora biti afini potprostor od $\mathcal{A}^n$.

Nadalje, uočimo da smo u dokazu propozicije 5 pokazali da je, u slučaju kada afini prostori Π_1 i Π_2 s pripadnim smjerovima W_1 i W_2 nisu disjunktni, smjer ravnine $\Pi_1 \cap \Pi_2$ jednak $W_1 \cap W_2$.

Definicija 7. *Neka je $\mathcal{A}$ afini prostor i S neprazni podskup od $\mathcal{A}$. Presjek svih potprostora prostora $\mathcal{A}$ koje sadrže S, odnosno skup $\bigcap\limits_{S \subseteq P \preceq \mathcal{A}} P$ je potprostor od $\mathcal{A}$ koji se naziva* prostor razapet skupom *S i označava sa $[S]$.*

Neka je $\mathcal{F}$ skup nekih ravnina prostora $\mathcal{A}$. Potprostor razapet skupom $\mathcal{F}$, odnosno skup $[\bigcup\limits_{Q \in \mathcal{F}} Q]$ naziva se suma (spoj) ravnina iz $\mathcal{F}$ *i označava sa $\sum\limits_{Q \in \mathcal{F}} Q$.*

Ako su Π_1 i Π_2 afini prostori, onda njihovu sumu označavamo sa $\Pi_1 + \Pi_2$. Ako je A točka, onda umjesto $\Pi + \{A\}$ pišemo $\Pi + A$.

Presjek svih afinih potprostora koji sadrže neprazan skup S najmanji je afini potprostor koji sadrži taj skup. Pritom je afinom potprostoru $\bigcap\limits_{S \subseteq P \preceq \mathcal{A}} P$ pridružen vektorski prostor $\bigcap\limits_{S \subseteq P \preceq \mathcal{A}} W_P$, gdje sa W_P označavamo vektorski prostor pridružen afinom potprostoru P. Time je opravdana upotreba oznake $[S]$ i naziva prostor razapet skupom S, analognih oznaci i istom pojmu za vektorske prostore.

Suma ravnina je asocijativna operacija, odnosno za ravnine Π_1, Π_2 i Π_3 nekog afinog prostora $\mathcal{A}$ vrijedi $(\Pi_1 + \Pi_2) + \Pi_3 = \Pi_1 + (\Pi_2 + \Pi_3)$.

Primjer 7. *Suma hiperravnine i točke*

Neka je $\mathcal{A}^n$ afini prostor, $A \in \mathcal{A}^n$ i Π^{n-1} hiperravnina tog prostora.

Ako je $A \in \Pi^{n-1}$, tada je $\Pi^{n-1} \cup A = \Pi^{n-1}$ pa je suma jednaka Π^{n-1}. Ako $A \notin \Pi^{n-1}$, tada za $B \in \Pi^{n-1}$ vektor $\overrightarrow{AB}$ nije u smjeru hiperravnine Π^{n-1}, ali je u smjeru sume $\Pi^{n-1} + A$. Stoga je smjer sume n-dimenzionalni vektorski prostor, pa je suma čitav prostor $\mathcal{A}^n$.

2.3 Grassmannove formule

O dimenzijama presjeka i sume dvaju potprostora afinog prostora izraženih pomoću dimenzija samih potprostora i njima pridruženih vektorskih prostora govori sljedeći teorem.

Teorem 1. *(Grassmannove formule)*
Neka su Π_1 i Π_2 ravnine n-dimenzionalnog afinog prostora $\mathcal{A}^n$, te neka su W_1 i W_2 smjerovi tih ravnina.

Ako je $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$, onda je

$$\dim(\Pi_1 + \Pi_2) = \dim(\Pi_1) + \dim(\Pi_2) - \dim(W_1 \cap W_2) + 1. \tag{2.3}$$

Ako je $\Pi_1 \cap \Pi_2 \neq \emptyset$, onda je

$$\dim(\Pi_1 + \Pi_2) = \dim(\Pi_1) + \dim(\Pi_2) - \dim(\Pi_1 \cap \Pi_2). \tag{2.4}$$

Dokaz. Istinitost formule (2.4) neposredno slijedi iz formule

$$\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$$

koja vrijedi za vektorske potprostore[2], jer je u tom slučaju

$$\dim(W_1 \cap W_2) = \dim(\Pi_1 \cap \Pi_2). \tag{2.5}$$

Neka je sada $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$. Neka je $\dim(\Pi_1) = k$, $\dim(\Pi_2) = l$. Uzmimo da ravnina Π_1 sadrži točku A, ravnina Π_2 točku B i da je baza prostora W_2 skup $\{b_1, b_2, \ldots, b_l\}$.

Očito $\overrightarrow{BA} \notin W_2$, jer bi u suprotnom bilo $A \in \Pi_1 \cap \Pi_2$ što proturječi pretpostavci.

Zato je skup $S = \left\{\overrightarrow{BA}, b_1, b_2, \ldots, b_l\right\}$ baza prostora $W_3 = [\overrightarrow{AB}] + W_2$ i $\dim W_3 = l + 1$. Ravnina točkom A koju određuje potprostor W_3 dana je sa $A + \Pi_2$ pa je $\dim(A + \Pi_2) = l + 1$.

Budući da je $\Pi_1 \cap (A + \Pi_2) \neq \emptyset$, iz (2.4) slijedi

$$\begin{aligned} \dim(\Pi_1 + \Pi_2) &= \dim(\Pi_1 + (A + \Pi_2)) = \\ &= k + (l + 1) - \dim(\Pi_1 \cap (A + \Pi_2)). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Nadalje je zbog (2.5)

$$\dim(\Pi_1 \cap (A + \Pi_2)) = \dim(W_1 \cap W_3).$$

[2]Neka su W_1 i W_2 potprostori vektorskog prostora V. Najmanji vektorski prostor koji sadrži W_1 i W_2 naziva se suma potprostora W_1 i W_2 i označava sa $W_1 + W_2$. Ako je $W_1 \cap W_2 = \{\theta\}$, onda kažemo da je suma $W_1 + W_2$ direktna.

Neka je $B \in \Pi_2$. Dokažimo da $\overrightarrow{AB} \notin W_1 + W_2$. Pretpostavimo li suprotno, odnosno da je $\overrightarrow{AB} \in W_1 + W_2$, tada postoje vektori $x \in W_1$ i $y \in W_2$ takvi da je $\overrightarrow{AB} = x + y$. Zatim, postoji točka $C \in \Pi_1$ takva da je $\overrightarrow{AC} = x$, pa je prema $(A1)$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = x + \overrightarrow{CB},$$

odnosno $\overrightarrow{CB} = y \in W_2$. Zbog toga je $C \in \Pi_2$, odnosno $C \in \Pi_1 \cap \Pi_2$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$.

Time smo dokazali da $\overrightarrow{AB} \notin W_1 + W_2$, pa budući da je $W_3 = [\overrightarrow{AB}, b_1, \ldots, b_l]$, vrijedi

$$W_1 \cap W_3 = W_1 \cap W_2,$$

pa iz (2.6) slijedi

$$\dim(\Pi_1 + \Pi_2) = k + l + 1 - \dim(W_1 \cap W_2),$$

odnosno, vrijedi (2.3). □

Direktna je posljedica teorema 1 je sljedeći korolar.

Korolar 1. *Neka je Π_1^k k-dimenzionalna, a Π_2^l l-dimenzionalna ravnina n-dimenzionalnog afinog prostora $\mathcal{A}^n$. Tada je*

$$\dim(\Pi_1^k + \Pi_2^l) \leq k + l + 1. \tag{2.7}$$

Znak jednakosti u (2.7) vrijedi ako i samo ako su ravnine Π_1^k i Π_2^l disjunktne, a suma potprostora $W_1^k, W_2^l \preceq V^n$ direktna.

2.4 Odnosi među ravninama

Pitanje međusobnih odnosa dviju ravnina Π_1^k i Π_2^l afinog prostora $\mathcal{A}^n$ prirodno je povezano s razmatranjem pridruženih potprostora W_1^k, W_2^l vektorskog prostora V^n.

Definicija 8. *Za ravnine Π_1 i Π_2 afinog prostora $\mathcal{A}^n$ kažemo da su* paralelne*, i pišemo $\Pi_1 \parallel \Pi_2$, ako za pripadne vektorske potprostore W_1 i W_2 vrijedi $W_1 \preceq W_2$ ili $W_1 \succeq W_2$.*

Za ravnine Π_1 i Π_2 kažemo da su paralelne u užem smislu *ako su paralelene i disjunktne.*

Definicija 9. *Za ravnine Π_1 i Π_2 afinog prostora $\mathcal{A}^n$ kažemo da su* mimosmjerne (mimoilazne) *ako se ne sijeku (disjunktne su) i nisu paralelene.*

Dvije ravnine afinog prostora mogu:

1) se sjeći, odnosno imati neprazan presjek,

2) biti paralelene,

3) biti mimoilazne (mimosmjerne).

2.4.1 Ravnine koje se sijeku

Jedan dovoljan uvjet da se dvije ravnine sijeku, tj. da im presjek bude neprazan, daje sljedeća propozicija.

Propozicija 6. *Neka su* Π_1^k *i* Π_2^l *ravnine u afinom prostoru* $\mathcal{A}^n$ *s pridruženim potprostorima* W_1^k *i* W_2^l *za koje je* $\dim(W_1^k \cap W_2^l) = m$*. Ako je*

$$k + l - m \geq n \tag{2.8}$$

onda se ravnine Π_1^k *i* Π_2^l *sijeku.*

Dokaz. Kad bi ravnine Π_1^k i Π_2^l bile disjunktne, prema jednakosti (2.3) bilo bi

$$k + l - m + 1 = \dim(\Pi_1^k + \Pi_2^l) \leq n,$$

odnosno

$$k + l - m \leq n - 1 < n,$$

što je u suprotnosti sa (2.8). □

Propozicija 7. *Neka su* Π_1 *i* Π_2 *ravnine u afinom prostoru* $\mathcal{A}$*. Nadalje, neka su ravninama* Π_1 *i* Π_2 *redom pridruženi vektorski prostori* W_1 *i* W_2*, te neka je* $A \in \Pi_1$ *i* $B \in \Pi_2$*. Tada vrijedi*

$$\Pi_1 \cap \Pi_2 \neq \emptyset \;\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \in W_1 + W_2.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $\Pi_1 \cap \Pi_2 \neq \emptyset$. Tada postoji točka T takva da je $T \in \Pi_1 \cap \Pi_2$. Budući da vrijedi $A, T \in \Pi_1$, slijedi da je $\overrightarrow{AT} \in W_1$. Analogno je $\overrightarrow{TB} \in W_2$. Stoga je

$$\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TB} = \overrightarrow{AB} \in W_1 + W_2.$$

Obratno, pretpostavimo da je $\overrightarrow{AB} \in W_1 + W_2$. Tada postoje vektori $x \in W_1$ i $y \in W_2$ takvi da je $\overrightarrow{AB} = x + y$. Prema definiciji afinog prostora za točku $A \in \Pi_1$ i vektor $x \in W_1$ postoji točka $C \in \Pi_1$ takva da je $\overrightarrow{AC} = x$. Analogno, za točku $B \in \Pi_2$ i vektor $-y \in W_2$ postoji točka $D \in \Pi_2$ takva da je $\overrightarrow{BD} = -y$, odnosno $\overrightarrow{DB} = y$. Tada je

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = x + \overrightarrow{CD} + y = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}.$$

Slijedi da je $\overrightarrow{CD} = \theta$, odnosno $C = D$ prema Propoziciji 1 b), pa je $C \in \Pi_1 \cap \Pi_2$. Dakle, $\Pi_1 \cap \Pi_2 \neq \emptyset$. □

Vrijede sljedeće tvrdnje:

– Ako se ravnine Π_1^k i Π_2^l sijeku, njihov presjek $\Pi_1^k \cap \Pi_2^l$ je također ravnina (propozicija 5).

– Ako se ravnine Π_1^k, Π_2^l afinog prostora $\mathcal{A}^n$ sijeku i sadržane su u nekoj ravnini Π^r, onda za dimenziju m njihovog presjeka vrijedi nejednakost $m \geq k + l - r$. Posebno je $m \geq k + l - n$. Ove tvrdnje posljedice su činjenice da je $\Pi_1^k + \Pi_2^l \subseteq \Pi^r \subseteq \mathcal{A}^n$.

– Ako je presjek ravnina Π_1^k, Π_2^l ravnina Π_3^m, tada postoji jedinstvena ravnina Π^r, dimenzije $r = k + l - m$, koja sadrži ravnine Π_1^k i Π_2^l. U tom slučaju je

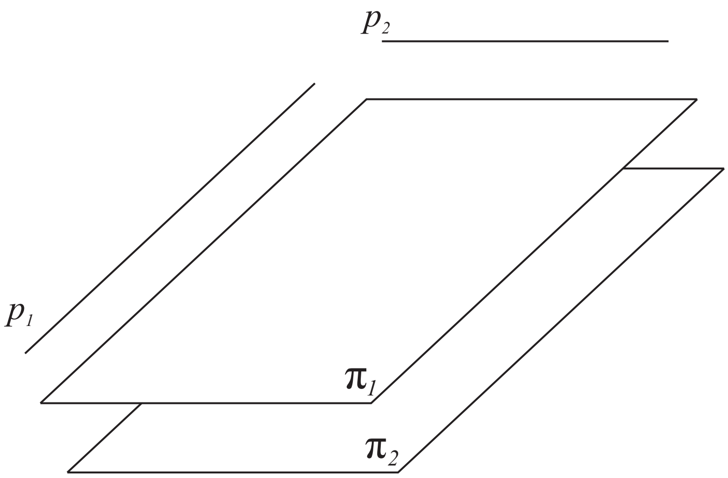
$$\Pi^r = \Pi_1^k + \Pi_2^l, \quad W^r = W_1^k + W_2^l.$$

Posebno je $\Pi_1^k \cap \Pi_2^l$ točka ako i samo ako je $W_1^k + W_2^l$ direktna suma.

2.4.2 Paralelne ravnine

Primijetimo da je inkluzija $\Pi_1^k \subseteq \Pi_2^l$ poseban slučaj paralelnosti.
Nadalje, ako su ravnine Π_1^k i Π_2^l paralelne i istih dimenzija, onda za pripadne vektorske prostore vrijedi $W_1^k = W_2^l$.

Primjer 8. *Paralelnost pravaca i ravnina u $\mathcal{A}^3$*



Slika 2.1: Paralelnost pravaca i 2-ravnina

Za pravce p_1 i p_2 i 2-ravnine Π_1 i Π_2 na slici 2.1 vrijedi:

$$\Pi_1 \parallel \Pi_2\,, \quad p_1 \parallel \Pi_1\,, \quad p_2 \parallel \Pi_1\,, \quad p_1 \nparallel p_2\,, \quad p_1 \parallel \Pi_2\,, \quad p_2 \parallel \Pi_2\,.$$

Uočavamo da paralelnost ravnina nije tranzitivna, jer vrijedi $p_1 \parallel \Pi_1$ i $\Pi_1 \parallel p_2$ ali $p_1 \nparallel p_2$.

Propozicija 8. *Neka je u afinom prostoru $\mathcal{A}^n$ zadana k-dimenzionalna ravnina Π_1^k i točka P. Postoji jedinstvena k-dimenzionalna ravnina Π_2^k točkom P koja je paralelna s Π_1^k.*

Dokaz. Opisana ravnina Π_2^k je afini potprostor točkom P sa smjerom W_1^k, gdje je W_1^k vektorski prostor pridružen prostoru Π_1^k. $\square$

Primjer 9.

Presjek neparalelnih hiperravnina afinog prostora $\mathcal{A}^n$ je $(n-2)$-dimenzionalna ravnina.

Neka su Π_1^{n-1} i Π_2^{n-1} neparalelne hiperravnine u afinom prostoru $\mathcal{A}^n$, te neka su W_1^{n-1} i W_2^{n-1} njima pridruženi vektorski prostori. To su očito različite hiperravnine, pa postoji točka $A \in \Pi_1^{n-1}$ takva da vrijedi $A \notin \Pi_2^{n-1}$. Stoga je $A + \Pi_2^{n-1} = \mathcal{A}^n$, pa je i $\Pi_1^{n-1} + \Pi_2^{n-1} = \mathcal{A}^n$.

Ako pretpostavimo da je presjek zadanih hiperravnina prazan, tada odgovarajuća Grassmannova formula daje:

$$\begin{aligned}\dim(\mathcal{A}^n) = n &= \dim(\Pi_1^{n-1} + \Pi_2^{n-1}) \\ &= (n-1) + (n-1) - \dim(W_1^{n-1} \cap W_2^{n-1}) + 1 \\ &= 2n - 1 - \dim(W_1^{n-1} \cap W_2^{n-1})\end{aligned}$$

pa je $\dim(W_1^{n-1} \cap W_2^{n-1}) = n - 1$.

Iz toga zaključujemo da su smjerovi hiperravnina Π_1^{n-1} i Π_2^{n-1} jednaki, pa su te hiperravnine paralelne, što je u kontradikciji s pretpostavkom. Stoga slijedi da je presjek hiperravnina neprazan.

Primjenimo li Grassmannovu formulu (2.4) dobivamo:

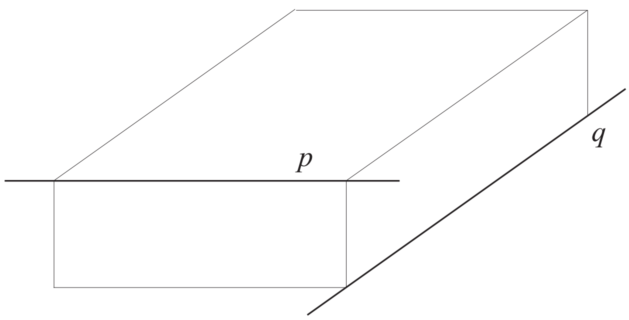
$$\begin{aligned}&n = \dim(\Pi_1^{n-1} + \Pi_2^{n-1}) = n - 1 + n - 1 - \dim(W_1^{n-1} \cap W_2^{n-1}), \\ &\dim(W_1^{n-1} \cap W_2^{n-1}) = n - 2,\end{aligned}$$

pa je

$$\dim(\Pi_1^{n-1} \cap \Pi_2^{n-1}) = \dim(W_1^{n-1} \cap W_2^{n-1}) = n - 2.$$

2.4.3 Mimosmjerne ravnine

U afinom prostoru $\mathcal{A}^3$ dva pravca mogu biti mimosmjerna (slika 2.2), ali pravac i 2-ravnina to ne mogu biti.



Slika 2.2: Mimosmjerni pravci u prostoru $\mathcal{A}^3$

U afinom prostoru dimenzije veće od 3, pravac i 2-ravnina mogu biti mimosmjerni.

Sljedeća propozicija opisuje način konstrukcije mimosmjernih ravnina u $\mathcal{A}^n$.

Propozicija 9. *Neka su Π_1^k i Π_2^l neparalelne ravnine afinog prostora $\mathcal{A}^n$ koje se sijeku, te neka je $\Pi_3^m = \Pi_1^k \cap \Pi_2^l$.*

Ako je $k + l - m < n$, onda je svaka k-dimenzionalna ravnina, koja je paralelna sa Π_1^k i nije sadržana u $\Pi_1^k + \Pi_2^l$, mimosmjerna s Π_2^l.

Dokaz. Kako je $r = k + l - m < n$, to je $\Pi^r = \Pi_1^k + \Pi_2^l$ pravi potprostor od $\mathcal{A}^n$ pa postoji točka C takva da je $C \in \mathcal{A}^n$ i $C \notin \Pi^r$.
Označimo sa Π_C^k k-dimenzionalnu ravninu točkom C koja je paralelna s Π_1^k (propozicija 8). Pokažimo da su ravnine Π_2^l i Π_C^k mimosmjerne.

Ravnine Π_C^k i Π_2^l nisu paralelne, jer bi u suprotnom bilo ili $W_1^k \subseteq W_2^l$ ili $W_1^k \supseteq W_2^l$, što je u proturječju s pretpostavkom da ravnine Π_1^k i Π_2^l nisu paralelne.

Neka je Π_C^r ravnina točkom C paralelna sa Π^r. Zbog $C \notin \Pi^r$ je $\Pi_C^r \neq \Pi^r$. Tada je $\Pi_C^k \subseteq \Pi_C^r$ i zato Π_C^k ne siječe Π_2^l, budući da bi u suprotnom točka promatranog presjeka pripadala paralelnim ravninama Π^r i Π_C^r. Dakle, ravnine Π_2^l i Π_C^k su mimosmjerne. □

Primjer 10.

Ako cijeli brojevi k, l, m i n zadovoljavaju nejednakosti

$$0 \leq m \leq k, \quad 0 \leq m \leq l, \quad k + l - m < n,$$

tada u n-dimenzionalnom afinom prostoru $\mathcal{A}^n$ postoje mimosmjerne ravnine Π^k i Π_2^l sa smjerovima $W_1^k, W_2^l \subset V^n$ čiji presjek $W_3^m = W_1^k \cap W_2^l$ ima dimenziju m.

Da bismo konstruirali mimosmjerne ravnine Π^k i Π_2^l primjenom propozicije 9, najprije ćemo konstruirati neparalelne ravnine Π_1^k i Π_2^l koje se sijeku u m-dimenzionalnoj ravnini Π_3^m.

Odaberimo u vektorskom prostoru V_n potprostore W^k, s bazom $\{a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_k\}$, i W^l, s bazom $\{a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_{l-m}\}$, tako da njihov presjek $W^k \cap W^l$ bude m-dimenzionalni potprostor W^m s bazom $\{a_1, \ldots, a_m\}$.

Neka je A bilo koja točka prostora $\mathcal{A}^n$, te neka su Π_1^k i Π_2^l ravnine točkom A sa smjerovima W^k i W^l. Ravnine Π_1^k i Π_2^l su neparalelne i sijeku se u m-dimenzionalnoj ravnini Π_3^m koja sadrži točku A i ima smjer W^m. Ravninu Π^k paralelnu sa Π_1^k i mimosmjernu sa Π_2^l možemo konstruirati na način opisan u propoziciji 9.

Primjer 11.

Ako ravnina Π^s sadrži mimosmjerne ravnine Π_1^k i Π_2^l sa smjerovima W_1^k i W_2^l, onda je $s \geq k + l - m + 1$, gdje je $m = \dim(W_1^k \cap W_2^l)$.

Ova tvrdnja trivijalno slijedi iz (2.3), jer ravnina Π^s sadrži potprostor $\Pi_1^k + \Pi_2^l$.

Primjer 12.

Ako su Π_1^k i Π_2^l mimosmjerne ravnine u afinom prostoru $\mathcal{A}^n$ pozitivnih dimenzija, onda vrijede nejednakosti

$$k \leq n - 2, \quad l \leq n - 2. \tag{2.9}$$

Nejednakosti (2.9) slijede iz prethodnog primjera za $s = n$.

Primjer 13.

Neka je Π_1^{n-1} hiperravnina, a Π_2^k k-ravnina u afinom prostoru $\mathcal{A}^n$, pri čemu je $k \geq 1$. Na temelju nejednakosti (2.9) zaključujemo da ravnine Π_1^{n-1} i Π_2^k ne mogu biti mimosmjerne.

Poglavlje 3

Analitička geometrija afinog prostora

Općenito se može proučavati analitička geometrija bilo kojeg afinog prostora. Međutim, takva općenitost ponegdje zahtijeva detaljnije definiranje te posebnu notaciju. Budući da smo orijentirani prema euklidskim prostorima kojima je pridruženo polje realnih brojeva $\mathbb{R}$, mi ćemo ubuduće promatrati realne afine prostore.

3.1 Linearno zavisan i linearno nezavisan skup točaka

U ovom poglavlju definirat ćemo linearno zavisan odnosno linearno nezavisan skup točaka u afinom prostoru $\mathcal{A}^n$ sa smjerom V^n.

Neka je u $\mathcal{A}^n$ dan skup koji sadrži $k+1$ točku A_0, A_1,..., A_k.

Promotrimo vektore $\overrightarrow{A_iA_j}$ za $i, j \in \{0, 1, \ldots, k\}$ i sa $V(A_0, A_1, \ldots, A_k)$ označimo potprostor od V^n kojeg određuju ti vektori. Neka je p njegova dimenzija. Kako je

$$\overrightarrow{A_iA_j} = \overrightarrow{A_iA_0} + \overrightarrow{A_0A_j} = \overrightarrow{A_0A_j} - \overrightarrow{A_0A_i},$$

svi se vektori $\overrightarrow{A_iA_j}$ mogu prikazati kao linearne kombinacije vektora kojima je početna točka A_0. Na taj način vektori

$$\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k} \tag{3.1}$$

čine bazu prostora $V(A_0, A_1, \ldots, A_k)$, odnosno

$$V(A_0, A_1, \ldots, A_k) = \left[\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k}\right].$$

Broj linearno nezavisnih vektora među njima je najviše k. Dakle,

$$\dim V(A_0, A_1, \ldots, A_k) = p \leq k.$$

Definicija 10. *Skup* $\{A_0, A_1, \ldots, A_k\}$ *točaka afinog prostora je* linearno zavisan (linearno nezavisan)*, ako je skup vektora* $\left\{\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k}\right\}$ *linearno zavisan (linearno nezavisan).*
Kažemo još i da su točke $A_0, A_1, \ldots, A_k$ *linearno zavisne (linearno nezavisne).*[1]

Radi jednostavnosti za linearno zavisan (linearno nezavisan) skup točaka reći ćemo da je to zavisan (nezavisan) skup točaka.

Pretpostavimo da je prvih p vektora u (3.1) linearno nezavisno. Tada p-dimenzionalna ravnina određena točkom A_0 i vektorima $\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_p}$ sadrži sve zadane točke. Ne postoji ravnina dimenzije manje od p koja sadrži sve točke A_i, $i = 0, 1, \ldots, k$.

Ako je $p < k$, točke $A_0, A_1, \ldots, A_k$ su linearno zavisne.

Ako je $p = k$, točke $A_0, A_1, \ldots, A_k$ su linearno nezavisne.

Dakle, linearno nezavisan skup točaka $\{A_0, A_1, \ldots, A_k\}$ afinog prostora $\mathcal{A}^n$ sadrži jedna i samo jedna k-dimenzionalna ravnina tog prostora.

3.2 Afini koordinatni sustav. Koordinate točke

Analitička geometrija nekog prostora temelji se na koordinatizaciji tog prostora. U n-dimenzionalnom afinom prostoru $\mathcal{A}^n$ uvest ćemo koordinatni sustav pomoću pridruženog vektorskog prostora V^n nad poljem F.

Definicija 11. *Neka je* $\mathcal{A}^n$ *afini prostor,* $O \in \mathcal{A}^n$ *bilo koja točka, te neka je* $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *bilo koja baza tom afinom prostoru pridruženog vektorskog prostora* V^n *nad poljem* F*. Uređena* $(n+1)$*-torka*

$$(O; e_1, e_2, \ldots, e_n) \tag{3.2}$$

naziva se afini koordinatni sustav*.*

Točka O *je* ishodište*, a* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *su* koordinatni vektori *tog afinog koordinatnog sustava.*

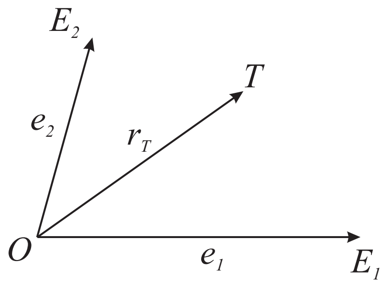
Točke $E_1, E_2, \ldots, E_n$ *za koje vrijedi* $\overrightarrow{OE_i} = e_i$*,* $i = 1, 2, \ldots, n$*, nazivaju se* jedinične točke*, a skup* $\{A | \overrightarrow{OA} = \lambda \overrightarrow{OE_i}, \lambda \in F\}$ *naziva se* i-ta koordinatna os.

Točke $O, E_1, E_2, \ldots, E_n$ u potpunosti određuju koordinatni sustav, a osnovno im je svojstvo da je skup točaka $\{O, E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ linearno nezavisan.

Za bilo koju točku $T \in \mathcal{A}^n$ pripadni radijus-vektor r_T može se na jedinstven način prikazati u obliku

$$r_T = \overrightarrow{OT} = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n, \quad x_i \in F, i = 1, \ldots, n. \tag{3.3}$$

[1]Neka je $\mathcal{A}^n$ n-dimenzionalni afini prostor i $\{A_0, A_1, \ldots, A_k\} \subseteq \mathcal{A}^n$. Ako je $k > n$ i svaki $(n+1)$-člani podskup skupa $\{A_0, A_1, \ldots, A_k\}$ linearno nezavisan, onda kažemo da su *točke* $A_0, A_1, \ldots, A_k$ *u općem položaju.* Kada je $k \leq n$ kažemo da su točke $A_0, A_1, \ldots, A_k$ u općem položaju ako je skup $\{A_0, A_1, \ldots, A_k\}$ linearno nezavisan.



Slika 3.1: Afini koordinatni sustav prostora $\mathcal{A}^2$

Na taj način je izborom koordinatnog sustava (3.2) u afinom prostoru $\mathcal{A}^n$ svakoj točki $T \in \mathcal{A}^n$ na jednoznačan način pridružena uređena n-torka skalara iz F.

Vrijedi i obratno. Neka je $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bilo koja uređena n-torka skalara iz F. S obzirom na odabranu bazu prostora V^n jednoznačno je određen vektor $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ te točka T takva da je $\overrightarrow{OT} = v$.

Definicija 12. *Neka je $(O; e_1, e_2, \ldots, e_n)$ afini koordinatni sustav prostora $\mathcal{A}^n$ i $T \in \mathcal{A}^n$. Brojevi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ takvi da je*

$$\overrightarrow{OT} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n, \quad x_i \in F$$

nazivaju se koordinate točke T *u koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2, \ldots, e_n)$ te pišemo $\overrightarrow{OT} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ i $T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

Ishodište O ima koordinate $(0, 0, \ldots, 0)$.

Jedinična točka E_i određena je sa $\overrightarrow{OE_i} = e_i = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}\, e_j$, gdje je $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{za } i = j \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$ Kroneckerov δ simbol. Očito je $E_i(0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-to mjesto}}, 0, \ldots, 0)$.

Izborom afinog koordinatnog sustava uspostavljena je bijekcija između skupa svih točaka afinog prostora $\mathcal{A}^n$ i skupa svih uređenih n-torki skalara iz polja F.

Primjer 14.

Neka su A i B dvije točke afinog prostora $\mathcal{A}^n$ s koordinatama $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $B(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ u koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

Odredimo koordinate vektora $\overrightarrow{AB}$.

Iz $r_A = \overrightarrow{OA} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $r_B = \overrightarrow{OB} = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ i $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ slijedi

$$\overrightarrow{AB} = r_B - r_A = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i - \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) e_i$$

pa su $[y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n]$ koordinate vektora $\overrightarrow{AB}$.

3.2.1 Dijeljenje orijentirane dužine u zadanom omjeru

Definicija 13. *Neka je u afinom prostoru $\mathcal{A}^n$ zadan pravac p i tri točke tog pravca A, B, X, pri čemu je $A \neq B \neq X$. Ako je $\overrightarrow{AX} = \lambda\,\overrightarrow{XB}$ onda kažemo da* točka X dijeli orijentiranu dužinu $\overrightarrow{AB}$ u omjeru λ, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq -1$ *i pišemo* $(ABX) = \lambda$.

Omjer λ je uvijek različit od -1, jer bi u tom slučaju iz $\overrightarrow{AX} = -\overrightarrow{XB}$ slijedilo $A = B$. Drugim riječima, za $A = B$ iz $\overrightarrow{AX} = \lambda\,\overrightarrow{XB}$ slijedi $\lambda = -1$ neovisno o X.

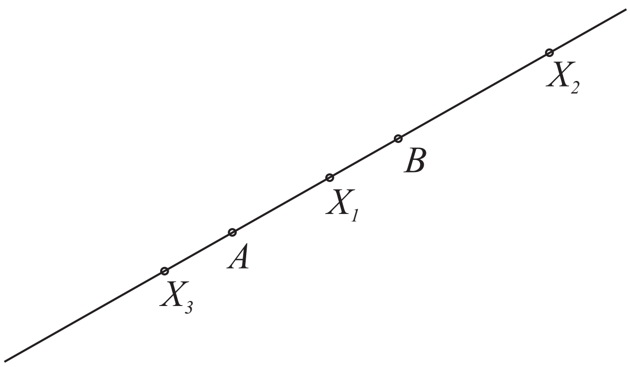
Promotrimo zašto je u definiciji naglašeno $B \neq X$.
Za $X = B$ je $\overrightarrow{XB} = \overrightarrow{XX} = \theta$, pa za $A = B$ jednakost $\overrightarrow{AX} = \lambda\,\overrightarrow{XB}$ vrijedi za sve λ, a za $A \neq B$ nije ispunjena ni za koji $\lambda \in \mathbb{R}$.

Za $X = A$ je $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AA} = \theta$ i $\overrightarrow{XB} = \overrightarrow{AB} \neq \theta$, pa je $\lambda = (ABA) = 0$.

Primjer 15.

Za točke X_1, X_2, X_3 na slici 3.2.1 vrijedi:

$$\begin{aligned} (ABX_1) &= \lambda_1, \quad \lambda_1 > 0 \\ (ABX_2) &= \lambda_2, \quad \lambda_2 \in \langle -\infty, -1 \rangle \\ (ABX_3) &= \lambda_3, \quad \lambda_3 \in \langle -1, 0 \rangle \end{aligned}$$



Slika 3.2: Dijeljenje orijentirane dužine u zadanom omjeru

Neka je u prostoru $\mathcal{A}^n$ zadan afini koordinatni sustav i točke $A, B, X \in \mathcal{A}^n$ pri čemu je $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $B(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i neka je $\overrightarrow{AX} = \lambda\,\overrightarrow{XB}$. Tada je

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AX} &= [\, x_1 - a_1, x_2 - a_2, \ldots, x_n - a_n] \,, \\ \overrightarrow{XB} &= [\, b_1 - x_1, b_2 - x_2, \ldots, b_n - x_n] \,, \end{aligned}$$

pa iz jednakosti $\overrightarrow{AX} = \lambda\,\overrightarrow{XB}$ slijedi

$$r_X - r_A = \lambda(r_B - r_X),$$

odnosno

$$x_i - a_i = \lambda(b_i - x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Rješavanjem jednadžbi po x_i dobivamo:

$$x_i = \frac{a_i + \lambda b_i}{1 + \lambda}, \quad \lambda \neq -1, \ \ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.4}$$

Posebno je važan slučaj kada je $\lambda = 1$. Tada iz (3.4) slijedi:

$$x_i = \frac{a_i + b_i}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.5}$$

Točka X za koju je $(ABX) = 1$ zove se *polovište* orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$, a njezin radijus-vektor je

$$\overrightarrow{OX} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

Polovišta orijentiranih dužina $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$ se podudaraju.

Primjer 16.

Neka je $(ABP) = x$. Odredimo omjere (APB), (BAP), (BPA), (PAB) i (PBA).

Ako je $(APB) = y_1$, onda je $\overrightarrow{AB} = y_1\overrightarrow{BP}$, pa iz $\overrightarrow{AP} = x\,\overrightarrow{PB}$ slijedi

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} &= -x\,\overrightarrow{BP}\\
\overrightarrow{AB} &= -(1+x)\,\overrightarrow{BP}\\
y_1 &= -1 - x.
\end{aligned}$$

Ako je $(BAP) = y_2$, onda iz $\overrightarrow{BP} = y_2\,\overrightarrow{PA}$ i $\overrightarrow{AP} = x\,\overrightarrow{PB}$ slijedi

$$\begin{aligned}
-\overrightarrow{PA} &= -x\,\overrightarrow{BP}\\
\overrightarrow{BP} &= \frac{1}{x}\,\overrightarrow{PA}\\
y_2 &= \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Ako je $(BPA) = y_3$, onda iz $\overrightarrow{BA} = y_3\,\overrightarrow{AP}$ i $\overrightarrow{AP} = x\,\overrightarrow{PB}$ slijedi

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AP} &= x\,(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB})\\
(1+x)\overrightarrow{AP} &= -x\,\overrightarrow{BA}\\
\overrightarrow{BA} &= -\frac{1+x}{x}\,\overrightarrow{AB}\\
y_3 &= -\frac{1+x}{x}.
\end{aligned}$$

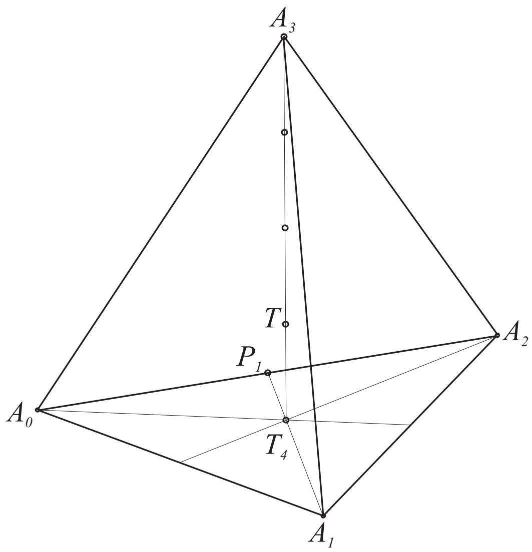
Ako je $(PAB) = y_4$, onda iz $\overrightarrow{PB} = y_4\,\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{AP} = x\,\overrightarrow{PB}$ slijedi

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} &= x\,\overrightarrow{PB}\\
(1+x)\overrightarrow{PB} &= -\overrightarrow{BA}\\
\overrightarrow{PB} &= -\frac{1}{1+x}\,\overrightarrow{BA}\\
y_4 &= -\frac{1}{1+x}.
\end{aligned}$$

Ako je $(PBA) = y_5$, onda iz $\overrightarrow{PA} = y_5\,\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AP} = x\,\overrightarrow{PB}$ slijedi

$$\begin{aligned}
-\overrightarrow{PA} &= x\,(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB})\\
-(1+x)\overrightarrow{PA} &= x\,\overrightarrow{AB}\\
\overrightarrow{PA} &= \frac{-x}{1+x}\,\overrightarrow{AB}\\
y_5 &= \frac{-x}{1+x}.
\end{aligned}$$

Primjer 17. *Koordinate težišta trostrane piramide*
Zadani su vrhovi $A_i(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$ piramide $A_1A_2A_3A_4$. Odredimo kooordinate njegovog težišta T.



Slika 3.3: Trostrana piramida $A_1A_2A_3A_4$ s težištem T

Neka je T_4 težište trokuta $A_1A_2A_3$.
Koristeći poznate činjenice da težište trokuta dijeli težišnicu tog trokuta u omjeru 2 : 1, a težište trostrane piramide dijeli težišnicu te piramide u omjeru 3 : 1, dobivamo

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OT_4} &= \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1T_4} = \overrightarrow{OA_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{A_1P_1}\\
&= \overrightarrow{OA_1} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2P_1}) = \overrightarrow{OA_1} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{A_1A_2} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A_2A_3})\\
&= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}).
\end{aligned}$$

Nadalje je

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT} &= \overrightarrow{OT_4} + \frac{1}{4}\overrightarrow{T_4A_4} = \overrightarrow{OT_4} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA_4} - \overrightarrow{OT_4}) = \frac{3}{4}\,\overrightarrow{OT_4} + \frac{1}{4}\,\overrightarrow{OA_4} \\ &= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\,(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}) + \frac{1}{4}\,\overrightarrow{OA_4} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{OA_i}.\end{aligned}$$

Prema tome je težište trostrane piramide određeno sa

$$T\;\left(\frac{x_1^1 + x_1^2 + x_1^3 + x_1^4}{4}, \frac{x_2^1 + x_2^2 + x_2^3 + x_2^4}{4}, \frac{x_3^1 + x_3^2 + x_3^3 + x_3^4}{4}\right).$$

3.2.2 Transformacija afinog koordinatnog sustava

Promotrimo koordinatne sustave $(O; e_1, e_2, \ldots, e_n)$ i $(O'; e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ u afinom prostoru $\mathcal{A}^n$. Kako su $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ i $\{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ dvije baze istog vektorskog prostora V^n, to je veza među njima dana matricama prijelaza A i B:

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i, \quad \mathsf{A} = (\alpha_{ij})\,, \quad \det \mathsf{A} \neq 0, \tag{3.6}$$

$$e_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} e'_i, \quad \mathsf{B} = (\beta_{ij})\,, \tag{3.7}$$

gdje je $\mathsf{B} = \mathsf{A}^{-1}$, $\det \mathsf{B} = \frac{1}{\det \mathsf{A}} \neq 0$.

Neka je $\overrightarrow{OO'} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Nadalje, neka je $T \in \mathcal{A}^n$ bilo koja točka s koordinatama $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ u prvom koordinatnom sustavu i koordinatama $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ u drugom koordinatnom sustavu. Odredimo vezu među tim koordinatama.

Zbog $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'T}$, odnosno $\overrightarrow{O'T} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OO'}$, vrijedi

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i &= \sum_{j=1}^{n} x_j e_j - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j = \sum_{j=1}^{n} (x_j - \alpha_j) e_j = \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left((x_j - \alpha_j)\sum_{i=1}^{n}\beta_{ij} e'_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\underbrace{\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}(x_j - \alpha_j)}_{x'_i}\right) e'_i.\end{aligned}$$

Zbog jednoznačnosti prikaza vektora s obzirom na zadanu bazu vrijedi

$$x'_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}(x_j - \alpha_j), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.8}$$

Analologno, iz $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'T}$, slijedi

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x_i e_i &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x'_j e_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x'_j \right)}_{x_i} e_i\end{aligned}$$

pa je

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x'_j + \alpha_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.9}$$

Jednadžbe (3.8) i (3.9) poznate su kao *jednadžbe transformacije koordinata* točaka afinog prostora. Uočimo da, za razliku od jednadžbi transformacije baza vektorskog prostora, jednadžbe transformacije koordinata točaka afinog prostora nisu homogene.

Uz uobičajene oznake

$$\mathsf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ \mathsf{X}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}, \ \mathsf{A}_0 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \ \mathsf{A} = (\alpha_{ij}), \quad \mathsf{A}^{-1} = (\beta_{ij}) = \mathsf{B},$$

dobivene jednadžbe se mogu napisati u matričnom obliku

$$\mathsf{X}' = \mathsf{A}^{-1}(\mathsf{X} - \mathsf{A}_0), \tag{3.10}$$

$$\mathsf{X} = \mathsf{A}\,\mathsf{X}' + \mathsf{A}_0. \tag{3.11}$$

Ekvivalentnost jednadžbi (3.10) i (3.11) je očita.
Matrica A naziva se *matrica prijelaza*, odnosno transformacije, iz koordinatnog sustava $(O; e_1, e_2, \ldots, e_n)$ u koordinatni sustav $(O'; e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$.

Posebno, ako je $e_i = e'_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, tada je $\mathsf{A} = \mathsf{A}^{-1} = \mathsf{E}$ (E označava jediničnu matricu) pa jednadžbe (22) i (23) poprimaju oblik

$$\begin{aligned} x_i &= x'_i + \alpha_i, \\ x'_i &= x_i - \alpha_i, \end{aligned} \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.12}$$

Transformacija ovog tipa naziva se *translacija koordinatnog sustava za vektor* $\overrightarrow{OO'}$.

Primjer 18. *Transformacije koordinata točaka afinog prostora*
Odrediti jednadžbe transformacije koordinata afinog prostora $\mathcal{A}^4$ pri prijelazu sa sustava $(O; e_1, e_2, e_3, e_4)$, gdje je $e_i = \overrightarrow{OE_i}$, $i = 1, \ldots, n$, na sustav $(E_2; \overrightarrow{E_2O}, \overrightarrow{E_2E_1}, \overrightarrow{E_2E_3}, \overrightarrow{E_2E_4})$.

Ishodište drugog koordinatnog sustava je točka E_2, pa je

$$\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OE_2} = e_2 = [0, 1, 0, 0].$$

Izrazimo vektore drugog koordinatnog sustava pomoću vektora polaznog sustava.

$$
\begin{aligned}
e_1' &= \overrightarrow{E_2O} = -e_2 = [0,-1,0,0] \\
e_2' &= \overrightarrow{E_2E_1} = \overrightarrow{E_2O} + \overrightarrow{OE_1} = e_1 - e_2 = [1,-1,0,0] \\
e_3' &= \overrightarrow{E_2E_3} = \overrightarrow{E_2O} + \overrightarrow{OE_3} = e_3 - e_2 = [0,-1,1,0] \\
e_4' &= \overrightarrow{E_2E_4} = \overrightarrow{E_2O} + \overrightarrow{OE_4} = e_4 - e_2 = [0,-1,0,1]
\end{aligned}
$$

Koordinate vektora e_i' u sustavu $(O; e_1, e_2, e_3, e_4)$ su elementi i-tog stupca matrice prijelaza, pa je

$$
\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .
$$

Jednadžba transformacije koordinata u matričnom obliku je

$$
\mathsf{X} = \mathsf{A}\mathsf{X}' + \mathsf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .
$$

3.3 Jednadžba k-dimenzionalne ravnine

Neka je u $\mathcal{A}^n$ zadana k-dimenzionalna ravnina Π^k određena točkom T_0 i k-dimenzionalnim potprostorom $W^k \preceq V^n$, te neka je odabran afini koordinatni sustav $(O; e_1, \ldots, e_n)$ prostora $\mathcal{A}^n$ i baza $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ prostora W^k.

3.3.1 Parametarska jednadžba k-ravnine

Neka je Π^k k-dimenzionalna ravnina točkom T_0 sa smjerom W^k. Svaka točka $T \in \Pi^k$ zadovoljava jednakost

$$
\overrightarrow{T_0T} = \sum_{j=1}^{k} \tau_j a_j \ , \ \tau_j \in \mathbb{R}.
$$

Neka je r_0 radijus-vektor točke T_0. Tada za radijus-vektor r točke T iz jednakosti $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OT_0} + \overrightarrow{T_0T}$ slijedi

$$
\boxed{r = r_0 + \sum_{j=1}^{k} \tau_j \, a_j} \ . \tag{3.13}
$$

Svakoj točki $T \in \Pi^k$ na opisani je način jednoznačno pridružena k-torka realnih brojeva $(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k)$. Obratno, svaki radijus-vektor r određen jednakošću (3.13) za bilo koju k-torku realnih brojeva $(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k)$ jednoznačno određuje točku T ravnine Π^k.

Jednakost (3.13) zadovoljavaju, dakle, radijus-vektori r točaka ravnine Π^k i samo oni, pa se zato kaže da je (3.13) *jednadžba ravnine* Π^k.
Skalari $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ su afine koordinate točaka ravnine Π^k kao k-dimenzionalnog prostora s obzirom na koordinatni sustav $(T_0, a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Uobičajeno je da se skalari $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ nazivaju parametrima, a (3.13) *parametarskom jednadžbom ravnine* Π^k *u vektorskom obliku.*

Promotrimo što predstavlja skup radijus-vektora svih točaka ravnine Π^k. Za točku $T \in \Pi^k$ je

$$r_T = r_0 + w \ , \quad w \in W^k,$$

što znači da je skup $\{r_T |\ T \in \Pi^k\}$ linearna mnogostrukost[2] $r_0 + W^k$ određena vektorom r_0 i potprostorom W^k.

Jednadžba (3.13) može se jednostavno zapisati u koordinatnom obliku, ako uvedemo ove oznake

$$\begin{aligned} r_0 &= \sum_{i=1}^n x_i^0 e_i, \\ r &= \sum_{i=1}^n x_i e_i, \\ a_j &= \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} e_i \ , \quad j = 1, 2, \ldots, k \ . \end{aligned}$$

Uz te oznake, iz (3.13) slijedi

$$\sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x_i^0 e_i + \sum_{j=1}^k \tau_j \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} e_i = \sum_{i=1}^n \left(x_i^0 + \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} \tau_j \right) e_i \ ,$$

pa je

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + \alpha_{11}\,\tau_1 + \alpha_{12}\,\tau_2 + \ldots + \alpha_{1k}\,\tau_k \\ x_2 &= x_2^0 + \alpha_{21}\,\tau_1 + \alpha_{22}\,\tau_2 + \ldots + \alpha_{2k}\,\tau_k \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_n &= x_n^0 + \alpha_{n1}\,\tau_1 + \alpha_{n2}\,\tau_2 + \ldots + \alpha_{nk}\,\tau_k \ . \end{aligned}} \tag{3.14}$$

Jednadžbe (3.14) su *parametarske jednadžbe k-ravnine* Π^k *u koordinatnom obliku.*

Posebno će jednadžba pravca Π^1 imati oblik $r = r_0 + \tau a$, gdje vektor a zovemo *vektorom smjera tog pravca.*

[2] Neka je V vektorski prostor nad poljem F i W potprostor od V. Skup $V/W = \{a + W |\, a \in V\}$ sa zbrajanjem $(a + W) + (b + W) = (a + b) + W$ i množenjem skalarom $\alpha(a + W) = (\alpha a) + W$, $\alpha \in F$, je vektorski prostor nad F, kojeg nazivamo *kvocijentni prostor* nad V po potprostoru W. Elementi skupa V/W zovu se *linearne mnogostrukosti.*

Ako je $a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, onda parametarske jednadžbe pravca Π^1 u koordinatnom obliku glase

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + \tau\alpha_1 \\ x_2 &= x_2^0 + \tau\alpha_2 \\ \dots &\quad \dots \\ x_n &= x_n^0 + \tau\alpha_n \end{aligned} \tag{3.15}$$

Analogno se dobiva da je parametarska jednadžba 2-ravnine Π^2 u vektorskom obliku

$$r = r_0 + \tau_1 a_1 + \tau_2 a_2 \tag{3.16}$$

odnosno u koordinatnom obliku

$$x_i = x_i^0 + \alpha_{i1}\,\tau_1 + \alpha_{i2}\,\tau_2 \ , \quad i = 1, 2, \dots, n \ . \tag{3.17}$$

3.3.2 Opća jednadžba k-ravnine

Jednadžbe (3.14) su parametarske jednadžbe ravnine Π^k s parametrima $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$. Eliminacijom tih parametara dobit ćemo opću jednadžbu ravnine Π^k.

Jednadžbe (3.14) napisane u obliku

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\,\tau_1 + \alpha_{12}\,\tau_2 + \ldots + \alpha_{1k}\,\tau_k &= x_1 - x_1^0 \\ \dots \quad \dots &\quad \dots \\ \alpha_{k1}\,\tau_1 + \alpha_{k2}\,\tau_2 + \ldots + \alpha_{kk}\,\tau_k &= x_k - x_k^0 \\ \dots \quad \dots &\quad \dots \\ \alpha_{n1}\,\tau_1 + \alpha_{n2}\,\tau_2 + \ldots + \alpha_{nk}\,\tau_k &= x_n - x_n^0 \end{aligned} \tag{3.18}$$

možemo shvatiti kao sustav n jednadžbi s k nepoznanica $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ kojemu je matrica sustava

$$\mathsf{A} = (\alpha_{ij}) \ .$$

Kako su stupci te matrice koordinate vektora $a_1, \dots, a_k$ s obzirom na bazu $\{e_1, \dots, e_n\}$, oni su linearno nezavisni, tj. $rang\,\mathsf{A} = k$.
Bez gubitka općenitosti možemo pretpostaviti da je minora koju određuje prvih k jednadžbi različita od nule, odnosno da je

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k1} & \dots & \alpha_{kk} \end{vmatrix} \neq 0 \ .$$

Zbog toga sustav

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\,\tau_1 + \alpha_{12}\,\tau_2 + \ldots + \alpha_{1k}\,\tau_k &= x_1 - x_1^0 \\ \dots \quad \dots &\quad \dots \\ \alpha_{k1}\,\tau_1 + \alpha_{k2}\,\tau_2 + \ldots + \alpha_{kk}\,\tau_k &= x_k - x_k^0 \end{aligned} \tag{3.19}$$

ima jedno rješenje, ono je oblika

$$\tau_j = L_j(x_1 - x_1^0, \dots, x_k - x_k^0) \ , \quad j = 1, \dots, k \ ,$$

gdje je L_j homogeni linearni polinom[3] pa se može zapisati

$$\tau_j = L_j(x_1, \ldots, x_k) + \alpha_j \ , \quad j = 1, 2, \ldots, k \ . \tag{3.20}$$

Ako se to rješenje uvrsti u posljednjih $n-k$ jednadžbi sustava (3.18) dobivamo

$$\begin{aligned} x_{k+1} =& \beta_{k+1,1}\ x_1 + \beta_{k+1,2}\ x_2 + \ldots + \beta_{k+1,k}\ x_k + \beta_{k+1} \\ \ldots& \quad \ldots \quad \ldots \\ x_n =& \beta_{n,1}\ x_1 + \beta_{n,2}\ x_2 + \ldots + \beta_{n,k}\ x_k + \beta_n \end{aligned} \tag{3.21}$$

Dakle, svaka je k-dimenzionalna ravnina u $\mathcal{A}^n$ određena sustavom $n-k$ nezavisnih linearnih jednadžbi.
Nezavisnost jednadžbi (3.21) je očita ako imamo u vidu matricu sustava

$$\mathsf{B} = \begin{bmatrix} \beta_{k+1,1} & \ldots & \beta_{k+1,k} & -1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{n,1} & \ldots & \beta_{n,k} & 0 & \ldots & -1 \end{bmatrix},$$

jer je $rang\,\mathsf{B} = n-k$.

Vrijedi i obrat, svaki skup $n-k$ nezavisnih linearnih jednadžbi oblika (3.21) predstavlja jednu k-dimenzionalnu ravninu. Dovoljno je uočiti da se (3.21) može pisati i ovako

$$\begin{aligned} x_1 &= \tau_1 \\ &\ldots \\ x_k &= \tau_k \\ x_{k+1} &= \beta_{k+1,1}\ \tau_1 + \ldots + \beta_{k+1,k}\ \tau_k + \beta_n \\ &\ldots \\ x_n &= \beta_{n,1}\ \tau_1 + \ldots + \beta_{n,k}\ \tau_k + \beta_n \end{aligned}$$

što je specijalni oblik parametarskih jednadžbi k-ravnine određene točkom $T_0\,(0, \ldots, 0, \beta_{k+1}, \ldots, \beta_n)$ i linearno nezavisnim vektorima:

$$[1, 0, \ldots, 0, \beta_{k+1,1}, \ldots, \beta_{n,1}], \ \ldots \ , [0, 0, \ldots, 1, \beta_{k+1,k}, \ldots, \beta_{n,k}] \ .$$

Nezavisnost tih vektora slijedi iz činjenice da matrica kojoj su ti vektori stupci ima rang k.
Jednadžbe (3.21) su zato jednadžbe k-dimenzionalne ravnine.

Naravno, svaki sustav linearnih jednadžbi ekvivalentan sustavu (3.21) predstavlja jednadžbu te k-ravnine. Općenito, takav ekvivalentan sustav čini $n-k$ nezavisnih linearnih jednadžbi oblika

$$\boxed{\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots& \\ a_{n-k,1}x_1 + a_{n-k,2}x_2 + \ldots + a_{n-k,n}x_n &= b_{n-k} \end{aligned}} \tag{3.22}$$

[3] Preslikavanje $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definirano sa $f(x) = \sum a_{i_1,\ldots,i_n}\, x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$, gdje je $x = (x_1, \ldots, x_n)$, je *homogeni polinom stupnja d* ako je $a_{i_1,\ldots,i_n} = 0$ za sve $i_1, \ldots, i_n$ za koje je $\sum i_k \neq d$. Za $d = 1$ homogeni polinom je oblika $f(x) = \beta_1 x_1 + \ldots \beta_n x_n$ i naziva se *homogeni linearni polinom.*

pri čemu je matrica $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{n-k,1} & \dots & a_{n-k,n} \end{bmatrix}$ ranga $n-k$.

Svaki sustav linearnih jednadžbi (3.22) uz dani uvjet za rang matrice sustava predstavlja *opći oblik jednadžbe k-ravnine.*
Naime, skup svih rješenja tog sustava je linearna mnogostrukost $r_0 + W^k$, a ona određuje jednu k-ravninu.

Primjer 19. *Određivanje opće jednadžbe k-ravnine zadane parametaskom jednadžbom*

Neka je ravnina Π u $\mathcal{A}^5$ zadana parametarskom jednadžbom

$$\begin{aligned} x_1 &= \ \ 2 + \tau_1 + \tau_2 \\ x_2 &= \ \ 1 + 2\tau_1 + \tau_2 \\ x_3 &= -3 + \tau_1 + 2\tau_2 \\ x_4 &= \ \ 3 + 3\tau_1 + \tau_2 \\ x_5 &= \ \ 1 + \tau_1 + 3\tau_2 \end{aligned}$$

Odredimo sustav linearno nezavisnih jednadžbi koje određuju tu ravninu, odnosno njenu opću jednadžbu.

Vektori $a_1 = [1,2,1,3,1]$ i $a_2 = [1,1,2,1,3]$, su linearno nezavisni, pa je ravnina dvodimenzionalna. Za njenu opću jednadžbu potrebne su, dakle, tri nezavisne jednadžbe s nepoznanicama x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 .
Treba iz parametarske jednadžbe ravnine eliminirati parametre. Iz prvih dviju jednadžbi mogu se izraziti τ_1 i τ_2:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= -\,x_1 + x_2 + 1 \\ \tau_2 &= \ 2\,x_1 - x_2 - 3 \end{aligned}$$

Ako se uvrste tako izraženi parametri τ_1 i τ_2 u preostale tri jednadžbe dobije se opća jednadžba prostora Π

$$\begin{aligned} 3\,x_1 - x_2 - x_3 &= 8 \\ x_1 - 2\,x_2 + x_4 &= 3 \\ 5\,x_1 - 2\,x_2 - x_5 &= 7 \end{aligned}$$

Primjer 20. *Određivanje parametarske jednadžbe k-ravnine iz njene opće jednadžbe*

Odredimo parametarske jednadžbe ravnine u $\mathcal{A}^4$ zadane sustavom jednadžbi

$$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 + \ \ x_4 &= \ \ 3 \\ x_1 + 4\,x_2 + 5\,x_3 + 2\,x_4 &= \ \ 2 \\ 2\,x_1 + 9\,x_2 + 8\,x_3 + 3\,x_4 &= \ \ 7 \\ 3\,x_1 + 7\,x_2 + 7\,x_3 + 2\,x_4 &= 12 \\ 5\,x_1 + 7\,x_2 + 9\,x_3 + 2\,x_4 &= 20 \end{aligned}$$

Taj je sustav rješiv jer matrica sustava i proširena matrica sustava imaju rang 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 9 & 8 & 3 & 7 \\ 3 & 7 & 7 & 2 & 12 \\ 5 & 7 & 9 & 2 & 20 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Prve tri jednadžbe su linearno nezavisne, a polazni sustav jednadžbi ekvivalentan je sustavu

$$\begin{aligned} x_1 + 7\,x_3 + 3\,x_4 &= -3 \\ x_2 - 2\,x_3 - \ x_4 &= 3 \\ 6\,x_3 + 3\,x_4 &= -7 \end{aligned}$$

Ravnina je 1-dimenzionalna, odnosno pravac, pa je za parametarski oblik jednadžbe ravnine potreban jedan parametar.
Ako uzmemo da je $x_4 = \tau$, onda je:

$$\begin{aligned} x_1 + 7\,x_3 + 3\,\tau &= -3 \\ x_2 - 2\,x_3 - \ \tau &= 3 \\ 6\,x_3 + 3\,\tau &= -7 \end{aligned}$$

Sređivanjem dobijemo parametarsku jednadžbu ravnine

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{31}{6} + \frac{1}{2}\,\tau \\ x_2 &= \frac{2}{3} \\ x_3 &= -\frac{7}{6} - \frac{1}{2}\,\tau \\ x_4 &= \tau \end{aligned}$$

3.4 Jednadžbe hiperravnina i pravaca

3.4.1 Parametarska jednadžba hiperravnine

Prema razmatranjima u 3.3.1. parametarska jednadžba u vektorskom obliku hiperravnine Π^{n-1} određene točkom $T_0(r_0)$ i vektorima $a_j,\ j = 1, 2, \ldots, n-1$, je

$$\boxed{r = r_0 + \tau_1 a_1 + \ldots + \tau_{n-1} a_{n-1}}\ , \tag{3.23}$$

a pripadne jednadžbe u koordinatnom obliku glase

$$\boxed{\begin{array}{lcl} x_1 & = & x_1^0 + \alpha_{11}\tau_1 + \ldots + \alpha_{1,n-1}\tau_{n-1} \\ \vdots & & \qquad\qquad \vdots \\ x_n & = & x_n^0 + \alpha_{n1}\tau_1 + \ldots + \alpha_{n,n-1}\tau_{n-1} \end{array}} \tag{3.24}$$

Eliminacija parametara τ_j iz sustava (3.24) je u ovom slučaju vrlo jednostavna. Neka je $T(r)$, $r = [x_1, \ldots, x_n]$, bilo koja točka hiperravnine Π^{n-1}. Jednadžbe (3.24) daju odredbeni sustav za pripadne vrijednosti parametara $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ točke T. Da bi ovaj sustav imao rješenje, prema Kronecker-Capellijevom teoremu, matrica sustava $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n,1} & \ldots & \alpha_{n,n-1} \end{bmatrix}$ i proširena matrica sustava $\mathsf{A}_{pr} = \begin{bmatrix} x_1 - {x_1}^0 & \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n - {x_n}^0 & \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{n,n-1} \end{bmatrix}$ moraju imati isti rang.

Stoga je nužno

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1^0 & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1,n-1} \\ x_2 - x_2^0 & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_n^0 & \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{n,n-1} \end{vmatrix} = 0, \tag{3.25}$$

što je tražena jednadžba hiperravnine Π^{n-1}.

3.4.2 Jednadžba hiperravnine zadane točkama

Neka je u prostoru $\mathcal{A}^n$ zadano n linearno nezavisnih točaka $T_i(r_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Tada postoji jedna i samo jedna hiperravnina Π^{n-1} koja sadrži točke T_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Da bismo odredili jednadžbu hiperravnine Π^{n-1} promatramo vektore

$$a_j = \overrightarrow{T_1 T_{j+1}} = r_{j+1} - r_1 \ , \quad j = 1, 2, \ldots, n-1,$$

te ovaj slučaj svodimo na slučaj opisan u prethodnom poglavlju.

Ako je $T_i \ (x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i)$ i $T \ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bilo koja točka hiperravnine Π^{n-1}, onda jednadžbu hiperravnine Π^{n-1}, prema (3.25), možemo pisati u obliku

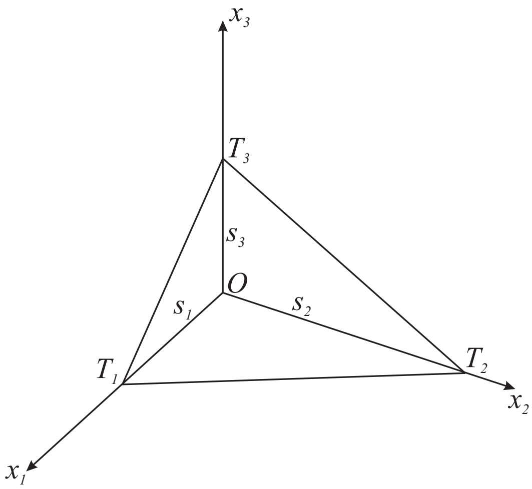
$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1^1 & x_1^2 - x_1^1 & \ldots & x_1^n - x_1^1 \\ x_2 - x_2^1 & x_2^2 - x_2^1 & \ldots & x_2^n - x_2^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_n^1 & x_n^2 - x_n^1 & \ldots & x_n^n - x_n^1 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Determinanta na lijevoj strani jednakosti može se svesti na determinantu

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & 1 \\ x_1^1 & x_2^1 & \ldots & x_n^1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ x_1^n & x_2^n & \ldots & x_n^n & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.26}$$

3.4.3 Segmentni oblik jednadžbe hiperravnine

Hiperravnina Π^{n-1} koja ne sadrži ishodište O koordinatnog sustava i nije paralelna ni sa kojom od koordinatnih osi odsjeca na koordinatnim osima redom segmente $s_1, s_2, \ldots, s_n$ (slika 3.4).



Slika 3.4: Segmenti

Segmentima s_i na koordinatnim osima hiperravnina Π^{n-1} je potpuno određena. Ona sadrži točke

$$T_i\,(0,\dots,0,s_i,0,\dots,0)\ ,\quad i=1,2,\dots,n\ .$$

Iz jednakosti (3.26) slijedi

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_j & \dots & x_n & 1 \\ s_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & s_j & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & s_n & 1 \end{vmatrix} = 0$$

iz čega razvijanjem determinante po elementima prvog retka dobivamo

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}x_j \begin{vmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & s_{j-1} & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & s_{j+1} & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & s_n & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{n+2}s_1s_2\dots s_n = 0.$$

Primijetimo da je determinanta u $j-$tom članu sume u gornjoj jednakosti jednaka $(-1)^{n+j}s_1\dots s_{j-1}s_{j+1}\dots s_n$, pa iz te jednakosti neposredno slijedi

$$\boxed{\frac{x_1}{s_1}+\frac{x_2}{s_2}+\ldots+\frac{x_n}{s_n}=1}\ , \tag{3.27}$$

što je *segmentni oblik jednadžbe hiperravnine* Π^{n-1}.

Primjer 21. *Segmentni oblik jednadžbe hiperravnine*

U afinom prostoru $\mathcal{A}^3$ zadane su točke $T_1\,(2,1,3)$, $T_2\,(0,2,0)$ i $T_3\,(4,1,0)$. Odrediti segmentni oblik jednadžbe hiperravnine Π^2 koja sadrži točke T_1, T_2 i T_3.

Uvrstimo li koordinate točaka T_1, T_2 i T_3 u (3.26) dobivamo

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\ , \tag{3.28}$$

iz čega slijedi

$$\frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{12} = 1\ .$$

3.4.4 Opći oblik jednadžbe hiperravnine

Jednadžba (3.27) je linearna s obzirom na $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Isto vrijedi za jednadžbe (3.25) i (3.26). Ova činjenica je u skladu s našim razmatranjima u 3.3.2 gdje smo ustanovili da se k-dimenzionalna ravnina n-dimenzionalnog afinog prostora analitički predočuje sa $n-k$ nezavisnih linearnih jednadžbi i obrnuto, da svaki sustav sa $n-k$ nezavisnih linearnih jednadžbi predstavlja jednu k-dimenzionalnu ravninu u n-dimenzionalnom afinom prostoru.

U slučaju hiperravnine je $k = n-1$. Prema tome, svaka hiperravnina u n-dimenzionalnom afinom prostoru $\mathcal{A}^n$ može se analitički predstaviti jednom linearnom jednadžbom oblika

$$\boxed{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n + \alpha_0 = 0} \tag{3.29}$$

pri čemu nisu svi α_i jednaki nuli.
Jednadžba (3.29) je *opći oblik jednadžbe* hiperravnine.

Veza jednadžbi (3.27) i (3.29) dana je sa

$$s_i = -\frac{\alpha_o}{\alpha_i}\ , \quad i = 1, 2, \ldots, n\ .$$

U $\mathcal{A}^3$ hiperravnina je 2-ravnina, a predočena je linearnom jednadžbom

$$\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0\ .$$

Ako hiperravnina Π^{n-1} sadrži ishodište, onda je $\alpha_0 = 0$, pa njezina jednadžba ima oblik

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0\ .$$

Primjer 22. *Koordinatne ravnine*

Neka je $(O;\ \overrightarrow{OE_1}, \ldots, \overrightarrow{OE_n})$ afini koordinatni sustav u prostoru $\mathcal{A}^n$. Ravnina određena točkama $O, E_1, \ldots, E_{i-1}, E_{i+1}, \ldots, E_n$ predstavlja i-tu koordinatnu hiperravninu ε_i^{n-1}. Lako se pokazuje da točka $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pripada koordinatnoj hiperravnini ε_i^{n-1} ako i samo ako je $x_i = 0$. Stoga je $x_i = 0$ jednadžba koordinatne hiperravnine ε_i^{n-1}.

Svaka k-dimenzionalna ravnina je presjek $n-k$ hiperravnina. k-dimenzionalna ravnina točkama $O, E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_k}$ je presjek koordinatnih hiperravnina $\varepsilon^{n-1}_{i_{k+1}}, \ldots, \varepsilon^{n-1}_{i_n}$, pri čemu je

$$\{i_{k+1}, \ldots, i_n\} = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\},$$

pa je ona zadana sustavom jednadžbi

$$\begin{aligned} x_{i_{k+1}} &= 0 \\ \cdots&\cdots \\ x_{i_n} &= 0 \end{aligned}$$

Tako je, na primjer, i - ta koordinatna os OE_i zadana sustavom jednadžbi

$$x_1 = 0,\ \ldots,\ x_{i-1} = 0,\ x_{i+1} = 0,\ \ldots,\ x_n = 0\ .$$

Uvjeti paralelnosti dviju hiperravnina u koordinatnom obliku dani su sljedećim teoremom.

Teorem 2. *Neka su hiperravnine* Π_1 *i* Π_2 *zadane jednadžbama*

$$\begin{aligned} \Pi_1 \quad \ldots \quad & \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n + \alpha_0 = 0\ , \\ \Pi_2 \quad \ldots \quad & \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n + \beta_0\ = 0\ . \end{aligned}$$

(i) Hiperravnine Π_1 *i* Π_2 *su jednake ako i samo ako je*

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \ldots = \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\alpha_0}{\beta_0}\quad . \tag{3.30}$$

(ii) Hiperravnine Π_1 *i* Π_2 *su paralelne ako i samo ako je*

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \ldots = \frac{\alpha_n}{\beta_n}\quad . \tag{3.31}$$

Dokaz. (i) Da bi bilo $\Pi_1 = \Pi_2$ nužno je i dovoljno da sustav

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n + \alpha_0 = 0$$

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n + \beta_0 = 0$$

određuje hiperravninu. Ta činjenica je ekvivalentna sa zahtjevom da je

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_n & \alpha_0 \\ \beta_1 & \ldots & \beta_n & \beta_0 \end{bmatrix} = 1,$$

iz čega slijedi (3.30).

(ii) Hiperravnine Π_1 i Π_2 su paralelne ili ako se podudaraju ili ako se ne sijeku.

U prvom slučaju traženi uvjet (3.31) je sadržan u (3.30). U drugom slučaju promatrani sustav jednadžbi mora biti nerješiv i zato je

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_n & \alpha_0 \\ \beta_1 & \ldots & \beta_n & \beta_0 \end{bmatrix} = 2, \qquad \operatorname{rang}\begin{bmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \\ \beta_1 & \ldots & \beta_n \end{bmatrix} = 1,$$

odnosno vrijedi (3.31).

□

Primjer 23.

U prostoru $\mathcal{A}^n$ su zadane točka $T_0\,(x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ)$ i hiperravnina Π_1^{n-1} jednadžbom $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n + \alpha_0 = 0$.

Odredimo hiperravninu koja sadrži točku T_0 i paralelna je sa zadanom hiperravninom.

Neka je

$$\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n + \beta_0 = 0$$

jednadžba tražene hiperravnine Π_2^{n-1} . Prema uvjetu (3.31) vrijedi

$$\beta_1 = t\alpha_1 \ , \ \ldots \ , \ \beta_n = t\alpha_n \ ,$$

pa je jednadžba te ravnine

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n + \overline{\beta}_0 = 0 \ , \tag{3.32}$$

gdje je $\overline{\beta_0} = \frac{\beta_0}{t}$. Nadalje, uvjet $T_\circ \in \Pi_2^{n-1}$ daje

$$\alpha_1 x_1^\circ + \ldots + \alpha_n x_n^\circ + \overline{\beta}_0 = 0 \ . \tag{3.33}$$

Oduzimanjem jednakosti (3.32) i (3.33) dobijemo

$$\alpha_1(x_1 - x_1^\circ) + \ldots + \alpha_n(x_n - x_n^\circ) = 0 \ , \tag{3.34}$$

što je jednadžba tražene hiperravnine.

Primjer 24. *Hiperravnine koordinatnim ravninama*

Promotrimo uz koje je uvjete $\alpha_1\, x_1 + \alpha_2\, x_2 + \ldots + \alpha_n\, x_n + \alpha_0 = 0$ jednadžba hiperravnine koja sadrži k-dimenzionalnu koordinatnu ravninu određenu točkama $O, E_1, \ldots, E_k$, $1 \leq k < n$.

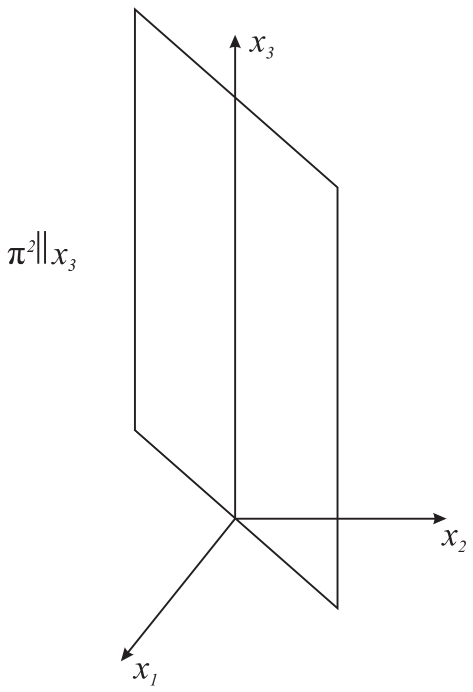
Tražena k-ravnina sadrži točke s koordinatama $(x_1 \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$. Uvrštavanjem u jednažbu hiperravnine dobivamo

$$\alpha_1\, x_1 + \ldots + \alpha_k\, x_k + \alpha_0 = 0 \ .$$

Ova jednakost mora vrijediti za sve realne brojeve $x_1, \ldots, x_k$, pa je zato $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = \alpha_0 = 0$.
Dakle, jednadžba tražene k-ravnine je

$$\alpha_{k+1}\, x_{k+1} + \ldots + \alpha_n\, x_n = 0 \ .$$

Slično se pokazuje da hiperravnina $\alpha_1\, x_1 + \alpha_2\, x_2 + \ldots + \alpha_n\, x_n + \alpha_0 = 0$ sadrži k-dimenzionalnu koordinatnu ravninu $O + E_{i_1} + \ldots + E_{i_k}$ ako i samo ako je $\alpha_{i_1} = \ldots = \alpha_{i_k} = \alpha_0 = 0$.



Slika 3.5: $\Pi^2 \ldots \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$

Primjer 25.

Ako u jednadžbi hiperravnine $\Pi \ \ldots \ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n + \alpha_\circ = 0$ variramo samo α_0, dobit ćemo skup paralelnih hiperravnina.
Stoga, ako je $\alpha_{i_1} = \ldots = \alpha_{i_k} = 0$ i α_0 izabran po volji, tada je hiperravnina Π paralelna s k-ravninom $O + E_{i_1} + \ldots + E_{i_k}$.
Posebno je hiperravnina Π paralelna s koordinatnom osi OE_{i_k} ako i samo ako je $\alpha_i = 0$.

Primjer 26. *Međusobni položaj dvije hiperravnine u prostoru $\mathcal{A}^3$*

Neka su u prostoru A^3 zadane dvije ravnine Π_1^2 i Π_2^2 svojim jednadžbama

$$\begin{aligned} \Pi_1^2 \ \ldots \quad & \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_0 = 0 \\ \Pi_2^2 \ \ldots \quad & \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_0 = 0 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Sustav (3.35) određuje ravninu koja je presjek hiperravnina Π_1^2 i Π_2^2.

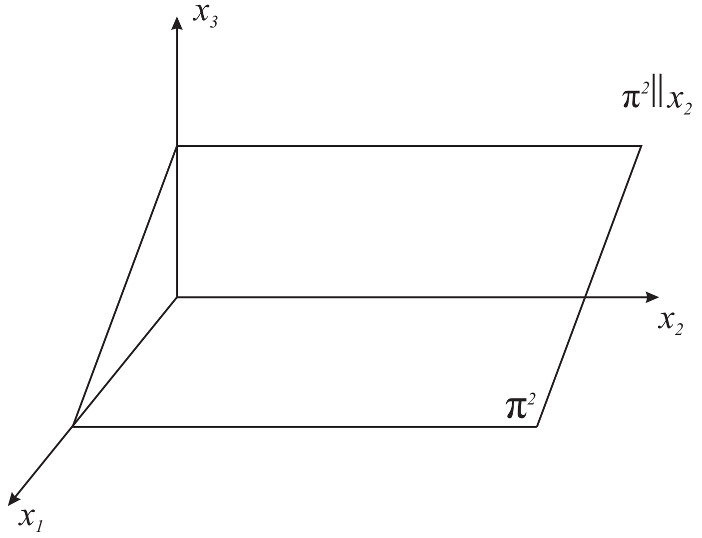
Postoje tri mogućnosti s obzirom na rangove matrica

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathsf{A}_{pr} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_0 \end{bmatrix}.$$

To su

	a)	b)	c)
rang A	1	1	2
rang A_{pr}	1	2	2

Slučaj rang $\mathsf{A} = 2$, rang $\mathsf{A}_{pr} = 1$ nije moguć, jer je rang $\mathsf{A} \leq$ rang A_{pr}.



Slika 3.6: $\Pi^2 \ldots \alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3 + \alpha_0 = 0$

a) Ravnine Π_1^2 i Π_2^2 su identične, prema teoremu 2.

b) Prema Kronecker - Capellijevom teoremu sustav kojeg čine jednažbe zadanih ravnina nema rješenja. Ravnine Π_1^2 i Π_2^2 su paralelne u užem smislu.

c) Promatrani sustav ima rješenja, a skup svih rješenja je pravac, odnosno 1-ravnina u $\mathcal{A}^3$ zadana s dvije nezavisne linearne jednažbe (3.35).

Primjer 27. *Međusobni položaj tri hiperravnine u prostoru* $\mathcal{A}^3$

Ispitajmo međusobni položaj triju hiperravnina prostora $\mathcal{A}^3$, zadanih jednadžbama

$$\begin{aligned} \Pi_1^2 \ \ldots \quad & \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_0 = 0 \\ \Pi_2^2 \ \ldots \quad & \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_0 = 0 \\ \Pi_3^2 \ \ldots \quad & \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 + \gamma_0 = 0 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Pripadna matrica sustava A i proširena matrica sustava A_{pr} su

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathsf{A}_{pr} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_0 \end{bmatrix}.$$

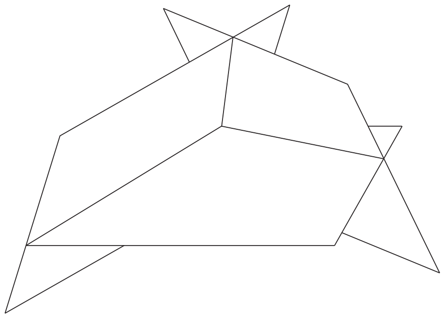
Razlikujemo pet slučajeva:

	a)	b)	c)	d)	e)
rang A	3	2	2	1	1
rang A_{pr}	3	3	2	2	1

a) Sustav (3.36) ima jedinstveno rješenje, a to znači da je $\Pi_1^2 \cap \Pi_2^2 \cap \Pi_3^2$ točka. Skup rješenja homogenog sustava linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 &= 0 \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 &= 0 \\ \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{3.37}$$

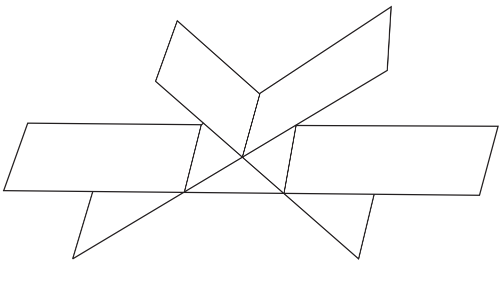
je nul - prostor, odnosno točka $(0,0,0)$.



Slika 3.7: Presjek triju 2-ravnina je točka

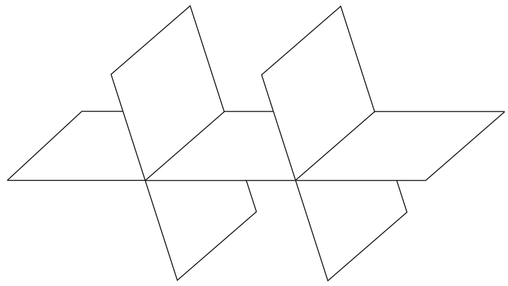
b) Sustav (3.36) nema rješenja, a skup rješenja sustava (3.37) je jednodimenzionalni vektorski prostor. Moguća su ova dva slučaja:

(b1) Niti koja dva retka matrice A nisu proporcionalna. U ovom slučaju svake dvije od zadanih 2-ravnina sijeku se u pravcu, a taj pravac je paralelan trećoj 2-ravnini.



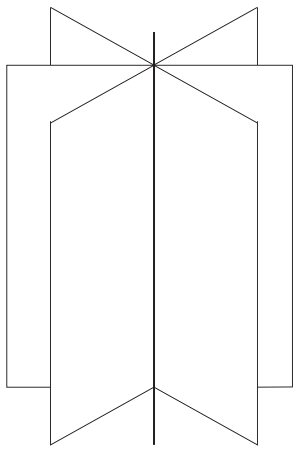
Slika 3.8: Presjek svake dvije 2-ravnine je pravac

(b2) Dva retka matrice A su proporcionalna. U tom slučaju dvije 2-ravnine su paralelne, a treća ih siječe.



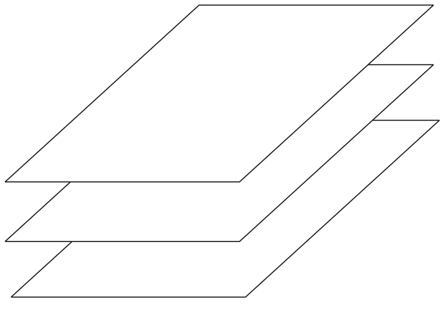
Slika 3.9: Dvije 2-ravnine su paralelne

c) Sustav (3.36) je rješiv i skup rješenja ima dimenziju 1. Tada je $\Pi_1^2 \cap \Pi_2^2 \cap \Pi_3^2$ pravac.



Slika 3.10: Presjek tri 2-ravnine je pravac

d) Sustav (3.36) nije rješiv, a rješenje sustava (3.37) je dvodimenzionalni vektorski prostor. Sve tri 2-ravnine imaju isti smjer i $\Pi_1^2 \cap \Pi_2^2 \cap \Pi_3^2 = \emptyset$.



Slika 3.11: 2-ravnine se ne sijeku

e) Sve tri jednadžbe (3.36) određuju istu 2-ravninu $\Pi_1^2 = \Pi_2^2 = \Pi_3^2$.

Primjer 28. *Međusobni položaj 2-ravnina* ${\Pi_1}^2$ *i* ${\Pi_2}^2$ *u* $\mathcal{A}^4$
Neka je ravnina ${\Pi_1}^2$ zadana jednadžbama

$$\begin{aligned}\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \alpha_{14}x_4 &= \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \alpha_{24}x_4 &= \beta_2\end{aligned}$$

i neka je ravnina ${\Pi_2}^2$ zadana jednadžbama

$$\begin{aligned}\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 + \alpha_{34}x_4 &= \beta_3 \\ \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \alpha_{43}x_3 + \alpha_{44}x_4 &= \beta_4\end{aligned}$$

Označimo sa M matricu sustava kojeg čine sve četiri jednadžbe, a sa M_{pr} pripadnu proširenu matricu sustava. Mogući slučajevi su:

a) $\operatorname{rang} \mathsf{M} = \operatorname{rang} \mathsf{M}_{pr} = 4$
U ovom slučaju ${\Pi_1}^2 \cap {\Pi_2}^2$ je točka, a pridruženi homogeni sustav

$$\sum_{j=1}^{4} \alpha_{ij} x_i = 0 \ , \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

ima samo trivijalno rješenje.

b) $\operatorname{rang} \mathsf{M} = 3,\ \operatorname{rang} \mathsf{M}_{pr} = 4$
Ravnine ${\Pi_1}^2$ i ${\Pi_2}^2$ nemaju zajedničkih točaka, a kako je skup rješenja pridruženog homogenog sustava jednodimenzionalni vektorski prostor, to su ${\Pi_1}^2$ i ${\Pi_2}^2$ mimosmjerne ravnine koje su paralelne s istim pravcem.

c) $\operatorname{rang} \mathsf{M} = \operatorname{rang} \mathsf{M}_{pr} = 3$
Promatrani sustav linearnih jednadžbi je rješiv, a ${\Pi_1}^2 \cap {\Pi_2}^2$ je pravac.

d) $\operatorname{rang} \mathsf{M} = 2,\ \operatorname{rang} \mathsf{M}_{pr} = 3$
Ravnine ${\Pi_1}^2$ i ${\Pi_2}^2$ nemaju zajedničkih točaka, a skup rješenja homogenog sustava je 2-ravnina, pa je ${\Pi_1}^2 \parallel {\Pi_2}^2$.

e) $\operatorname{rang} \mathsf{M} = \operatorname{rang} \mathsf{M}_{pr} = 2$
Od četiri linearne jednadžbe nikoje tri nisu linearno nezavisne, a kako su već prema pretpostavci prve, odnosno druge dvije jednadžbe nezavisne, očito je ${\Pi_1}^2 = {\Pi_2}^2$.

3.4.5 Jednadžbe pravca

Promotrimo podrobnije jednadžbe pravca u prostoru $\mathcal{A}^n$. Razmatranja u 3.3.1. su pokazala da pravac Π^1 određen točkom $T_0\,({x_1}^0, \dots, {x_n}^0)$ i vektorom smjera $a = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ ima jednadžbu u vektorskom obliku

$$r = r_0 + \tau a, \tag{3.38}$$

odnosno parametarske jednadžbe u koordinatnom obliku

$$\begin{aligned} x_1 &= {x_1}^0 + \tau\alpha_1 \\ \dots & \qquad \dots \\ x_n &= {x_n}^0 + \tau\alpha_n \ . \end{aligned} \tag{3.39}$$

Eliminacijom parametra τ iz gornjih jednadžbi dobivamo

$$\boxed{\frac{x_1 - {x_1}^0}{\alpha_1} = \frac{x_2 - {x_2}^0}{\alpha_2} = \ldots = \frac{x_n - {x_n}^0}{\alpha_n}} \tag{3.40}$$

Jednadžba (3.40) poznata je pod nazivom *kanonska jednadžba pravca.*

Ako je pravac Π^1 određen s dvije različite točke $T_i = ({x_1}^i, \ldots, {x_n}^i)$, $i = 1, 2$, onda za vektor smjera a tog pravca možemo uzeti vektor $\overrightarrow{T_1T_2}$.
Kako je $\overrightarrow{T_1T_2} = [{x_1}^2 - {x_1}^1, \ldots, {x_n}^2 - {x_n}^1]$, jednadžba (3.40) poprima oblik

$$\frac{x_1 - {x_1}^1}{{x_1}^2 - {x_1}^1} = \frac{x_2 - {x_2}^1}{{x_2}^2 - {x_2}^1} = \ldots = \frac{x_n - {x_n}^1}{{x_n}^2 - {x_n}^1} \,. \tag{3.41}$$

Jednadžba (3.41) je jednadžba *pravca kroz dvije točke.*

Primijetimo da neki od nazivnika u (3.41) mogu biti jednaki 0. No, kako je jednakost (3.41) ekvivalentna jednakosti $x_i - {x_i}^1 = \tau\,({x_i}^2 - {x_i}^1)$, to u slučaju ${x_i}^2 - {x_i}^1 = 0$ za neki i, možemo isključiti taj razlomak iz jednakosti (3.41) i dodati jednakost $x_i - {x_i}^1 = 0$.
Jasan je smisao kanonske jednadžbe pravca u kojoj su nazivnici koordinate vektora smjera pravca i u slučaju kada neke od tih koordinata poprimaju vrijednost 0. Stoga ćemo po dogovoru dozvoliti zapise jednadžbi (3.41) i kada su neki od nazivnika jednaki 0.

Uvjete paralelnosti dvaju pravaca daje sljedeća propozicija.

Propozicija 10. *Neka su pravci* ${\Pi_1}^1$ *i* ${\Pi_2}^1$ *zadani kanonskim jednadžbama*

$${\Pi_1}^1 \ldots \qquad \frac{x_1 - a_1}{\alpha_1} = \frac{x_2 - a_2}{\alpha_2} = \ldots = \frac{x_n - a_n}{\alpha_n}$$

$${\Pi_2}^1 \ldots \qquad \frac{x_1 - b_1}{\beta_1} = \frac{x_2 - b_2}{\beta_2} = \ldots = \frac{x_n - b_n}{\beta_n} \,.$$

Da bi zadani pravci bili paralelni nužno je i dovoljno da vrijedi

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \ldots = \frac{\alpha_n}{\beta_n} \,. \tag{3.42}$$

Pravci ${\Pi_1}^1$ *i* ${\Pi_2}^1$ *se podudaraju ako i samo ako uz uvjete* (3.42) *vrijede i uvjeti*

$$\frac{b_1 - a_1}{\alpha_1} = \frac{b_2 - a_2}{\alpha_2} = \ldots = \frac{b_n - a_n}{\alpha_n} \,. \tag{3.43}$$

Dokaz. Neka je $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ te neka su ${W_1}^1$ i ${W_2}^1$ vektorski prostori pridruženi redom prostorima ${\Pi_1}^1$ i ${\Pi_2}^1$. Iz ${\Pi_1}^1 \parallel {\Pi_2}^1$ slijedi ${W_1}^1 = {W_2}^1$. Budući da je $a, b \in {W_1}^1$, vrijedi $a = \lambda b$, iz čega slijedi (3.42).

Obratno, na temelju jednakosti (3.42) je $a = \lambda b$, a to znači da je $[a] = [b]$. Vrijedi, dakle, ${W_1}^1 = {W_2}^1$, pa je ${\Pi_1}^1 \parallel {\Pi_2}^1$.

Točka $B = (b_1, \ldots, b_n)$ pripada pravcu Π_2^1. Kako je ${\Pi_1}^1 = {\Pi_2}^1$ ako i samo ako je ${\Pi_1}^1 \parallel {\Pi_2}^1$ i $B \in {\Pi_1}^1$, drugi dio tvrdnje teorema slijedi iz prvog dijela. $\square$

Osim kanonskom jednadžbom, pravac u afinom prostoru $\mathcal{A}^n$ može biti zadan sustavom linearnih jednadžbi oblika

$$\alpha_{i1}x_1 + \ldots + \alpha_{in}x_n + \alpha_{i0} = 0 \ , \qquad i = 1, 2, \ldots, m; \ m \geq n-1, \tag{3.44}$$

pri čemu matrica sustava i proširena matrica sustava imaju rang $n-1$. Drugim riječima, pravac je predočen kao presjek $n-1$ hiperravnina. To je, u skladu s uvedenom terminologijom, opća jednadžba pravca.

Prijelaz od opće (3.44) na kanonske jednadžbe pravca (3.40) postižemo određivanjem koordinata dviju različitih točaka pravca (3.44) i uvrštavanjem dobivenih koordinata u (3.41). Drugi način je da se sustav (3.44) riješi po $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Kao rezultat dobivamo

$$x_i = \alpha_i x_n + a_i \ , \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{3.45}$$

odakle odmah dobivamo kanonsku jednadžbu zadanog pravca

$$\frac{x_1 - a_1}{\alpha_1} = \frac{x_2 - a_2}{\alpha_2} = \ldots = \frac{x_{n-1} - a_{n-1}}{\alpha_{n-1}} = x_n \ .$$

Na temelju jednakosti (3.45) pravac je predočen kao presjek od $n-1$ hiperravnina od kojih je svaka paralelna s po jednom $(n-2)$-dimenzionalnom ravninom $0 + E_1 + \ldots + E_{i-1} + E_{i+1} + \ldots + E_{n-1}$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Primjer 29.

Neka je pravac $\Pi^1 \subset \mathcal{A}^3$ određen s dvije nezavisne jednadžbe

$$\Pi^1 \ldots \begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_0 = 0 \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_0 = 0 \ . \end{cases}$$

Pretpostavimo da je $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Tada gornji sustav možemo riješiti po x_1 i x_2 i tako dobivamo

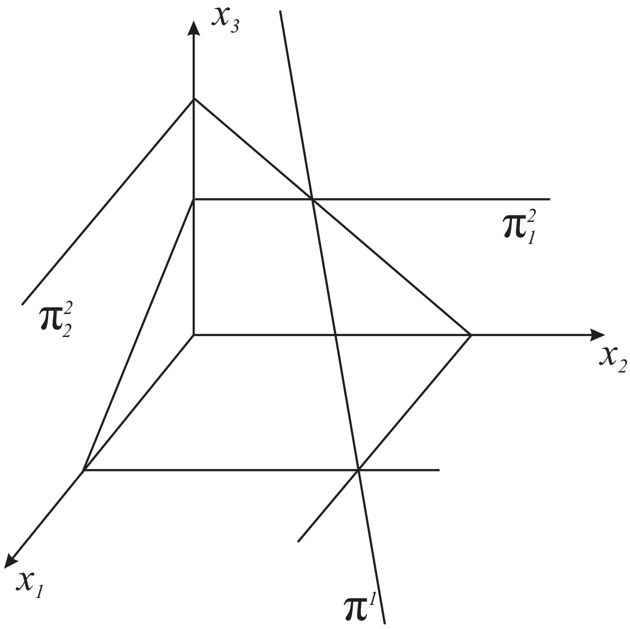
$$x_1 = \frac{\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1} x_3 + \frac{\alpha_2\beta_0 - \alpha_0\beta_2}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}$$

$$x_2 = \frac{\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1} x_3 + \frac{\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}$$

ili

$$\Pi^1 \ldots \begin{cases} x_1 &= \xi_1 x_3 + \xi_2 \\ x_2 &= \mu_1 x_3 + \mu_2 . \end{cases} \tag{3.46}$$

Pravac Π^1 predočili smo kao presjek dviju ravnina od kojih je prva paralelna s osi x_2, a druga s osi x_1 .



Slika 3.12: Pravac kao presjek hiperravnina u prostoru $\mathcal{A}^3$

Uvjet paralelnosti pravca i hiperravnine daje sljedeća tvrdnja.

Propozicija 11. *Hiperravnina* Π^{n-1}*, zadana jednadžbom*

$$\Pi^{n-1} \ldots \qquad \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n + \alpha_o = 0$$

paralelna je s pravcem Π^1*, zadanim kanonskim jednadžbama*

$$\Pi^1 \ldots \qquad \frac{x_1 - a_1}{\sigma_1} = \frac{x_2 - a_2}{\sigma_2} = \ldots = \frac{x_n - \alpha_n}{\sigma_n}$$

ako i samo ako vrijedi

$$\alpha_1 \sigma_1 + \ldots + \alpha_n \sigma_n = 0 \ . \tag{3.47}$$

Dokaz. Iz jednadžbe pravca Π^1 dobivamo

$$x_i = \tau \sigma_i + a_i \ , \qquad i = 1, 2, \ldots, n \ , \tag{3.48}$$

što uvršteno u jednadžbu hiperravnine Π^{n-1} daje

$$(\alpha_1 \sigma_1 + \ldots + \alpha_n \sigma_n)\, \tau = -\,(\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n + \alpha_0) \tag{3.49}$$

Ako je $\alpha_1\sigma_1 + \ldots + \alpha_n\sigma_n \neq 0$, onda iz (3.49) dobivamo jedinstvenu vrijednost za parametar τ , a nakon toga iz (3.48) jedinstvene vrijednosti koordinata x_i točke $\Pi^1 \cap \Pi^{n-1}$. Te koordinate glase

$$x_i = -\frac{\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n + \alpha_0}{\alpha_1 \sigma_1 + \ldots + \alpha_n \sigma_n}\, \sigma_i + a_i \ , \qquad i = 1, \ldots, n \ .$$

U ovom slučaju očito Π^1 i Π^{n-1} nisu paralelni.

Neka je $\alpha_1\sigma_1 + \ldots + \alpha_n\sigma_n = 0$. Ako je desna strana u (3.49) različita od 0, jednakost (3.49) ne daje rješenje za τ i zato su Π^1 i Π^{n-1} paralelni u užem smislu. Ako je desna strana u (3.49) jednaka 0, jednakost je zadovoljena za sve τ. U tom je slučaju $\Pi^1 \subseteq \Pi^{n-1}$, što je paralelnost u širem smislu. □

Posebno, hiperravnina Π^{n-1} je paralelna s osi x_i ako je $\alpha_i = 0$.

Poglavlje 4

Konveksni skupovi

Do sada nismo razmatrali neke bitne geometrijske pojmove kao što su poluprostor, konveksnost, relacija "ležati između". Ti se pojmovi u afinom prostoru nad bilo kojim poljem F ne mogu uvesti na prirodan način. Zato je potrebno suziti klasu polja i razmatrati afine prostore nad uređenim poljima, na primjer nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$.

U daljnjim razmatranjima $\mathcal{A}^n$ je n-dimenzionalni realni afini prostor.

4.1 Baricentrične koordinate

Neka je u afinom prostoru $\mathcal{A}^n$ zadan skup od $k+1$ nezavisnih točaka A_i, $i = 0, 1, \dots, k$ s pripadnim radijus-vektorima $r_i = (a_1^i, a_2^i, \dots, a_n^i)$.
Točke A_i određuju jedinstvenu k-dimenzionalnu ravninu Π^k.
Stavimo li $a_j = \overrightarrow{A_0A_j}$, $j = 1, \dots, k$, tada se jednadžba ravnine Π^k može zapisati u obliku

$$r = r_0 + \tau_1 a_1 + \ldots + \tau_k a_k,$$

odnosno, zbog $a_j = r_j - r_0$ u obliku

$$r = (1 - \tau_1 - \ldots - \tau_k) r_0 + \tau_1 r_1 + \ldots + \tau_k r_k.$$

Označimo li koeficijent $1 - \tau_1 - \ldots - \tau_k$ sa τ_0, slijedi

$$r = \tau_0 r_0 + \tau_1 r_1 + \ldots + \tau_k r_k, \tag{4.1}$$

pa dobivamo sljedeće parametarske jednadžbe ravnine Π^k u koordinatnom obliku

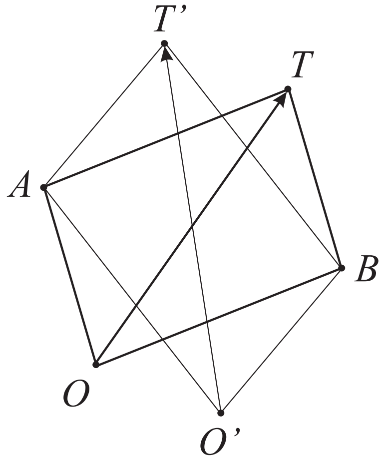
$$\begin{aligned} x_1 &= \tau_0 a_1^0 + \tau_1 a_1^1 + \ldots + \tau_k a_1^k, \\ x_2 &= \tau_0 a_2^0 + \tau_1 a_2^1 + \ldots + \tau_k a_2^k, \\ &\dots \\ x_n &= \tau_0 a_n^0 + \tau_1 a_n^1 + \ldots + \tau_k a_n^k. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Pritom je

$$\tau_0 + \tau_1 + \ldots + \tau_k = 1. \tag{4.3}$$

Za svaku točku $T(r) \in \Pi^k$ određeni su na jedinstven način realni brojevi $\tau_0,\ \tau_1, \ldots,\ \tau_k$ koji zadovoljavaju uvjet (4.3).
Obratno, svaki izbor realnih brojeva $\tau_0,\ \tau_1, \ldots,\ \tau_k$ koji zadovoljavaju uvjet (4.3) određuje jednakostima (4.2) jedinstvenu točku $T(r) \in \Pi^k$.

Za proizvoljne realne brojeve α i β u afinom prostoru $\mathcal{A}$ izraz $\alpha A + \beta B,\ A, B \in \mathcal{A}$, nema smisla ako nije naglašeno ishodište. Kao što pokazuje slika 4.1., općenito je $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$ različito od $\alpha\overrightarrow{O'A} + \beta\overrightarrow{O'B}$.



Slika 4.1: Ovisnost izraza $\alpha A + \beta B$ o ishodištu

Kada je $\alpha + \beta = 1$, točka $\alpha A + \beta B$ jednoznačno je određena neovisno o ishodištu.

Propozicija 12. *Neka su $A_1, \ldots,\ A_n \in \mathcal{A}$ i $\alpha_1, \ldots,\ \alpha_n \in \mathbb{R}$. Točka $\alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_n A_n$ ne ovisi o ishodištu ako i samo ako je $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.*

Dokaz. Neka su $O, O' \in \mathcal{A}$ dvije različite točke. Kada kažemo da točka $\alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_n A_n$ ne ovisi o ishodištu, mislimo da su točke T i T' za koje je

$$\alpha_1\overrightarrow{OA_1} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{OT}$$
$$\alpha_1\overrightarrow{O'A_1} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{O'A_n} = \overrightarrow{O'T'}$$

jednake. Tada je $\overrightarrow{TT'} = \overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'T'} = \theta$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{TT'} &= -(\alpha_1\overrightarrow{OA_1} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{OA_n}) + \overrightarrow{OO'} + \alpha_1\overrightarrow{O'A_1} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{O'A_n} \\
&= \alpha_1(\overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A_1}) + \ldots + \alpha_n(\overrightarrow{A_nO} + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A_n}) + \\
&\quad + (1 - \alpha_1 - \ldots - \alpha_n)\overrightarrow{OO'} \\
&= \alpha_1\overrightarrow{A_1A_1} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{A_nA_n} + (1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i)\overrightarrow{OO'} \\
&= \theta + \ldots + nv + (1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i)\overrightarrow{OO'} = (1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i)\overrightarrow{OO'}
\end{aligned}$$

Budući da je $\overrightarrow{OO'} \neq \theta$, uvjet da su točke T i T' jednake, tj. $\overrightarrow{TT'} = \theta$ ekvivalentan je uvjetu da je

$$1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0,$$

odnosno

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

$\square$

Budući da točka T, takva da je $\overrightarrow{OT} = \alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{OA_n}$, ne ovisi o ishodištu O kada je

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \ ,$$

u tom slučaju pišemo

$$T = \alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_n A_n$$

i kažemo da je točka T afina (ili baricentrična) kombinacija točaka $A_1, \ldots, A_n$.

Definicija 14. *Neka linearno nezavisne točke* $A_0, A_1, \ldots, A_k$ *određuju ravninu* Π^k *i neka je* $T \in \Pi^k$ *. Koeficijenti* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ *u jednadžbi*

$$T = \alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_n A_n$$

za koje je

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1 \tag{4.4}$$

nazivaju se baricentrične koordinate točke T *u odnosu na n-torku točaka* $(A_0, A_1, \ldots, A_k)$ *. Kažemo još i da je točka* T baricentar *sustava* $(A_0, A_1, \ldots, A_k)$ *s* težinama $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ *.*

Pojam baricentričnih koordinata uveo je njemački matematičar A.F. Möbius (1790-1868).

Primjer 30. *Veza baricentričnih koordinata i površina*

Neka su A, B i C nekolinearne točke. Tada je površina trokuta kojeg one određuju različita od 0.
Neka je X točka trokuta $\triangle ABC$ i neka su α, β, γ njene baricentrične koordinate u odnosu na trojku (A, B, C), odnosno

$$X = \alpha\, A + \beta\, B + \gamma\, C \ .$$

Tada je

$$\overrightarrow{AX} = \beta \overrightarrow{AB} + \gamma\, \overrightarrow{AC} \ ,$$

pa vrijedi

$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AX}\| = 2P(ABX) = \gamma\, \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = 2\,\gamma\, P(ABC) \ ,$$
$$\|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AX}\| = 2P(AXC) = \beta\, \|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\| = 2\,\gamma\, P(ABC) \ ,$$

odnosno

$$\gamma = \frac{P(ABX)}{P(ABC)} \ , \qquad \beta = \frac{P(AXC)}{P(ABC)} \ .$$

Budući da je

$$P(ABC) = P(XBC) + P(AXC) + P(ABX)$$

slijedi

$$\alpha = 1 - \beta - \gamma = \frac{P(ABC)}{P(ABC)} - \frac{P(ABX)}{P(ABC)} - \frac{P(AXC)}{P(ABC)} = \frac{P(XBC)}{P(ABC)} \; .$$

Dakle,

$$X = \; \frac{P(XBC)}{P(ABC)}\, A \; + \; \frac{P(AXC)}{P(ABC)}\, B \; + \; \frac{P(ABX)}{P(ABC)}\, C \; .$$

4.2 Konveksnost

Uvedimo sada relaciju "ležati između".

Definicija 15. *Neka su A_0, A_1 i T točke prostora $\mathcal{A}^n$.*
Kažemo da točka T leži između *točaka A_0 i A_1 ako je*

$$\overrightarrow{A_0T} = \lambda\, \overrightarrow{A_0A_1} \qquad i \qquad 0 \leq \lambda \leq 1. \tag{4.5}$$

U tom slučaju očito su A_0, A_1 i T tri točke jednog pravca.

Nadalje, ako točka T leži između A_0 i A_1, tada T leži i između A_1 i A_0. Zaista, iz (4.5) dobivamo

$$\overrightarrow{A_0A_1} = \overrightarrow{A_0T} + \overrightarrow{TA_1} = \lambda\overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{TA_1}$$

i zato je

$$\overrightarrow{A_1T} = (1-\lambda)\overrightarrow{A_1A_0}, \qquad 0 \leq 1-\lambda \leq 1.$$

Definicija 16. *Skup svih točaka koje leže između dviju točaka A_0 i A_1 naziva se* segment *i označava sa $\overline{A_0A_1}$. Točke A_0 i A_1 nazivaju se* krajevi segmenta *$\overline{A_0A_1}$.*

Neka su r_0 i r_1 radijus-vektori točaka A_0 i A_1. Iz izraza (4.5) vidi se da je $A_0 \in \overline{A_0A_1}$ $(\lambda = 0)$, $A_1 \in \overline{A_0A_1}$ $(\lambda = 1)$. Također je segment $\overline{A_0A_1}$ podskup pravca $\Pi^1 = A_0A_1$, koji prema (4.1) ima jednadžbu

$$r = \tau_0 r_0 + \tau_1 r_1 \; , \qquad \text{uz uvjet} \quad \tau_0 + \tau_1 = 1 \; . \tag{4.6}$$

Uspoređivanjem jednakosti (4.6) i (4.5) uviđamo da su baricentrične koordinate točaka segmenta $\overline{A_0A_1}$ jednake $\tau_0 = 1 - \lambda$, $\tau_1 = \lambda$, odnosno da su točke tog segmenta karakterizirane sa

$$\tau_0 \geq 0, \quad \tau_1 \geq 0, \quad \tau_0 + \tau_1 = 1.$$

Definicija 17. *Podskup K afinog prostora $\mathcal{A}^n$ naziva se* konveksnim skupom *ako on za svake dvije svoje točke sadrži i segment kojem su te točke krajevi, odnosno ako vrijedi*

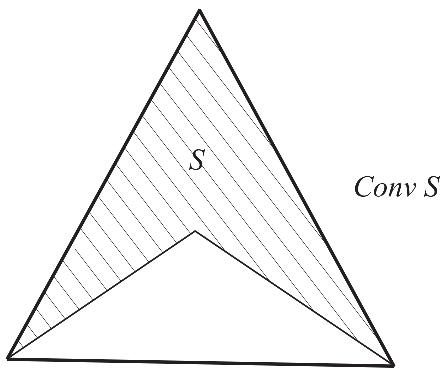
$$A, B \in K \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} \subseteq K \; .$$

Primjeri konveksnih skupova su prazan skup, segment, k-ravnina i prostor $\mathcal{A}^n$.

Iz definicije konveksnog skupa neposredno slijedi da je presjek konačno ili beskonačno mnogo konveksnih skupova opet konveksan skup.

Nadalje slijedi da je presjek svih konveksnih nadskupova nekog skupa S također konveksan skup. Taj konveksan skup je sadržan u svakom konveksnom nadskupu od S, dakle, to je najmanji konveksan skup koji sadrži skup S.

Definicija 18. *Neka je S skup. Najmanji konveksan skup koji sadrži skup S nazivamo* konveksno zatvorenje (konveksna ljuska) *od S i označavamo sa* $\operatorname{Conv} S$.



Slika 4.2: Konveksno zatvorenje skupa S

Vrijedi

$$S_1 \subseteq S_2 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Conv} S_1 \subseteq \operatorname{Conv} S_2$$
$$\operatorname{Conv}(\operatorname{Conv} S) = \operatorname{Conv} S \ .$$

Primjer 31. *Konveksna zatvorenja*

$$\begin{aligned} \operatorname{Conv}\{A,B\} &= \overline{AB} \\ \operatorname{Conv}\{A,B,C\} &= \triangle\ ABC \end{aligned}$$

4.2.1 Poluprostori

Među svim ravninama prostora $\mathcal{A}^n$ hiperravnine imaju jedno svojstvo koje druge ravnine nemaju. To svojstvo opisuje sljedeći teorem.

Teorem 3. *Ako je Π hiperravnina afinog prostora $\mathcal{A}^n$, onda se komplement $\mathcal{A}^n \setminus \Pi$ može na jedinstven način prikazati kao unija dvaju disjunktnih konveksnih skupova A_1^n i A_2^n. Skupovi $\widetilde{A}_1^n = A_1^n \cup \Pi$ i $\widetilde{A}_2^n = A_2^n \cup \Pi$ također su konveksni.*

Dokaz. Neka je $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n + \alpha_0 = 0$ jednadžba hiperravnine Π . Za svaku točku $T\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{A}^n$ definiramo

$$f(T) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n + \alpha_0 \ .$$

Označimo sa A_1^n skup svih točaka T za koje je $f(T) > 0$, a sa A_2^n skup svih točaka T za koje je $f(T) < 0$.
Tada je skup $\widetilde{A}_1^n$ određen nejednakošću $f(T) \geq 0$, a skup $\widetilde{A}_2^n$ nejednakošću $f(T) \leq 0$.
Jasno je da su skupovi A_1^n i A_2^n disjunktni i da je $A_1^n \cup A_2^n = A^n \setminus \Pi$.
S druge strane vrijedi $\widetilde{A}_1^n \cap \widetilde{A}_2^n = \Pi$.

Dokažimo konveksnost skupova $A_1^n, A_2^n, \widetilde{A}_1^n, \widetilde{A}_2^n$.

Neka su $A\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $B\,(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ dvije točke u $\mathcal{A}^n$ s radijus-vektorima a i b . Segment $\overline{AB}$ je skup točaka T kojima su radijus-vektori $\tau a + (1-\tau)b$, $0 \leq \tau \leq 1$. Koordinate točke T su

$$x_i = \tau a_i + (1-\tau) b_i \ , \qquad i = 1, \ldots, n \ ,$$

pa je

$$f(T) = \tau \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i + (1-\tau) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i + \alpha_0 = \tau f(A) + (1-\tau) f(B) \ . \tag{4.7}$$

Stoga, ako točke A i B pripadaju jednom od skupova $A_1^n, A_2^n, \widetilde{A}_1^n, \widetilde{A}_2^n$, taj skup sadrži i čitav segment $\overline{AB}$. Svaki od tih skupova je, prema tome, konveksan.

Dokažimo jedinstvenost.
Neka je sada $A^n \setminus \Pi = S_1 \cup S_2$ neka dekompozicija skupa $A^n \setminus \Pi$ na dva disjunktna konveksna skupa. Ako je ta dekompozicija različita od one na A_1^n i A_2^n, tada barem u jednom od skupova S_1 i S_2, na primjer u skupu S_1, postoje dvije točke $A \in A_1^n$, $B \in A_2^n$. Tada je $f(A) > 0$ i $f(B) < 0$. Na temelju jednakosti (4.7) slijedi da postoji τ , $0 < \tau < 1$, takav da za točku T s radijus-vektorom $\tau a + (1-\tau) b$ vrijedi $f(T) = 0$, pa segment $\overline{AB}$ sadrži točku hiperravnine Π, a ona ne pripada skupu S_1 . To je u suprotnosti s konveksnošću skupa S_1 . Time je teorem dokazan. $\square$

Definicija 19. *Skupovi* A_1^n *i* A_2^n *iz teorema 3 zovu se* otvoreni poluprostori *određeni hiperravninom* Π.
Skupovi $\widetilde{A}_1^n$ *i* $\widetilde{A}_2^n$ *zovu se* zatvoreni poluprostori *određeni hiperravninom* Π.

Napomena. Ako su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ linearno nezavisni vektori i $A_0(r_0)$ točka prostora $\mathcal{A}^n$, onda za svaku točku $T(r)$ postoji jedinstven prikaz oblika

$$r = r_0 + \tau_1 a_1 + \ldots + \tau_n a_n \ . \tag{4.8}$$

Sve točke za koje je $\tau_n = \alpha$, za neki realni broj α, tvore hiperravninu Π^{n-1} koja sadrži točku s radijus-vektorom $r_0 + \alpha\, a_n$ i kojoj je smjer paralelan s vektorima $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

Skup točaka koje ne pripadaju hiperravnini Π^{n-1} dijeli se na dva skupa koji su konveksni; jedan sadrži točke za koje je $\tau_n > \alpha$, dok drugi sadrži točke za koje je $\tau_n < \alpha$.
Ta dva skupa su otvoreni poluprostori.

Potpuno je analogna situacija ako se promatraju sve točke $T(r)$ čiji je radijus-vektor r određen sa (4.8) i pritom je $\tau_i > \alpha$ ili $\tau_i < \alpha$, za odabrani indeks i .

Korolar 2. *Svaka k-dimenzionalna ravnina prostora $\mathcal{A}^n$ može se prikazati kao presjek $2(n-k)$ poluprostora.*

Dokaz. Znamo da je svaka k-dimenzionalna ravnina presjek $n-k$ hiperravnina. Označimo te hiperravnine sa Π_j^{n-1} , $j = 1, \ldots, n-k$.
Zatim, ako su $\overline{A}_j^{\,n}$ i $\overline{B}_j^{\,n}$ zatvoreni poluprostori određeni hiperravninom Π_j^{n-1}, onda je

$$\Pi_j^{n-1} = \overline{A}_j^{\,n} \cap \overline{B}_j^{\,n} ,$$

pa je

$$\Pi^k = \bigcap_{j=1}^{n-k} \left(\overline{A}_j^{\,n} \cap \overline{B}_j^{\,n}\right) \tag{4.9}$$

prikaz k-ravnine Π^k. □

Primjer 32.
U afinom prostoru $\mathcal{A}^3$ zadane su točke $A(1,1,1)$, $B(2,3,-4)$ i $C(-4,-5,2)$ koje određuju ravninu Π^2. Pravac AB određuje dvije poluravnine u Π^2 . Π_C^2 je ona poluravnina u Π^2 koja sadrži točku C. Treba prikazati Π_C^2 kao presjek zatvorenih poluprostora.
Jednadžbu ravnine Π^2 dobijemo uvrštavanjem koordinata točaka A, B i C u (3.26)

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ -4 & -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 , \tag{4.10}$$

pa je

$$\Pi^2 \ldots \quad 7\,x_1 - 6\,x_2 - x_3 = 0 .$$

Ravninu Π^2 očito možemo prikazati kao presjek sljedećih zatvorenih poluprostora

$$\begin{aligned} \Pi^2 \ldots \quad 7\,x_1 - 6\,x_2 - x_3 &\le 0 \\ 7\,x_1 - 6\,x_2 - x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

Jednadžba pravca Π^1 određenog točkama A i B je

$$\frac{x_1 - 1}{2-1} = \frac{x_2 - 1}{3-1} = \frac{x_3 - 1}{-4-1} ,$$

odnosno

$$\Pi^1 \ldots \quad \frac{x_1 - 1}{1} = \frac{x_2 - 1}{2} = \frac{x_3 - 1}{-5} ,$$

pa je

$$\begin{aligned} \Pi^1 \ldots \quad 2\,x_1 - x_2 &= 1 \\ 5\,x_1 + x_3 &= 6 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Budući da se pravac Π^1 nalazi u hiperravnini Π^2, a u općem obliku pravac je presjek dvije hiperravnine, dovoljno je uzeti jednu od hiperravnina sustava (4.11), npr. $2\,x_1 - x_2 = 1$, i provjeriti vrijedi li za koordinate točke C $2\,x_1 - x_2 \le 1$ ili $2\,x_1 - x_2 \ge 1$. Budući da je $-8 + 5 = -3 \le 1$, zaključujemo da točka C leži u poluprosotru $2\,x_1 - x_2 \le 1$.
Dakle, Π_C^2 je presjek sljedećih zatvorenih poluprostora

$$\begin{aligned} 7\,x_1 - 6\,x_2 - x_3 &\le 0 \\ 7\,x_1 - 6\,x_2 - x_3 &\ge 0 \\ 2\,x_1 - \ x_2 \ - \ 1 &\le 0 \end{aligned}$$

4.2.2 Paralelotopi

Neka su $A_i(r_i)$, $i = 0, 1, \ldots, k$, linearno nezavisne točke prostora $\mathcal{A}^n$.
Tada su i vektori $a_j = \overrightarrow{A_0A_j}$, $j = 1, 2, \ldots, k$ linearno nezavisni.

Definicija 20. *Skup točaka prostora $\mathcal{A}^n$ kojima su radijus-vektori zadani sa*

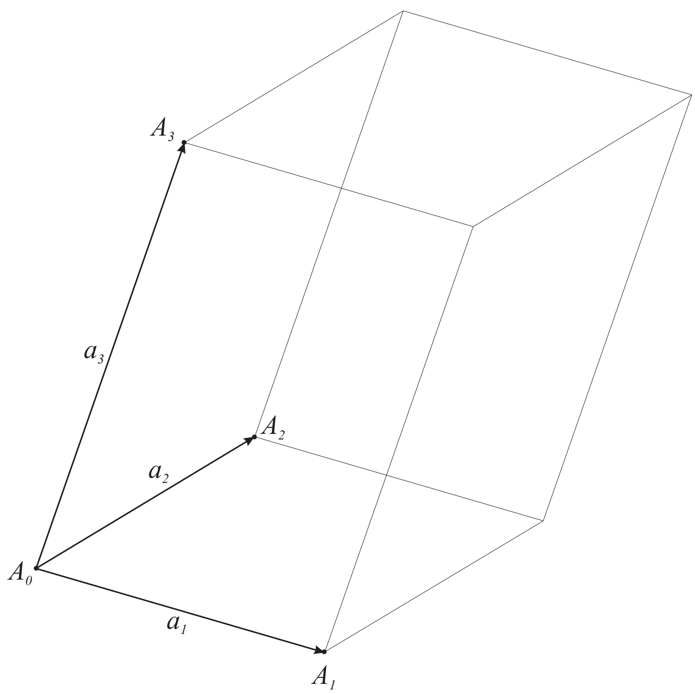
$$r = r_0 + \sum_{j=1}^{k} \tau_j \cdot a_j \qquad \text{gdje je } \; 0 \leq \tau_j \leq 1$$

naziva se k-dimenzionalni paralelotop *prostora $\mathcal{A}^n$ razapet vektorima $a_1, a_2, \ldots, a_k$ i označava sa* $P^k(A_0, \ldots, A_k)$.

Skup točaka s radijus-vektorima

$$r = r_0 + \sum_{j=1}^{k} \tau_j \cdot a_j \qquad \text{gdje je } \; 0 < \tau_j < 1$$

naziva se nutrina paralelotopa $P^k(A_0, \ldots, A_k)$, *a skup točaka paralelotopa koje ne pripadaju nutrini naziva se* rub paralelotopa *i označava sa* ∂P^k.



Slika 4.3: Paralelotop $P^3(A_0, A_1, A_2, A_3)$

Promatramo n-dimenzionalni paralelotop $P^n(A_0, \ldots, A_n)$ prostora $\mathcal{A}^n$, tj. skup točaka s radijus-vektorima

$$r = r_0 + \sum_{j=1}^{n} \tau_j \cdot a_j \quad , \quad 0 \leq \tau_j \leq 1 \; . \tag{4.12}$$

Pokažimo da je n-dimenzionalni paralelotop $P^n(A_0,\dots,A_n)$ prostora $\mathcal{A}^n$ presjek zatvorenih poluprostora. U tu svrhu označimo sa $\overline{A_i^n}$ skup svih točaka s radijus-vektorima

$$r_0 + \sum_{j=1}^{k} \tau_j \cdot a_j$$

gdje je $\tau_i \geq 0$, dok ostali koeficijenti τ_j , $j \neq i$, poprimaju bilo koje realne vrijednosti.

Na temelju razmatranja u 4.2.1. skup $\overline{A_i^n}$ je zatvoreni poluprostor.

Analogno je skup $\overline{B_i^n}$ točaka s radijus-vektorima

$$r_0 + \sum_{j=1}^{k} \tau_j \cdot a_j$$

gdje je $\tau_i \leq 1$, dok ostali koeficijenti τ_j, $j \neq i$, poprimaju bilo koje realne vrijednosti, također zatvoreni poluprostor.
Očigledno je paralelotop $P^n(A_0, A_1,\dots,A_n)$ u $\mathcal{A}^n$ presjek zatvorenih poluprostora $\overline{A_1^n}$, $\overline{B_1^n}$,..., $\overline{A_n^n}$, $\overline{B_n^n}$.

Korolar 3. *Paralelotop $P^n(A_0,\dots,A_n)$ prostora $\mathcal{A}^n$ je konveksan skup.*

Dokaz. Zatvoreni poluprostori su konveksni, a presjek konveksnih skupova je konveksan skup. □

Definicija 21. *Točke s radijus-vektorima*

$$r_0 + \sum_{j=1}^{n} \tau_j \cdot a_j \tag{4.13}$$

za koje je svaki od parametara $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ jednak ili 0 ili 1 nazivaju se vrhovi paralelotopa *$P^n(A_0,\dots,A_n)$ prostora $\mathcal{A}^n$.*

Broj vrhova n-dimenzionalnog paralelotopa je 2^n. Posebno, skupu vrhova pripadaju točke $A_0,\dots,A_n$. Vrhovi su, dakle, točke

$$A_0(r_0)\ ,\ A_1(r_0+a_1)\ ,\ \dots\ ,\ A_n(r_0+a_n)\ ,$$

$$A_{1,2}(r_0+a_1+a_2)\ ,\ \dots\ ,\ A_{i,j}(r_0+a_i+a_j),\ \dots\ ,\ A_{n-1,n}(r_0+a_{n-1}+a_n),$$

$$\dots\ ,\ A_{1,2,\dots,k}(r_0+\sum_{j=1}^{k} a_j)\ ,\ \dots\ ,\ A_{1,2,\dots,n}(r_0+\sum_{j=1}^{n} a_j)\ .$$

Uvrstimo li u (4.13) za parametar τ_i vrijednosti 0 ili 1, a za sve ostale parametre τ_j, $j \neq i$, vrijednosti $0 \leq \tau_j \leq 1$ dobivamo $(n-1)$-dimenzionalne paralelotope koji se nazivaju $(n-1)$-dimenzionalne strane od $P^n(A_0,\dots A_n)$.

Definicija 22. *Neka je* $P^k(A_0, \ldots, A_k)$ *paralelotop prostora* $\mathcal{A}^n$*. Skup točaka prostora* $\mathcal{A}^n$ *kojima su radijus-vektori zadani sa*

$$r = r_0 + \sum_{j=1}^{k} \tau_j \cdot a_j \ ,$$

gdje je $\tau_{r_1}, \ldots, \tau_{r_s} \in \{0,1\}$ *za neke* $r_1, \ldots, r_s \in \{1, \ldots, k\}$ *i* $0 \le \tau_j \le 1$ *za* $j \notin \{r_1, \ldots, r_s\}$, *naziva se* $(k-s)$-dimenzionalna strana *paralelotopa* $P^k(A_0, \ldots, A_k)$.

Pritom se 1*-dimenzionalne strane nazivaju* bridovima*, dok su* 0*-dimenzionalne strane* vrhovi.

Dvije $(n-1)$-dimenzionalne strane paralelotopa $P^n(A_0, \ldots, A_n)$ određene sa $\tau_i = 0$ i $\tau_i = 1$ su međusobno paralelne, odnosno leže u paralelnim $(n-1)$-ravninama.

Označimo sa N_k^n , broj k-dimenzionalinih strana n-dimenzionalnog paralelotopa. Vidjeli smo da je

$$N_0^n = 2^n,$$

a općenito za N_k^n vrijedi sljedeća tvrdnja.

Propozicija 13. *Broj* N_k^n k*-dimenzionalnih strana* n*-dimenzionalnog paralelotopa* $P^n(A_0, \ldots, A_n)$ *je*

$$N_k^n = 2^{n-k} \binom{n}{k} \ . \tag{4.14}$$

Dokaz. $(n-k)$-dimenzionalna strana paralelotopa $P^n(A_0, \ldots, A_n)$ sastoji se od točaka s radijus-vektorima

$$r = r_0 + \sum_{j=1}^{n} \tau_j \cdot a_j,$$

gdje je $\tau_{r_1}, \ldots, \tau_{r_k} \in \{0,1\}$ za neke $r_1, \ldots, r_k \in \{1, \ldots, n\}$ i $0 \le \tau_j \le 1$ za $j \notin \{r_1, \ldots, r_k\}$.
Zato je

$$N_{n-k}^n = 2^k \binom{n}{k} \ ,$$

odnosno

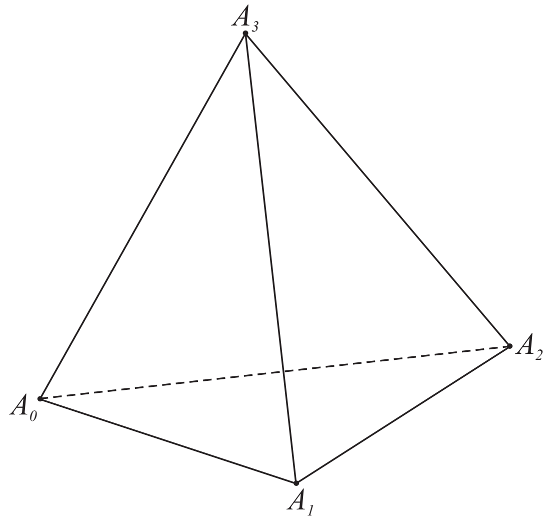
$$N_k^n = 2^{n-k} \binom{n}{n-k} = 2^{n-k} \binom{n}{k} \ .$$

□

Na primjer : $N_0^3 = 8$, $N_1^3 = 12$, $N_2^3 = 6$.

4.2.3 Simpleksi

Definicija 23. *Konveksno zatvorenje skupa* $\{A_0, A_1, \ldots, A_k\}$ *od* $k+1$ *linearno nezavisne točke afinog prostora* $\mathcal{A}^n$ *naziva se* k-dimenzionalni simpleks *razapet vrhovima* A_i *i označava sa* $S^k(A_0, A_1, \ldots, A_k)$.



Slika 4.4: Simpleks $S^3(A_0, A_1, A_2, A_3)$

Teorem 4. *Neka su* $A_i(r_i)$, $i = 0, 1, \ldots, k$ *linearno nezavisne točke afinog prostora* $\mathcal{A}^n$. *Simpleks* $S^k(A_0, A_1, \ldots, A_k)$ *je skup svih točaka prostora* $\mathcal{A}^n$ *kojima su radijus-vektori zadani sa*

$$r = \tau_0 r_0 + \tau_1 r_1 + \ldots + \tau_k r_k \ , \tag{4.15}$$

gdje je $\tau_i \geq 0$ *za* $i = 0, 1, \ldots, k$ *i* $\tau_0 + \tau_1 + \ldots + \tau_k = 1$.

Dokaz. Neka je S skup svih točaka prostora $\mathcal{A}^n$ s radijus-vektorima oblika (4.15). Taj skup je konveksan. Naime, za dvije točke $T'(r')$ i $T''(r'')$ skupa S s radijus-vektorima

$$r' = \tau_0' r_0 + \tau_1' r_1 + \ldots + \tau_k' r_k \quad i \quad r'' = \tau_0'' r_0 + \tau_1'' r_1 + \ldots + \tau_k'' r_k$$

točke segmenta $\overline{T'T''}$ imaju radijus-vektore oblika

$$r = \lambda r' + (1-\lambda) r'' = \sum_{i=0}^{k} (\lambda \tau_i' + (1-\lambda)\tau_i'') r_i \ , \qquad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Očito je $\lambda \tau_i' + (1-\lambda)\tau_i'' \geq 0$, za $i = 0, 1, \ldots, k$.
Pored toga vrijedi

$$\sum_{i=0}^{k} (\lambda \tau_i' + (1-\lambda)\tau_i'') \ = \ \lambda \sum_{i=0}^{k} \tau_i' + (1-\lambda) \sum_{i=0}^{k} \tau_i'' \ = 1 \ .$$

Preostaje pokazati da svaki konveksan skup K koji sadrži točke A_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, sadrži i čitav skup S.
Ovaj dio dokaza provest ćemo indukcijom po broju k. Ako je $k = 0$ tada je $S = \{A_0\}$ pa je $S \subseteq K$. Pretpostavimo zatim da je $k \geq 1$ i da tvrdnja vrijedi ako je broj vrhova simpleksa manji od $k+1$. To povlači da skup K sadrži točku A_k i skup S' točaka sa radijus-vektorima

$$\tau_0' r_0 + \tau_1' r_1 + \ldots + \tau_{k-1}' r_{k-1} \ , \qquad \tau_i' \geq 0 \ , \ \sum_{i=0}^{k-1} \tau_i' = 1 \ .$$

Ako je točka $P \in S$ zadana sa (4.15), tada u slučaju $\tau_k = 1$ imamo $P = A_k \in K$, dok u slučaju $\tau_k \neq 1$ supstitucijom

$$\alpha = \frac{1}{1-\tau_k} \qquad \text{i} \qquad \tau_i'' = \alpha\tau_i \ , \quad i = 0, 1, \ldots, k-1,$$

dobivamo

$$\tau_i'' \geq 0 \qquad i \qquad \tau_0'' + \tau_1'' + \ldots + \tau_{k-1}'' = 1 \ .$$

Na temelju pretpostavke zaključujemo da točka s radijus-vektorom

$$r'' = \tau_0'' r_0 + \tau_1'' r_1 + \ldots + \tau_{k-1}'' r_{k-1}$$

pripada skupu K. Ova činjenica i konveksnost skupa K povlače da i točka P s radijus-vektorom

$$r = \alpha^{-1} r'' + \tau_k r_k = (1-\tau_k) r'' + \tau_k r_k$$

pripada skupu K. Dakle je $S \subseteq K$. □

Prema gornjim razmatranjima simpleks $S^k(A_0, \ldots, A_k)$ kao konveksno zatvorenje skupa $\{A_0, \ldots, A_k\}$ sadrži sve točke s nenegativnim baricentričnim koordinatama u odnosu na sustav $(A_0, \ldots, A_k)$.

Korolar 4. *Simpleks $S^n(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ prostora $\mathcal{A}^n$ je presjek $n+1$ zatvorenih poluprostora.*

Dokaz. Skupovi

$$\overline{A}_i = \{\ T \in \mathcal{A}^n |\ r_T = \tau_0 r_0 + \ldots + \tau_n r_n \ , \ \sum_{j=0}^{n} \tau_j = 1, \ \tau_i \geq 0\} \ ,$$

za $i = 0, 1, \ldots, n,$ su zatvoreni poluprostori. Tada je

$$S^n(A_0, A_1, \ldots, A_n) \ = \ \bigcap_{i=0}^{n} \overline{A}_i \ .$$

□

Korolar 5. *Oduzmemo li od simpleksa jedan ili više njegovih vrhova, tada je tako dobiveni skup također konveksan.*

Dokaz. Odstranimo, na primjer, vrhove $A_0, \ldots, A_j$ simpleksa $S^k(A_0, \ldots, A_k)$. Preostale točke imaju radijus-vektore oblika (4.15), pri čemu je $\tau_i < 1$ za $i = 0, 1, \ldots, j$. Ako točke

$$P'(r'), \quad r' = \tau_0' r_0 + \ldots + \tau_k' r_k,$$

$$P''(r''), \quad r'' = \tau_0'' r_0 + \ldots + \tau_k'' r_k$$

zadovoljavaju taj uvjet, onda točka s radijus-vektorom

$$\lambda r' + (1-\lambda) r'' , \qquad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

ima baricentrične koordinate oblika

$$\lambda \tau_i' + (1-\lambda)\tau_i'' \ ,$$

čije su vrijednosti za $i = 0, 1, \ldots, j$ manje od 1. □

Korolar 6. *Neka je zadan simpleks* $S^k(A_0,\ldots,A_k)$. *Skup vrhova simpleksa* S^k *jednoznačno je određen.*

Dokaz. Da bismo dokazali ovu tvrdnju pokazat ćemo da je svojstvo razmatrano u korolaru 5. karakteristično samo za vrhove, odnosno da odstranjivanje bilo koje točke koja nije vrh simpleksa narušava njegovu konveksnost.
Neka je P jedna takva točka zadana sa (4.15).
Zbog $\tau_0+\ldots+\tau_k=1$, barem jedan od parametara $\tau_0,\cdots,\tau_k$ je različit od 0. Pretpostavimo da je $\tau_k\neq 0$. Supstitucijom

$$\alpha=\frac{1}{1-\tau_k}\qquad \text{i}\qquad r'=\alpha(\tau_0 r_0+\ldots+\tau_{k-1}r_{k-1})$$

dobivamo točku $P'(r')$ koja je različita od točke P i koja pripada simpleksu $S^k(A_0,\ldots A_k)$.
Vrijedi

$$r=\frac{1}{\alpha}\,r'+(1-\frac{1}{\alpha})\,r_k,$$

a to znači da točka $P(r)$ pripada segmentu čiji krajevi P' i A_k pripadaju skupu $S^k(A_0,\ldots,A_k)\setminus\{P\}$. Iz toga slijedi da skup $S^k(A_0,\ldots,A_k)\setminus\{P\}$ nije konveksan. □

Definicija 24. *Neka je* $S^n(A_0,\ldots,A_n)$ *n-dimenzionalni simpleks. Simpleks* $S^k(A_{i_0},\ldots,A_{i_k})$, $i_0,\ldots,i_k\in\{0,1,\ldots,n\}$ *naziva se* k-dimenzionalna strana simpleksa $S^n(A_0,\ldots,A_n)$.

Očito, n-dimenzionalni simpleks ima onoliko k-dimenzionalnih strana koliko ima različitih $(k+1)$-članih podskupova skupa sa $n+1$ elemenata.
Broj N_k^n k-dimenzionalnih strana n-dimenzinalnog simpleksa je

$$N_k^n=\binom{n+1}{k+1}\,.$$

Simpleks S^n ima, prema tome, $N_0^n=\binom{n+1}{1}=n+1$ vrhova, zatim ima $N_1^n=\binom{n+1}{2}=\frac{1}{2}n(n+1)$ bridova, itd.

Definicija 25. *Simpleks* $S_i^{n-1}(A_0,\ldots,A_{i-1},A_{i+1},\ldots,A_n)$ *tj.* $(n-1)$*-dimenzionalna strana simpleksa* $S^n(A_0,\ldots,A_n)$ *koja ne sadrži vrh* A_i *, naziva se* osnovica (baza) simpleksa S^n nasuprot vrhu A_i.

Točka T *s radijus-vektorom*

$$r_T=\frac{1}{n+1}(r_0+r_1+\ldots+r_n),$$

pri čemu su $r_0,r_1\ldots,r_n$ *radijus-vektori točaka* $A_0,A_1\ldots,A_n$, *naziva se* težište simpleksa $S^n(A_0,\ldots,A_n)$.

Teorem 5. *Neka je* T *težište simpleksa* $S^n(A_0,A_1,\ldots,A_n)$. *Pravac određen točkama* A_i *i* T *siječe osnovicu nasuprot vrhu* A_i *u njezinu težištu* T_i, *a točka* T *dijeli orijentiranu dužinu* $\overrightarrow{A_iT_i}$ *u omjeru* n .

Dokaz. Točke pravca A_iT određene su radijus-vektorima

$$r_i + \tau(r_T - r_i) = r_i + \tau\left[\frac{1}{n+1}(r_0 + r_1 + \ldots + r_n) - r_i\right],$$

pri čemu su $r_0, r_1 \ldots, r_n$ radijus-vektori točaka $A_0, A_1 \ldots, A_n$. Točka T_i toga pravca, u kojoj on siječe stranu S_i^{n-1}, odgovara onoj vrijednosti parametra τ za koju je koeficijent uz r_i jednak 0. Kako je taj koeficijent jednak

$$1 + \left(\frac{1}{n+1} - 1\right)\tau\ ,$$

to je tražena vrijednost od τ jednaka $\frac{n+1}{n}$. Dakle, radijus-vektor točke T_i je

$$r_i + \frac{n+1}{n}(r_T - r_i) = \frac{1}{n}(r_0 + r_1 + \ldots + r_{i-1} + r_{i+1} + \ldots + r_n)\ ,$$

iz čega zaključujemo da je T_i težište strane $S_i^{n-1}(A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n)$. Točka T dijeli orijentiranu dužinu $\overrightarrow{A_iT_i}$ u omjeru n, budući da točkama A_i, T, T_i odgovaraju vrijednosti parametra τ redom $0, 1, \frac{n+1}{n}$, pa je

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{TT_i} &= r_i + \frac{n+1}{n}(r_T - r_i) - r_T = \frac{1}{n}(r_T - r_i)\ ,\\
\overrightarrow{A_iT} &= r_T - r_i = n\overrightarrow{TT_i}\ .
\end{aligned}$$

□

Uobičajeno je da se segmenti $\overline{A_iT_i}$ nazivaju *težišnicama simpleksa* S^n. Vrijedi, dakle, da se svih $n+1$ težišnica simpleksa siječe u težištu T tog simpleksa.

Definirajmo još nekoliko pojmova u vezi s konveksnim skupovima točaka.

Definicija 26. *Skup točaka u realnom afinom prostoru $\mathcal{A}^n$ naziva se* omeđenim *ako postoji broj $M \in \mathbb{R}^+$ takav da za koordinate svih točaka toga skupa vrijedi*

$$\left|x_i\right| \leq M\ .$$

Omeđen skup u prostoru $\mathcal{A}^n$ koji je presjek konačnog broja poluprostora naziva se konveksni politop.

Posebno su P^k i S^k omeđeni skupovi. Nadalje, može se pokazati da je svako konveksno zatvorenje konačnog skupa točaka konveksni politop, te da je svaki konveksni politop konveksno zatvorenje nekog konačnog skupa točaka.

Primjer 33.
Politop Π u prostoru $\mathcal{A}^n$ zadan je kao konveksno zatvorenje skupa točaka O, E_1, E_2, E_3, E_4, $K(1,1,0,0)$, $L(0,0,1,1)$.
Sustav linearnih jednadžbi koje određuju politop Π je

$$\begin{gathered}
x_1 \geq 0\ ,\quad x_2 \geq 0\ ,\quad x_3 \geq\ 0,\quad x_4 \geq\ 0\ ,\\
x_1 + x_3 - 1 \leq 0\ ,\qquad x_1 + x_4 - 1 \leq 0\ ,\\
x_2 + x_3 - 1 \leq 0\ ,\qquad x_2 + x_4 - 1 \leq 0\ .
\end{gathered}$$

4.3 Orijentacija afinog prostora

Orijentacija afinog prostora zasniva se na orijentaciji pripadnog vektorskog prostora.

Pođimo stoga od prostora V^2 i uočimo u njemu bilo koja dva jednako orijentirana koordinatna sustava (e_1, e_2) i $(e_1{}', e_2{}')$. Jednog od njih, npr. $(e_1{}', e_2{}')$, možemo shvatiti kao rezultat kontinuiranog procesa u kojem su se kroz neko vrijeme vektori koordinatnog sustava (e_1, e_2) mijenjali nezavisno jedan od drugoga, ali ostajući u svakom trenutku i dalje koordinatni sustav prostora V^2, sve dok nije dostignut koordinatni sustav $(e_1{}', e_2{}')$.
Možemo, dakle, shvatiti da se ovdje radi o paru varijabilnih vektora $e_1(t)$ i $e_2(t)$ (varijabla t neka označava vrijeme), koji su se neprekidno mijenjali, a koji u početku procesa, za $t = 0$, imaju vrijednosti

$$\begin{aligned} e_1(0) &= e_1, \\ e_2(0) &= e_2, \end{aligned} \tag{4.16}$$

dok na kraju procesa, npr. $t = t_0$, poprimaju vrijednosti

$$\begin{aligned} e_1(t_0) &= e_1{}', \\ e_2(t_0) &= e_2{}'. \end{aligned}$$

U svakom trenutku t veza među koordinatnim sustavima $(e_1(t), e_2(t))$ i (e_1, e_2) je

$$e_i(t) = \alpha_{1i}(t)e_1 + \alpha_{2i}(t)e_2 \ , \qquad i = 1, 2 \ ,$$

gdje su $\alpha_{11}(t)$, $\alpha_{21}(t)$, $\alpha_{12}(t)$, $\alpha_{22}(t)$ neprekidne funkcije varijable t .

Matrica transformacije jednog sustava u drugi je

$$\mathsf{A_t} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(t) & \alpha_{12}(t) \\ \alpha_{21}(t) & \alpha_{22}(t) \end{bmatrix}$$

pri čemu je $\det \mathsf{A_t} \neq 0$ za svaki t .

Međutim, $\det \mathsf{A_t}$ je također neprekidna funkcija od t i zato u toku cijelog procesa zadržava isti predznak. Prema (4.16) u trenutku $t = 0$ je

$$\mathsf{A_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ ,$$

pa je stoga $\det \mathsf{A_0} = 1$.
Slijedi da je $\det \mathsf{A_t} > 0$ tijekom cijelog procesa, pa tako i na kraju procesa.

Dakle, bilo koja dva koordinatna sustava iste orijentacije povezana su matricom transformacije s pozitivnom determinantom.

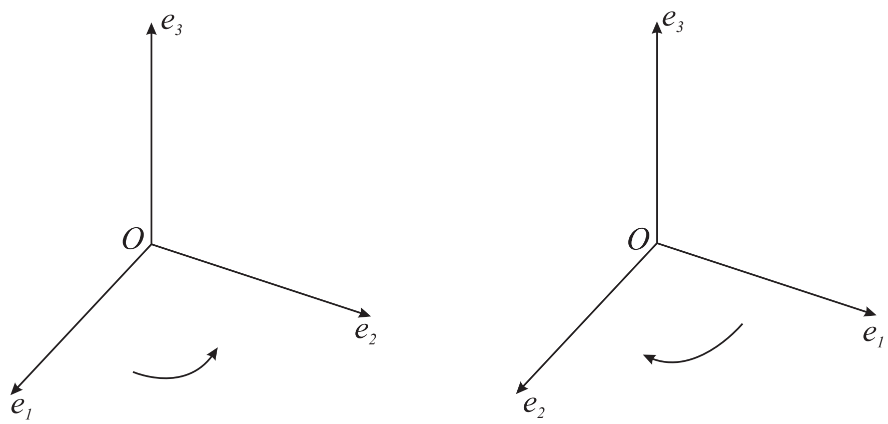
Matrica transformacije nekog koordinatnog sustava u koordinatni sustav suprotne orijentacije ima negativnu determinantu. Naime, provođenjem istog postupka kao za koordinatne sustave iste orijentacije, ali uz početni uvjet

$$\begin{aligned} e_1(0) &= e_2, \\ e_2(0) &= e_1, \end{aligned}$$

dobivamo $\mathsf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, pa je $\det \mathsf{A}_0 = -1$. Negativan predznak $\det \mathsf{A}_t$ zadržava u cijelom procesu.

Predznak determinante matrice transformacije iz jednog sustava u drugi je traženi kriterij za određivanje orijentacije.

Definicija 27. *Za dva koordinatna sustava* $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ *i* $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ *vektorskog prostora* V^n *kažemo da su* jednako (suprotno) orijentirani *ako za determinantu matrice transformacije koordinatnih sustava* A *vrijedi* $\det \mathsf{A} > 0$ $(\det \mathsf{A} < 0)$.



Slika 4.5: Suprotno orijentirani koordinatni sustavi

U skupu svih koordinatnih sustava vektorskog prostora V^n binarna relacija "biti iste orijentacije" je relacija ekvivalencije.

refleksivnost: Svaki koordinatni sustav je jednako orijentiran kao i on sam, jer je $\det \mathsf{E} = 1$;

simetričnost: Ako su koordinatni sustavi $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ i $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ jednako orijentirani, jednako su orijentirani i koordinatni sustavi $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ i $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, budući da su pripadne matrice transformacije A i B u ta dva slučaja inverzne, pa je $\det \mathsf{B} = \det \mathsf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathsf{A}}$;

tranzitivnost: Neka su zadana tri koordinatna sustava $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ i $(e''_1, e''_2, \ldots, e''_n)$. Ako je A matrica transformacije prvog koordinatnog sustava u drugi, B matrica transformacije drugog koordinatnog sustava u treći, tada je $\mathsf{BA} = \mathsf{C}$ matrica transformacije prvog koordinatnog sustava u treći. Tranzitivnost relacije slijedi iz jednakosti $\det \mathsf{C} = (\det \mathsf{B})(\det \mathsf{A})$.

Orijentacija na skupu svih koordinatnih sustava prostora V^n inducira particiju toga skupa na dvije klase ekvivalencije koje sadrže sve koordinatne sustave iste orijentacije.
Te klase možemo lako formirati. Odaberimo bilo koji koordinatni sustav $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ i nazovimo prvom klasom skup svih onih koordinatnih sustava koji su iste orijentacije kao i odabrani koordinatni sustav, a drugom klasom skup svih onih koordinatnih sustava koji su suprotne orijentacije u odnosu na odabrani koordinatni sustav.

Definicija 28. *Vektorski prostor V^n naziva se* orijentirani vektorski prostor *ako je u njemu istaknuta jedna od dviju klasa koordinatnih sustava kao klasa pozitivno orijentiranih koordinatnih sustava. Koordinatni sustavi druge klase su tada negativno orijentirani.*

Afini prostor $\mathcal{A}^n$ naziva se orijentirani afini prostor *ako je njemu pridruženi vektorski prostor V^n orijentiran.*

Za koordinatni sustav $(0; e_1, \dots, e_n)$ orijentiranog afinog prostora $\mathcal{A}^n$ kažemo da je pozitivno orijentiran *(desni) ako je koordinatni sustav $(e_1, \dots, e_n)$ prostora V^n pozitivno orijentiran.*

Točke $A_0, \dots, A_n$ su vrhovi n-dimenzionalnog simpleksa S^n ako i samo ako je $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ koordinatni sustav prostora V^n. Promjenom redoslijeda točaka A_i dobit ćemo neki drugi koordinatni sustav, pa tako možemo dobiti $n!$ različitih koordinatnih sustava.

Kako podijeliti taj skup od $n!$ koordinatnih sustava na dvije klase jednako orijentiranih koordinatnih sustava?

Imajući na umu svojstva determinante, lako dokazujemo tvrdnju:

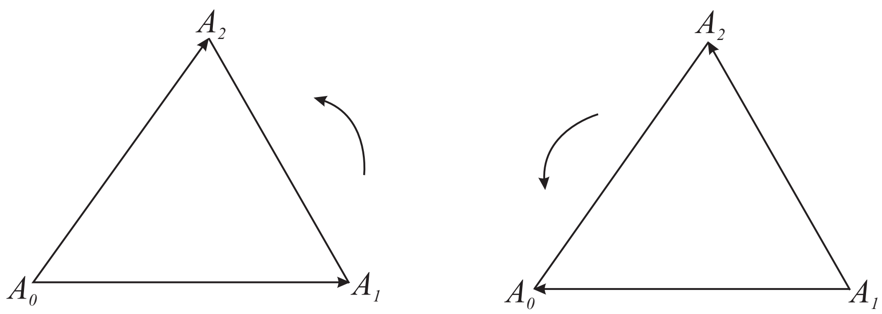
> Svi koordinatni sustavi koji se iz sustava $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ mogu dobiti parnim permutacijama vrhova $A_0, \dots, A_n$ međusobno su jednako orijentirani, a suprotno orijentirani u odnosu na koordinatne sustave koje iz promatranog koordinatnog sustava nastaju neparnim permutacijama.

Stoga je za određenje orijentacije prostora $\mathcal{A}^n$ dovoljno zadati redoslijed vrhova n-dimenzionalnog simpleksa S^n. U tom slučaju kažemo da je simpleks S^n orijentiran.

Orijentacijom simpleksa $S^n(A_0, A_1, \dots, A_n)$ uvodi se orijentacija njegovih strana na sljedeći način:
Neka je S_i^{n-1} $(n-1)$-dimenzionalna strana nasuprot vrhu A_i. Parnom permutacijom početnog redoslijeda vrhova $A_0, \dots, A_n$ dovedemo točku A_i na prvo mjesto u nizu. Orijentacija simpleksa S_i^{n-1} određuje se tako dobivenim redoslijedom preostalih vrhova.

Primjer 34. *Orijentacija simpleksa u prostoru $\mathcal{A}^2$*

Na slici 4.6. strelice označavaju orijentaciju strana $S_0^1 = S^1(A_1, A_2)$ i $S_1^1 = S^1(A_2, A_0)$ trokuta $S^2(A_0, A_1, A_2)$.



Slika 4.6: Orijentacije strana simpleksa $S_1^2(A_0, A_1, A_2)$ i $S_2^2(A_1, A_2, A_0)$

Primjer 35. *Orijentacija simpleksa u prostoru* $\mathcal{A}^n$, $n \geq 3$

Promotrimo dvije $(n-1)$-strane simpleksa $S^n(A_0, \ldots, A_n)$, npr. S_0^{n-1} i S_1^{n-1}, pri čemu je $n \geq 3$.
Simpleks S_0^{n-1} orijentiran je sa $A_1, A_2, \ldots, A_n$, a njegova $(n-2)$-strana nasuprot vrha A_1 sa $A_2, \ldots, A_n$.
Kako bismo odredili orijentaciju simpleksa S_1^{n-1}, niz $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ prevedimo s dvije zamjene u $A_1, A_2, A_0, \ldots, A_n$. Uočavamo da je S_1^{n-1} orijentiran sa $A_2, A_0, \ldots, A_n$, a njegova $(n-2)$-dimenzionalna strana nasuprot vrha A_2 sa $A_0, A_3, \ldots, A_n$.

Poglavlje 5

Afina preslikavanja

U ovom poglavlju razmatrat ćemo preslikavanja afinog prostora. Zbog veze između afinih i vektorskih prostora te značenja linearnih operatora za vektorske prostore, promatrat ćemo ona preslikavanja afinih prostora koja su čvrsto povezana s linearnim operatorima u pridruženim vektorskim prostorima.

5.1 Pojam afinog preslikavanja

Definicija 29. *Neka su V i V' vektorski prostori nad istim poljem F, a $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$ afini prostori nad V odnosno V'. Za* preslikavanje $f_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ *kažemo da je* afino, *ako je preslikavanje $f : V \to V'$, definirano sa*

$$f(\overrightarrow{X_1X_2}) = \overrightarrow{f_a(X_1)f_a(X_2)}\ , \qquad X_1, X_2 \in \mathcal{A}\ , \tag{5.1}$$

linearni operator. Preslikavanje f se naziva linearni operator pridružen afinom preslikavanju f_a.

Primjer 36.

Identično preslikavanje $i_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ afinog prostora $\mathcal{A}$ nad vektorskim poljem V je afino.

Označimo sa i operator pridružen preslikavanju i_a prema (5.1). Tada je zbog

$$i(\overrightarrow{X_1X_2}) = \overrightarrow{i_a(X_1)\, i_a(X_2)} = \overrightarrow{X_1X_2}\ , \qquad X_1, X_2 \in \mathcal{A}\ ,$$

i jedinični operator na V. Kako je jedinični operator linearan, slijedi da je i_a afino preslikavanje.

Primjer 37.

Neka je $\mathcal{A}$ afini prostor nad V, $\mathcal{A}'$ afini prostor nad V' i C čvrsta točka prostora $\mathcal{A}'$. Preslikavanje $f_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ definirano sa $f_a(X) = C$, $X \in \mathcal{A}$ je afino.

Preslikavanje $f : V \to V'$ zadano sa (5.1)

$$f(\overrightarrow{X_1X_2}) = \overrightarrow{f_a(X_1)f_a(X_2)} = \overrightarrow{CC} = \theta'\ , \quad X_1, X_2 \in \mathcal{A}\ ,$$

je nul-operator, a to je linearni operator, pa je f_a afino preslikavanje.

Primjer 38. *Svaki linearni operator je afino preslikavanje*

Svaki vektorski prostor V je afini prostor nad samim sobom ako definiramo $\overrightarrow{xy} = y - x$, za $x, y \in V$ (primjer 1) .
Promatrajmo dva vektorska prostora V i V' nad poljem F i linearni operator $f : V \to V'$. Tada je f afino preslikavanje s pridruženim linearnim operatorom f, jer za sve $x_1, x_2 \in V$ vrijedi:

$$\overrightarrow{f(x_1)f(x_2)} = f(x_2) - f(x_1) = f(x_2 - x_1) = f(\overrightarrow{x_1x_2}) \ .$$

Afino preslikavanje definirali smo pomoću njemu pridruženog linearnog operatora. Moguće je, međutim, afino preslikavanje definirati direktno njegovim djelovanjem na afinoj kombinaciji točaka. Preciznije, preslikavanje je afino ako afinu kombinaciju točaka preslikava u afinu kombinaciju njihovih slika.

Teorem 6. *Neka su V i V' vektorski prostori nad istim poljem F, dok su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$ afini prostori nad V, odnosno V'.*
Preslikavanje $f_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ je afino ako i samo ako za svake dvije točke $X, Y \in \mathcal{A}$ i svaka dva skalara $\alpha, \beta \in F$, takva da je $\alpha + \beta = 1$, vrijedi

$$f_a(\alpha X + \beta Y) = \alpha f_a(X) + \beta f_a(Y) \ , \tag{5.2}$$

odnosno za svakih n točaka $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{A}$ i skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$, takve da je $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, vrijedi

$$f_a(\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_n X_n) = \alpha_1 f_a(X_1) + \cdots + \alpha_n f_a(X_n) \ . \tag{5.3}$$

Dokaz. Jasno je da za $n = 2$ iz (5.3) dobivamo (5.2). Implikacija u obrnutom smjeru pokazuje se indukcijom po n.

Dokažimo ekvivaletnost definicije 29 i tvrdnje (5.2).
Pretpostavimo da je preslikavanje $f_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ afino, odnosno da je njemu pridružen operator $f : V \to V'$ linearan. Vrijedi

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{XY}) &= \overrightarrow{f_a(X)f_a(Y)} = \overrightarrow{O'f_a(Y)} - \overrightarrow{O'f_a(X)} \ , \\ f(\overrightarrow{OX}) &= \overrightarrow{f_a(O)f_a(X)} = \overrightarrow{O'f_a(X)} - \overrightarrow{O'f_a(O)} \ . \end{aligned} \tag{5.4}$$

Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je $\alpha + \beta = 1$.
Treba ispitati vrijedi li

$$f_a(\alpha X + \beta Y) = \alpha f_a(X) + \beta f_a(Y) \, ,$$

odnosno je li

$$\overrightarrow{O' f_a(\alpha X + \beta Y)} = \overrightarrow{O' \left(\alpha f_a(X) + \beta f_a(Y)\right)} \ . \tag{5.5}$$

U tu svrhu pogledajmo čemu je jednako $\overrightarrow{O' f_a(\alpha X + \beta Y)} - \overrightarrow{O' f_a(O)}$, odnosno $\overrightarrow{O' \left(\alpha f_a(X) + \beta f_a(Y)\right)} - \overrightarrow{O' f_a(O)}$. Zbog (5.4) i $\alpha + \beta = 1$ je

$$\overrightarrow{O' f_a(\alpha X + \beta Y)} - \overrightarrow{O' f_a(O)} = f(\,\overrightarrow{O(\alpha X + \beta Y)}\,) = f(\alpha\, \overrightarrow{OX} + \beta\, \overrightarrow{OY}\,) \ . \tag{5.6}$$

Također je zbog $\alpha+\beta=1$,

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{O'\,(\alpha f_a(X)+\beta f_a(Y))} - \overrightarrow{O' f_a(O)} \\
&= \alpha\, \overrightarrow{O' f_a(X)} + \beta\, \overrightarrow{O' f_a(Y)} - \overrightarrow{O' f_a(O)} \\
&= \alpha\, \overrightarrow{O' f_a(X)} + \beta\, \overrightarrow{O' f_a(Y)} - (\alpha+\beta)\, \overrightarrow{O' f_a(O)} \\
&= \alpha\,(\, \overrightarrow{O' f_a(X)} - \overrightarrow{O' f_a(O)}\,) + \beta\,(\, \overrightarrow{O' f_a(Y)} - \overrightarrow{O' f_a(O)}\,) \\
&= \alpha\, f(\overrightarrow{OX}) + \beta\, f(\overrightarrow{OY})\ .
\end{aligned}
$$

Zbog linearnosti operatora f ovaj je vektor jednak vektoru (5.6), pa vrijedi jednakost (5.5), odnosno (5.2).

Pretpostavimo sada da za preslikavanje $f_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ vrijedi (5.2) .
Neka su $O \in \mathcal{A}$ i $O' \in \mathcal{A}'$ čvrste točke. Promatrajmo preslikavanje $g_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ definirano sa

$$g_a(X) = f_a(X) + \overrightarrow{f_a(O)O'}\ .$$

Ovdje pod zbrajanjem točke i vektora podrazumijavamo da je

$$A + v = B \qquad \text{ako i samo ako je} \qquad v = \overrightarrow{AB}\ .$$

Za ovako definirano preslikavanje g_a vrijedi

$$\overrightarrow{f_a(O)\, O'} = \overrightarrow{f_a(X)\, g_a(X)}\ ,$$

odnosno

$$\overrightarrow{f_a(O) f_a(X)} = \overrightarrow{O' g_a(X)}\ . \tag{5.7}$$

Posebno je

$$g_a(O) = f_a(O) + \overrightarrow{f_a(O)\, O'} = O'\ . \tag{5.8}$$

Pokažimo da i za preslikavanje g_a vrijedi jednakost (5.2).
Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je $\alpha+\beta=1$.
Budući da za f_a vrijedi (5.2), slijedi

$$
\begin{aligned}
g_a(\alpha X + \beta Y) &= f_a(\alpha X + \beta Y) + \overrightarrow{f_a(O)O'} \\
&= \alpha f_a(X) + \beta f_a(Y) + (\alpha+\beta)\, \overrightarrow{f_a(O)O'} \\
&= \alpha\,(\, f_a(X) + \overrightarrow{f_a(O)O'}\,) + \beta\,(\, f_a(Y) + \overrightarrow{f_a(O)O'}\,) \\
&= \alpha\, g_a(X) + \beta\, g_a(Y)\ .
\end{aligned}
$$

Neka je $f : V \to V'$ operator pridružen preslikavanju f_a . Tada zbog (5.7) i (5.8) vrijedi

$$f(\overrightarrow{OX}) = \overrightarrow{f_a(O) f_a(X)} = \overrightarrow{O' g_a(X)}\ .$$

Ispitajmo aditivnost operatora f.
Neka su $X_1, X_2 \in \mathcal{A}$, te $Y \in \mathcal{A}$ točka za koju je $\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OX_1} + \overrightarrow{OX_2}$. Tada je

$$f(\overrightarrow{OY}) = f(\overrightarrow{OX_1} + \overrightarrow{OX_2}) = \overrightarrow{O' g_a(Y)}\ .$$

S druge strane je

$$f(\overrightarrow{OX_1}) + f(\overrightarrow{OX_2}) = \overrightarrow{O'g_a(X_1)} + \overrightarrow{O'g_a(X_2)} = \overrightarrow{O'Y'} \ .$$

za neku točku $Y' \in \mathcal{A}'$. Treba pokazati da je $g_a(Y) = Y'$. Budući da je

$$\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OX_1} + \overrightarrow{OX_2} = \overrightarrow{OX_1} + \overrightarrow{OX_2} - 1 \cdot \overrightarrow{OO} \ ,$$

tada je $Y = X_1 + X_2 - O$.
Analogno je $Y' = g_a(X_1) + g_a(X_2) - O'$.

Kako za g_a vrijedi (5.2), odnosno (5.3), slijedi

$$\begin{aligned} g_a(Y) &= g_a(X_1 + X_2 - O) = g_a(X_1) + g_a(X_2) - g_a(O) \\ &= g_a(X_1) + g_a(X_2) - O' \ . \end{aligned}$$

Dakle, $g_a(Y) = Y'$, pa je preslikavanje f aditivno.
Ispitajmo još homogenost preslikavanja f.
Označimo sa S i T točke takve da je

$$\begin{aligned} f(\alpha\, \overrightarrow{OX}) &= f(\overrightarrow{OS}) = \overrightarrow{O'g_a(S)} \\ \alpha\, f(\overrightarrow{OX}) &= \alpha\, \overrightarrow{O'g_a(X)} = \overrightarrow{O'T} \end{aligned}$$

Treba pokazati da je $g_a(S) = T$. Budući da je

$$\overrightarrow{OS} = \alpha\, \overrightarrow{OX} = \alpha\, \overrightarrow{OX} + (1-\alpha)\, \overrightarrow{OO} \ ,$$

odnosno $S = \alpha\, X + (1-\alpha)\, O$, slijedi

$$\begin{aligned} g_a(S) &= g_a(\alpha\, X + (1-\alpha)\, O) \\ &= \alpha\, g_a(X) + (1-\alpha) g_a(O) \\ &= \alpha\, g_a(X) + (1-\alpha)\, O' \ . \end{aligned}$$

S druge strane je

$$\overrightarrow{O'T} = \alpha\, \overrightarrow{O'g_a(X)} = \alpha\, \overrightarrow{O'g_a(X)} + (1-\alpha)\, \overrightarrow{O'O'} \ ,$$

odnosno $T = \alpha\, g_a(X) + (1-\alpha)\, O'$.
Dakle $g_a(S) = T$, pa je preslikavanje f homogeno, odnosno linearno, te je f_a afino preslikavanje. $\square$

5.2 Svojstva afinih preslikavanja

Prema definiciji 29. svakom afinom preslikavanju $f_a : A \to A'$ pridružen je točno jedan linearni operator $f : V \to V'$.
Međutim, za dani linearni operator $g : V \to V'$ može postojati više afinih preslikavanja kojima je pridružen linearni operator g.

Propozicija 14. *Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$ afini prostori nad vektorskim prostorima V odnosno V', neka je $g : V \to V'$ linearni operator te neka su zadane točke $P \in \mathcal{A}$, $P' \in \mathcal{A}'$. Tada postoji točno jedno afino preslikavanje $f_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ kojemu je pridružen linearni operator g i $f_a(P) = P'$.*

Dokaz. Dokažimo najprije egzistenciju takvog afinog preslikavanja.
Za točke $P \in \mathcal{A}$ i $X \in \mathcal{A}$ postoji točno jedan vektor $\overrightarrow{PX} \in V$. Vektorom $\overrightarrow{PX} \in V$ jednoznačno je određen vektor $g(\overrightarrow{PX}) \in V'$. Nadalje, za točku $P' \in \mathcal{A}'$ i vektor $g(\overrightarrow{PX}) \in V'$ postoji u $\mathcal{A}'$ točno jedna točka X' takva da je $\overrightarrow{P'X'} = g(\overrightarrow{PX})$.
Na ovaj način je svakoj točki $X \in \mathcal{A}$ pridružena jednoznačno određena točka $X' \in \mathcal{A}'$, pa je sa $f_a(X) = X'$ definirano preslikavanje $f_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$. To preslikavanje ima svojstvo $f_a(P) = P'$, što je na temelju gornje konstrukcije očito jer svaki linearni operator nul-vektor preslikava u nul-vektor.
Za sve $X, Y \in \mathcal{A}$ vrijedi

$$\begin{aligned} g(\overrightarrow{XY}) &= g(\overrightarrow{XP} + \overrightarrow{PY}) = g(-\overrightarrow{PX} + \overrightarrow{PY}) = -g(\overrightarrow{PX}) + g(\overrightarrow{PY}) \\ &= -\overrightarrow{P'X'} + \overrightarrow{P'Y'} = \overrightarrow{X'P'} + \overrightarrow{P'Y'} = \overrightarrow{X'Y'} \\ &= \overrightarrow{f_a(X)f_a(Y)} \ . \end{aligned}$$

Operator g je linearan, pa je f_a afino preslikavanje budući da mu je pridružen linearni operator.

Pokažimo sada jednoznačnost preslikavanja f_a .
Neka su $\bar{f}_a, \bar{\bar{f}}_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ dva afina preslikavanja s pridruženim linearnim operatorima $\bar{f}$ i $\bar{\bar{f}}$, pri čemu je $\bar{f} = \bar{\bar{f}} = g$ i $\bar{f}_a(P) = \bar{\bar{f}}_a(P) = P'$. Za sve $X \in \mathcal{A}$ tada vrijedi

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P'\,\overline{f_a}(X)} &= \overrightarrow{\overline{f_a}(P)\,\overline{f_a}(X)} \\ &= \overline{f}(\overrightarrow{PX}) = g(\overrightarrow{PX}) = \overline{\overline{f}}(\overrightarrow{PX}) \\ &= \overrightarrow{\overline{\overline{f_a}}(P)\,\overline{\overline{f_a}}(X)} \\ &= \overrightarrow{P'\,\overline{\overline{f_a}}(X)} \ . \end{aligned}$$

Odavde slijedi $\overline{f_a}(X) = \overline{\overline{f_a}}(X)$, za sve $X \in \mathcal{A}$, pa je $\overline{f_a} = \overline{\overline{f_a}}$. □

Navedimo neka važnija svojstva afinih preslikavanja.

Propozicija 15. *Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$ afini prostori nad vektorskim prostorima V i V' te neka je $f_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ afino preslikavanje s pridruženim linearnim operatorom $f : V \to V'$.*
Ako je Π ravnina u $\mathcal{A}$ s pridruženim vektorskim potprostorom $W \preceq V$, tada je $f_a(\Pi)$ ravnina u $\mathcal{A}'$ i $f(W)$ njoj pridružen potprostor.

Dokaz. Znamo da je $f(W) \preceq V'$. Neka je $A \in \Pi$. Tada je

$$\begin{aligned} f_a(\Pi) = \{\, f_a(T) \mid T \in \Pi\} &= \{\, f_a(T) \mid \overrightarrow{AT} \in W \,\} = \\ &= \{\, f_a(T) \mid f(\overrightarrow{AT}) \in f(W) \,\} = \\ &= \{\, f_a(T) \mid \overrightarrow{f_a(A)f_a(T)} \in f(W) \,\} \ . \end{aligned}$$

□

Propozicija 16. *Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$ afini prostori nad vektorskim prostorima V i V', neka je $f_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ afino preslikavanje te neka su Π_1 i Π_2 paralelne ravnine u $\mathcal{A}$. Tada su $f_a(\Pi_1)$ i $f_a(\Pi_2)$ paralelne ravnine, odnosno afina preslikavanja čuvaju paralelnost.*

Dokaz. Označimo sa W_1 i W_2 vektorske prostore pridružene ravninama Π_1 i Π_2. Zbog paralelnosti tih ravnina je $W_1 \subseteq W_2$ ili $W_2 \subseteq W_1$. Pretpostavimo da je $W_1 \subseteq W_2$. Tada je $f(W_1) \subseteq f(W_2)$.
Prema teoremu 15. $f(W_1)$ i $f(W_2)$ su vektorski prostori pridruženi ravninama $f_a(\Pi_1)$ i $f_a(\Pi_2)$, pa je $f_a(\Pi_1) \parallel f_a(\Pi_2)$. $\square$

Sljedeća propozicija opisuje još jednu invarijantu afinih preslikavanja.

Propozicija 17. *Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$ afini prostori nad vektorskim prostorima V i V', te neka je $f_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ afino preslikavanje. Nadalje, neka su $P, Q, X \in \mathcal{A}$ takve da je $f_a(P) \neq f_a(Q)$. Tada vrijedi*

$$(PQX) = \lambda \qquad \Rightarrow \qquad (\, f_a(P) f_a(Q) f_a(X)) = \lambda$$

tj. afina preslikavanja čuvaju omjer dijeljenja orijentirane dužine .

Dokaz. $(PQX) = \lambda$ znači da je $P \neq Q \neq X$ i $\overrightarrow{PX} = \lambda\, \overrightarrow{XQ}$.
Pokažimo da je $f_a(Q) \neq f_a(X)$. Ako pretpostavimo suprotno, tj. da je $f_a(Q) = f_a(X)$, onda je

$$\begin{aligned}
\theta \neq \overrightarrow{f_a(P) f_a(Q)} &= f(\overrightarrow{PQ}) = f(\overrightarrow{PX} + \overrightarrow{XQ}) = f(\overrightarrow{PX}) + f(\overrightarrow{XQ}) \\
&= f(\lambda\, \overrightarrow{XQ}) + f(\overrightarrow{XQ}) = (\lambda + 1)\ f(\overrightarrow{XQ}) \\
&= (\lambda + 1)\ \overrightarrow{f_a(X) f_a(Q)} = \theta
\end{aligned}$$

Pretpostavka je dovela do kontradikcije, pa je zaista $f_a(Q) \neq f_a(X)$.
Nadalje vrijedi

$$\overrightarrow{f_a(P) f_a(X)} = f(\overrightarrow{PX}) = \lambda\ f(\overrightarrow{XQ}) = \lambda\ \overrightarrow{f_a(X) f_a(Q)}\ ,$$

pa zbog $f_a(P) \neq f_a(Q) \neq f_a(X)$ slijedi

$$(\, f_a(P) f_a(Q) f_a(X)) = \lambda = (PQX)\ .$$

$\square$

5.3 Afina grupa prostora $\mathcal{A}^n$

Propozicija 18. *Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$ afini prostori nad vektorskim prostorima V odnosno V' i neka je $f_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ afino preslikavanje.*
Preslikavanje f_a je injekcija (surjekcija, bijekcija) ako i samo ako je pridruženi linearni operator $f : V \to V'$ injekcija (surjekcija, bijekcija).

Dokaz. Dokažimo najprije da ako iz injektivnosti funkcije f_a slijedi injektivnost funkcije f. Za točku $P \in \mathcal{A}$ i vektore $x, y \in V$ jednoznačno su određene točke $X, Z \in \mathcal{A}$, takve da je $\overrightarrow{PX} = x$ i $\overrightarrow{PY} = y$.
Zbog injektivnosti preslikavanja f_a vrijedi

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) \quad &\Rightarrow \quad f(\overrightarrow{PX}) = f(\overrightarrow{PY}) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{f_a(P)f_a(X)} = \overrightarrow{f_a(P)f_a(Y)} \\ &\Rightarrow \quad f_a(X) = f_a(Y) \quad \Rightarrow \quad X = Y \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PY} \\ &\Rightarrow \quad x = y \ , \end{aligned}$$

pa je i f injekcija.
Dokažimo sada da vrijedi i obrat; ako je f injekcija, onda je i f_a injekcija.
Za točke $P, X, Y \in \mathcal{A}$ jednoznačno su određeni vektori $x, y \in V$, takvi da je $\overrightarrow{PX} = x$ i $\overrightarrow{PY} = y$.

Za sve $X, Y \in \mathcal{A}$ vrijedi

$$\begin{aligned} f_a(X) = f_a(Y) \quad &\Rightarrow \quad \overrightarrow{f_a(P)f_a(X)} = \overrightarrow{f_a(P)f_a(Y)} \quad \Rightarrow \quad f(\overrightarrow{PX}) = f(\overrightarrow{PY}) \\ &\Rightarrow \quad f(x) = f(y) \quad \Rightarrow \quad x = y \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PY} \\ &\Rightarrow \quad X = Y \ , \end{aligned}$$

pa je f_a injekcija.
Slično se dokazuje tvrdnja za surjektivnost, a tvrdnja za bijektivnost je neposredna posljedica ta dva dokaza. □

Propozicija 19. *Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$ afini prostori nad vektorskim prostorima V odnosno V' i neka je $f_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ bijektivno afino preslikavanje s pridruženim linearnim operatorom f. Tada je inverzno preslikavanje $f_a^{-1} : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ također afino, a njemu pridruženi linearni operator je upravo f^{-1} .*

Dokaz. Kako je f_a bijekcija, linearni operator $f : V \to V'$ pridružen preslikavanju f_a je također bijekcija (propozicija 18). Stoga postoji inverzno preslikavanje $f^{-1} : V' \to V$ i ono je linearni operator[1]. Zbog bijektivnosti preslikavanja f_a postoji njemu inverzno preslikavanje f_a^{-1} .
Za $X, Y \in \mathcal{A}$ označimo sa X' i Y' točke $X' = f_a(X)$ i $Y' = f_a(Y)$. Tada je $X = f_a^{-1}(X')$ i $Y = f_a^{-1}(Y')$.
Treba pokazati da je sa

$$g(\overrightarrow{X'Y'}) = \overrightarrow{f_a^{-1}(X')f_a^{-1}(Y')} \qquad \text{za sve } \overrightarrow{X'Y'} \in V'$$

definirano preslikavanje $g : V' \to V$ linearan operator i da vrijedi $g = f^{-1}$.
Za sve $X', Y' \in \mathcal{A}'$ vrijedi

$$\begin{aligned} g(\overrightarrow{X'Y'}) &= \overrightarrow{f_a^{-1}(X')f_a^{-1}(Y')} = \overrightarrow{XY} = f^{-1}(f(\overrightarrow{XY})) \\ &= f^{-1}\overrightarrow{(f_a(X)f_a(Y))} = f^{-1}(\overrightarrow{X'Y'}) \ , \end{aligned}$$

pa je $g = f^{-1}$. Kako je f^{-1} linearan operator, linearan je i operator g. □

[1]Inverz linearnog operatora također je linearni operator.

Propozicija 20. *Neka su $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ i $\mathcal{A}''$ afini prostori nad vektorskim prostorima V, V' odnosno V''. Nadalje, neka su $f_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ i $g_a : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}''$ afina preslikavanja.*
Tada je kompozicija $g_a \circ f_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}''$ također afino preslikavanje i $g \circ f$ je njemu pridružen linearni operator.

Dokaz. Sa

$$h(\overrightarrow{XY}) \;=\; \overrightarrow{(g_a \circ f_a(X))\,(g_a \circ f_a(Y))} \tag{5.9}$$

za sve $\overrightarrow{XY} \in V$ definiran je operator $h : V \to V''$.
Za sve $X, Y \in \mathcal{A}$ vrijedi

$$\begin{aligned} h(\overrightarrow{XY}) \;&=\; \overrightarrow{g_a(f_a(X))g_a(f_a(Y))} \;=\; g(\overrightarrow{f_a(X)f_a(Y)}) \\ &=\; g(f(\overrightarrow{XY})) \;=\; (g \circ f)(\overrightarrow{XY}) \;, \end{aligned}$$

pa je $h = g \circ f$. Stoga je h, kao kompozicija linearnih operatora, linearni operator. Preslikavanje $g_a \circ f_a$ je tada prema (5.9) afino preslikavanje s pridruženim operatorom h, odnosno $g \circ f$. □

Od posebne su važnosti afina preslikavanja afinog prostora $\mathcal{A}^n$ na samog sebe.

Teorem 7. *Skup svih bijektivnih afinih preslikavanja afinog prostora $\mathcal{A}^n$ na samog sebe je grupa s obzirom na kompoziciju kao grupovnu operaciju.*
Ova grupa se naziva afina grupa prostora *$\mathcal{A}^n$.*

Dokaz. Tvrdnja neposredno slijedi iz propozicija 19. i 20, te činjenice da je identično preslikavanje bijektivno afino preslikavanje prostora $\mathcal{A}^n$ i predstavlja neutralni element ove grupe. □

5.3.1 Translacije

Upoznajmo jednu podgrupu afine grupe.

Definicija 30. *Neka je $\mathcal{A}^n$ afini prostor nad vektorskim prostorom V^n i neka je $f_a : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}^n$ afino preslikavanje. Preslikavanje f_a naziva se* translacija*, ako je pridruženi linearni operator $f : V^n \to V^n$ identično preslikavanje.*

Kako je identitet bijekcija, to je i translacija bijekcija.
Osnovno svojstvo koje karakterizira translaciju opisuje sljedeća tvrdnja.

Propozicija 21. *Neka je $\mathcal{A}^n$ afini prostor nad prostorom V^n i $f_a : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}^n$ afino preslikavanje. Preslikavanje f_a je translacija ako i samo ako je*

$$\overrightarrow{f_a(X)f_a(Y)} = \overrightarrow{XY} \;, \quad X, Y \in \mathcal{A}^n, \tag{5.10}$$

odnosno

$$\overrightarrow{Xf_a(X)} = \overrightarrow{Yf_a(Y)} \quad X, Y \in \mathcal{A}^n. \tag{5.11}$$

Dokaz. Pokažimo najprije da su tvrdnje (5.10) i (5.11) ekvivalentne.
Lako se uočava da one predstavljaju uvjet da je četverokut $XYf_a(Y)f_a(X)$ paralelogram.
Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (5.10). Tada je

$$\begin{aligned}\overrightarrow{Xf_a(X)} &= \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{Yf_a(Y)} + \overrightarrow{f_a(Y)f_a(X)} = \\ &= \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{Yf_a(Y)} - \overrightarrow{f_a(X)f_a(Y)} = \\ &= \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{Yf_a(Y)} - \overrightarrow{XY} \;=\; \overrightarrow{Yf_a(Y)}\ ,\end{aligned}$$

odnosno vrijedi tvrdnja (5.11).

Obrnuto, ako pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (5.11), slijedi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{f_a(X)f_a(Y)} &= \overrightarrow{f_a(X)X} + \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{Yf_a(Y)} = \\ &= \overrightarrow{f_a(X)X} + \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{Xf_a(X)} = \overrightarrow{XY}\ .\end{aligned}$$

Budući da su tvrdnje (5.10) i (5.11) ekvivalentne, dovoljno je pokazati valjanost propozicije za jednu od njih. Dokažimo jednakost (5.11).
Neka je f_a translacija i f njoj pridružen linearni operator. Tada za sve $X, Y \in \mathcal{A}^n$ vrijedi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{Xf_a(X)} &= \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{Yf_a(Y)} + \overrightarrow{f_a(Y)f_a(X)} \;=\; \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{Yf_a(Y)} + f(\overrightarrow{YX}) \\ &= \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{Yf_a(Y)} + \overrightarrow{YX} \\ &= \overrightarrow{Yf_a(Y)}\ .\end{aligned}$$

Obratno, ako vrijedi tvrdnja (5.11), onda za sve $\overrightarrow{XY} \in V^n$ vrijedi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{f(XY)} &= \overrightarrow{f_a(X)f_a(Y)} \;=\; \overrightarrow{f_a(X)}X + \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{Yf_a(Y)} \\ &= -\overrightarrow{Xf_a(X)} + \overrightarrow{Yf_a(Y)} + \overrightarrow{XY} \\ &= \overrightarrow{XY}\ .\end{aligned}$$

Operator f je, dakle, identično preslikavanje, a to znači da je f_a translacija. $\square$

Za translaciju $f_a : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}^n$ je vektor s početkom u nekoj točki X i krajem u njezinoj slici $f_a(X)$ za sve točke $X \in \mathcal{A}^n$ isti. Taj se vektor naziva *vektor translacije.* Svaka je translacija jednoznačno određena vektorom translacije.
Translacija za vektor v označava se sa t_v .

Propozicija 22. *Neka je $\mathcal{A}^n$ afini prostor nad vektorskim prostorom V^n. Ako su t, t_1, $t_2 : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}^n$ translacije redom za vektore v, v_1, odnosno v_2, tada je t^{-1} translacija za vektor $-v$, a $t_2 \circ t_1$ i $t_1 \circ t_2$ su translacije za vektor $v_1 + v_2$ i pritom vrijedi $t_2 \circ t_1 = t_1 \circ t_2$.*

Teorem 8. *Skup svih translacija afinog prostora $\mathcal{A}^n$ je Abelova grupa s obzirom na kompoziciju kao grupovnu operaciju. Ta grupa je podgrupa afine grupe prostora $\mathcal{A}^n$.*

Dokaz. Tvrdnja teorema neposredno slijedi iz propozicije 22. i egzistencije neutralnog elementa promatrane podgrupe. Tu ulogu očigledno ima identično preslikavanje shvaćeno kao translacija za nul-vektor. $\square$

5.3.2 Neka daljnja svojstva afinih preslikavanja

Propozicija 23. *Neka je* $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ *linearno nezavisan skup točaka afinog prostora* $\mathcal{A}^n$*, a* $\{P'_0, P'_1, \ldots, P'_n\}$ *bilo koji skup točaka tog prostora. Tada postoji jedinstveno afino preslikavanje* $f_a : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}^n$ *takvo da vrijedi*

$$f_a(P_i) = P'_i \ , \quad i = 0, 1, \ldots, n \ . \tag{5.12}$$

Dokaz. Ako je f linearni operator pridružen preslikavanju f_a, onda je (5.12) ekvivalentno sa

$$f_a(P_0) = P'_0 \ , \tag{5.13}$$

$$f(\overrightarrow{P_0P_j}) = \overrightarrow{P'_0P'_j} \ , \quad j = 1, 2, \ldots, n \ . \tag{5.14}$$

Budući da su vektori $\overrightarrow{P_0P_j}$ linearno nezavisni, postoji jedinstven linearni operator f koji zadovoljava uvjete (5.14). Tada na temelju propozicije 14. postoji jedinstveno preslikavanje f_a koje zadovoljava (5.13), a f mu je pridruženi linearni operator. □

Vrijede tvrdnje:

- Skup svih fiksnih točaka[2] afinog preslikavanja $f_a : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}^n$ je ili prazan skup ili potprostor (ravnina) od $\mathcal{A}^n$.
- Skup svih fiksnih točaka translacije $t : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}^n$ različite od identiteta je prazan.
- Afino preslikavanje $f_a : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}^n$ sa $n+1$ fiksnih točaka je identitet.
- Skup F_P svih bijektivnih afinih preslikavanja $f_a : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}^n$ s fiksnom točkom $P \in \mathcal{A}^n$ je podgrupa afine grupe prostora $\mathcal{A}^n$.

Dokažimo sada važan teorem o dekompoziciji afinog preslikavanja.

Teorem 9. *Neka je* $O \in \mathcal{A}^n$*. Svako afino preslikavanje* $f_a : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}^n$ *može se na jednoznačan način prikazati kao kompozicija translacije i afinog preslikavanja* f_O *s fiksnom točkom* O*.*

Dokaz. Ako je $f_a(O) = O$, onda je očito $f_a = i_a \circ f_a$, gdje je $i_a : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}^n$ identično preslikavanje, odnosno translacije za nul-vektor.
Pretpostavimo sada da je $f_a(O) \neq O$.
Neka je $t_v(O) = f_a(O)$. Time je translacija t_v jednoznačno određena. Nadalje, neka je f linearni operator pridružen preslikavanju f_a.
Označimo sa f_O jedinstveno afino preslikavanje za koje je $f_O(O) = O$ i kojemu je pridružen linearni operator f (propozicija 14) .
Tada za svaki $X \in \mathcal{A}^n$ vrijedi

$$f(\overrightarrow{OX}) = \overrightarrow{f_a(O)f_a(X)}$$

$$f(\overrightarrow{OX}) = \overrightarrow{f_O(O)f_O(X)} = \overrightarrow{Of_O(X)} = \overrightarrow{t_v(O)t_v(f_O(X))} = \overrightarrow{f_a(O)\,(t_v \circ f_O)(X)} \ ,$$

[2]Točka $P \in \mathcal{A}^n$ naziva se fiksna točka preslikavanja $f_a : A^n \to A^n$ ako je $f_a(P) = P$.

zbog čega je $f_a(X) = t_v \circ f_O(X)$, pa zbog proizvoljnosti točke $X \in \mathcal{A}_n$ vrijedi $f_a = t_v \circ f_O$. Kako bismo pokazali jedinstvenost, pretpostavimo da postoje preslikavanja t_{v_1} i $\tilde{f_O}$ takva da je

$$t_v \circ f_O = t_{v_1} \circ \tilde{f_O} \ .$$

Tada je $(t_v \circ f_O)(O) = (t_{v_1} \circ \tilde{f_O})(O)$ pa zbog $f_O(O) = \tilde{f_O}(O) = O$ slijedi $t_v(O) = t_{v_1}(O)$. Stoga je $t_v = t_{v_1}$ i $f_O = \tilde{f_O}$. □

5.4 Analitički prikaz afinog preslikavanja

Neka je $(O; \overrightarrow{OE_1}, \dots, \overrightarrow{OE_n})$ afini koordinatni sustav u prostoru $\mathcal{A}^n$ i neka je $f_a : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}^n$ afino preslikavanje takvo da je

$$f_a(O) = O', \quad f_a(E_i) = E_i' \ , \quad i = 1, 2, \dots, n \ .$$

Veza među vektorima $e_i = \overrightarrow{OE_i}$ i $e_i{}' = \overrightarrow{O'E_i'}$ je dana sa

$$e_j{}' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i \ , \quad j = 1, 2, \dots, n \ .$$

Neka je $X \in \mathcal{A}^n$ točka s koordinatama $x_1, x_2, \dots, x_n$. Tada je njen radijus-vektor

$$\overrightarrow{OX} = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \ .$$

Neka su $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ koordinate točke O'. Tada možemo pisati

$$\overrightarrow{OO'} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \ .$$

Označimo sa $x_1', x_2', \dots, x_n'$ koordinate slike $X' = f_a(X)$.
Tada je

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OX'} &= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'X'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{f_a(O) f_a(X)} = \overrightarrow{OO'} + f(\overrightarrow{OX}) \\
&= f(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j) + \overrightarrow{OO'} = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) + \overrightarrow{OO'} = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j' + \overrightarrow{OO'} \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j (\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i) + \overrightarrow{OO'} = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j) e_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \ .
\end{aligned}$$

Dobivamo, dakle

$$\overrightarrow{OX'} = \sum_{i=1}^{n} x_i' e_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j + \alpha_i \right) e_i \ ,$$

pa zbog linearne nezavisnosti vektora e_i, $i = 1, \dots, n$, slijedi

$$\boxed{x_i' = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j + \alpha_i \ , \qquad i = 1, 2, ..., n} \ . \tag{5.15}$$

To je traženi analitički prikaz afinog preslikavanja.

Jednakosti (5.15) imaju sličan oblik kao jednakosti (3.8) za afinu transformaciju koordinata u $\mathcal{A}^n$. Razlika je i u tome što se promjenilo značenje jednakosti. Kod (3.8) su x_i i x'_i koordinate jedne točke X s obzirom na dva koordinatna sustava $(O; e_1, \ldots, e_n)$ i $(O', e'_1, \ldots, e'_n)$, dok su u (5.15) x_i i x'_i koordinate dviju točaka X i $f_a(X)$ s obzirom na isti koordinatni sustav $(O, e_1, \ldots, e_n)$.
Pritom je još u prvom slučaju determinanta matrice transformacije $\mathsf{A} = (\alpha_{ij})$ uvijek različita od 0, a u drugom slučaju taj uvjet nije nužan.

Za translaciju $t_v : A^n \to A^n$ je $\mathsf{A} = \mathsf{E}$ i $v = \overrightarrow{OO'}$, pa (5.15) poprima oblik

$$x'_i = x_i + \alpha_i \ , \qquad i = 1, 2, \ldots, n \ . \tag{5.16}$$

Napomena.

- Afino preslikavanje $f_a : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}^n$ s analitičkim prikazom (5.15) je kompozicija ovih dvaju preslikavanja:

$$\begin{aligned} \overline{x}_i &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, x_j \qquad && (\ f_O \text{ s fiksnom točkom O }) \\ x'_i &= \overline{x}'_i + \alpha_i \qquad && (\text{ translacija } \ t_{\overrightarrow{OO'}} \ ) \end{aligned}$$

- Ako je $f_a : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}^n$ bijektivno afino preslikavanje, onda bilo koja točka X u koordinatnom sustavu $(O, e_1, \ldots, e_n)$ ima iste koordinate kao slika $X' = f_a(X)$ u koordinatnom sustavu $(O, e'_1, \ldots, e'_n)$.

- Neka je $f_a : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}^n$ afino preslikavanje. Tada za svaku ravninu Π vrijedi

$$\dim f_a(\Pi) \leq \ \dim \ \Pi \ .$$

- Bijektivno afino preslikavanje $f_a : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}^n$ preslikava k-ravninu u k-ravninu.

- Za afino preslikavanje $f_a : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}^n$ s matricom A ranga $r < n$ i $P' \in f_a(\mathcal{A}^n)$ vrijedi
$$\dim f_a(\mathcal{A}^n) = \ r \ , \qquad \dim \{P \in \mathcal{A}^n \mid f_a(P) = P'\} = \ n - r \ .$$

- Neka je $f_a : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}^n$ afino preslikavanje s matricom A i pridruženim linearnim operatorom f. Ako je $\det \mathsf{A} > 0$ ($\det \mathsf{A} < 0$) koordinatni sustavi $(e_1, \ldots, e_n)$ i $(\ f(e_1), \ldots, f(e_n)\ )$ pripadnog vektorskog prostora su jednako (suprotno) orijentirani.

- Za bijektivno afino preslikavanje $f_a : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}^n$ s matricom A postoji inverzno prelikavanje f_a^{-1}, a analitički prikaz preslikavanja f_a^{-1} dobije se iz (5.15) rješavanjem po x_i
$$x_i = \frac{1}{\det \mathsf{A}} \sum_{j=1}^{n} A_{ji}(x'_j - \alpha_j) \ , \qquad j = 1, \ldots, n \ ,$$

  gdje je A_{ji} algebarski komplement elementa α_{ji} u matrici A.

Primjer 39. *Analitički prikaz afinog preslikavanja*

Želimo odrediti analitički prikaz afinog preslikavanja $f_a : \mathcal{A}^3 \to \mathcal{A}^3$ koje točke O, $P_1(1,2,-1)$, $P_2(3,2,0)$ i $P_3(1,1,1)$ preslikava redom u $O'(-1,1,2)$, $P_1'(-2,4,-1)$, $P_2'(6,16,-3)$ i $P_3'(3,3,0)$.

Budući da je $\overrightarrow{OO'} = [-1,1,2]$, u analitičkom prikazu afinog preslikavanja (5.15) je $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$ i $\alpha_3 = 2$.
Afino preslikavanje f_a djeluje tako da za koordinate točaka vrijedi:

$$P_1' \ \ldots \ \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$P_2' \ \ldots \ \begin{bmatrix} 6 \\ 16 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$P_3' \ \ldots \ \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Množenjem matrica dobit ćemo sustav devet jednažbi s devet nepoznanica α_{ij} :

$$\alpha_{11} + 2\,\alpha_{12} - \alpha_{13} = -1 \qquad (5.17)$$
$$\alpha_{21} + 2\,\alpha_{22} - \alpha_{23} = 3 \qquad (5.18)$$
$$\alpha_{31} + 2\,\alpha_{32} - \alpha_{33} = -3 \qquad (5.19)$$
$$3\,\alpha_{11} + 2\,\alpha_{12} = 7 \qquad (5.20)$$
$$3\,\alpha_{21} + 2\,\alpha_{22} = 15 \qquad (5.21)$$
$$3\,\alpha_{31} + 2\,\alpha_{32} = -5 \qquad (5.22)$$
$$\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} = 4 \qquad (5.23)$$
$$\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23} = 2 \qquad (5.24)$$
$$\alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33} = -2 \qquad (5.25)$$

Promatramo li posebno sustave (5.17), (5.20), (5.23), zatim (5.18), (5.21), (5.24) i (5.19), (5.22), (5.25) možemo primijetiti da su to sustavi tri jednadžbe s tri nepoznanice, a matrice sustava su im jednake, što pojednostavljuje računanje. Riješimo li svaki od tih sustava, dobit ćemo sve nepoznanice α_{ij} .
Traženi prikaz afinog preslikavanja f_a je:

$$f_a \ldots \quad \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 7 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Dio II

Euklidski prostori

Poglavlje 6

Pojam euklidskog prostora

U prethodnim poglavljima izgradili smo afini prostor $\mathcal{A}^n$ nad realnim vektorskim prostorom V^n. Taj prostor ne možemo poistovjetiti s prostorom s kojim smo se sreli u srednjoškolskoj geometriji, čak ni onda ako se ograničimo na dimenziju $n = 3$. U geometriji afinog prostora proučavaju se samo tzv. *afina* svojstva skupova točaka, u koje se ne ubrajaju udaljenost dviju točaka, kut između dvaju vektora, okomitost dvaju pravaca i sl. Da bi ti pojmovi imali smisla u afinom prostoru, potrebno je u njega uvesti metriku, ne narušavajući pritom ni jedno od njegovih afinih svojstava. Struktura afinog prostora na poznati je način povezana sa strukturom vektorskog prostora. Metričku strukturu kakvu želimo nosi unitarni vektorski prostor.

U ovom dijelu proučit ćemo poseban slučaj afinog prostora koji se dobiva uz pretpostavku da je u definiciji afinog prostora $\mathcal{A}^n$ vektorski prostor V^n realan unitaran prostor.

Podsjetit ćemo ovdje na značenje nekih pojmova koji su potrebni u daljnjem radu.

Preslikavanje $x \mapsto \| x\|$ vektorskog prostora V nad poljem $F = \mathbb{R}$ ili $F = \mathbb{C}$ u skup $\mathbb{R}$ je *norma* na V ako za sve $x, y \in V$ i svaki $\lambda \in F$ vrijedi:
(i) pozitivna definitnost: $\| x\| \geq 0$ i $\| x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;
(ii) homogenost : $\| \lambda x\| = |\lambda| \, \| x\|$;
(iii) nejednakost trokuta: $\| x + y\| \leq \| x\| + \| y\|$.
Uređeni par $(V, \| \cdot \|)$ vektorskog prostora V i norme $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$ zovemo *normiranim prostorom.*

Uređeni par (X, d) nepraznog skupa X i funkcije $d : X \times X \to \mathbb{R}$ zovemo *metričkim prostorom* i kažemo da je d *metrika* ako su za sve $x, y, z \in X$ ispunjeni uvjeti:
(i) pozitivna definitnost: $d(x, y) \geq 0$ i $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
(ii) simetričnost: $d(x, y) = d(y, x)$;
(iii) nejednakost trokuta: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.
Vrijednost $d(x, y)$ naziva se udaljenost točaka x i y.

Neka je V vektorski prostor nad poljem $F = \mathbb{R}$ ili $F = \mathbb{C}$. Preslikavanje $s : V \times V \to F$ je *skalarni produkt* na vektorskom prostoru V ako za sve $a, b, c \in V$, $\lambda, \mu \in F$ vrijedi:
(i) hermitska simetričnost: $s(a, b) = \overline{s(b, a)}$;
(ii) pozitivna definitnost: $s(a, a) \geq 0$ i $s(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$;
(iii) bilinearnost: $s(\lambda a + b, c) = \lambda s(a, c) + s(b, c)$.
Koristimo još i notaciju: $s(a, b) = (a, b)$.

Uređeni par (V, s) vektorskog prostora i skalarnog produkta naziva se *unitarni prostor*. Neka je (V, s) unitarni prostor. Za vektore $a, b \in V$ kažemo da su *ortogonalni* (*okomiti*) ako je $s(a, b) = 0$.

Obično kažemo i da je sam vektorski prostor V normirani, metrički, odnosno unitarni prostor.

Sada možemo definirati pojam euklidskog prostora.

Definicija 31. *n-dimenzionalni* euklidski prostor $\mathcal{E}^n$ *je n-dimenzionalni afini prostor kojemu je pridružen realan unitaran vektorski prostor U^n.*

Euklidski prostor je uređena trojka $(\mathcal{E}^n, U^n, v)$ sastavljena od skupa točaka $\mathcal{E}^n$, realnog unitarnog prostora U^n i preslikavanja $v : \mathcal{E}^n \times \mathcal{E}^n \to U^n$ koje ima svojstva:

(A1) Za svaku točku $A \in \mathcal{E}^n$ i vektor $x \in U^n$ postoji jedna i samo jedna točka $B \in \mathcal{E}^n$ takva da je $v(A, B) = \overrightarrow{AB} = x$,

(A2) Za sve $A, B, C \in \mathcal{E}^n$ vrijedi $v(A, B) + v(B, C) = v(A, C)$.

U daljnjem tekstu razmatrat ćemo samo takve prostore.

Poglavlje 7

Ortogonalnost. Udaljenost prostora

7.1 Okomitost ravnina

Definicija 32. *Neka su* Π_1^1 *i* Π_2^1 *pravci euklidskog prostora* $\mathcal{E}^n$. *Kažemo da je* pravac Π_1^1 okomit na pravac Π_2^1 *i pišemo* $\Pi_1^1 \perp \Pi_2^1$ *ako su vektori smjera tih pravaca ortogonalni.*

Pomoću pojma okomitosti pravaca lako se može definirati okomitost k-dimenzionalne ravnine ${\Pi_1}^k$ i l-dimenzionalne ravnine ${\Pi_2}^l$ euklidskog prostora $\mathcal{E}^n$.

Definicija 33. *Kažemo da je* pravac Π^1 okomit na k-ravninu Π^k, *i označavamo to sa* $\Pi^1 \perp \Pi^k$, *ako je on okomit na bilo koji pravac te ravnine.*
Pravac Π^1 *naziva se* okomica *iz točke* A *na ravninu* Π^k *ako je* $A \in \Pi^1$, $\Pi^1 \perp \Pi^k$ *i* $\Pi^1 \cap \Pi^k$ *neka točka* P. *Točka* P *naziva se* nožište okomice *iz* A *na* Π^k.

Kako je okomitost pravaca ekvivalentna ortogonalnosti vektora smjera tih pravaca, to je

$$\Pi^1 \perp \Pi^k \quad \Longleftrightarrow \quad W^1 \perp W^k \ ,$$

gdje su W^1 i W^k vektorski prostori pridruženi pravcu Π^1 i k-ravnini Π^k.

Definicija 34. *Neka je* $W^k \preceq U^n$. Ortogonalni komplement *potprostora* W^k *je skup* $\{\, x \in U^n \big|\, s(x,w) = 0\,,\ \forall\, w \in W^k \,\}$, *a označavamo ga sa* $(W^k)^\perp$.

Propozicija 24. *U* n*-dimenzionalnom euklidskom prostoru* $\mathcal{E}^n$ *iz svake točke tog prostora koja ne pripada* k*-dimenzionalnoj ravnini* Π^k *može se spustiti jedna i samo jedna okomica na* Π^k.

Dokaz. Označimo sa W^k smjer ravnine Π^k, a sa $(W^k)^\perp$ ortogonalni komplement potprostora W^k.
Neka je $(\Pi^k)^\perp_A$ ravnina točkom $A \in \mathcal{E}^n \setminus \Pi^k$ sa smjerom $(W^k)^\perp$.
Iz Grassmannove formule slijedi da je presjek $\Pi^k \cap (\Pi^k)^\perp_A$ točka, označimo je sa A'. Pravac određen točkama A i A' je tražena okomica.

Dokažimo jedinstvenost. Pretpostavimo da postoje dvije različite okomice iz točke A na Π^k. Označimo sa A' i A'' točke u kojima te okomice sijeku ravninu Π^k. Tada je

$$\begin{aligned} 0 &= (\overrightarrow{A'A''}, \overrightarrow{A'A}) = (\overrightarrow{A'A''}, \overrightarrow{A'A''} + \overrightarrow{A''A}) = \\ &= (\overrightarrow{A'A''}, \overrightarrow{A'A''}) + (\overrightarrow{A'A''}, \overrightarrow{A''A}) = \\ &= (\overrightarrow{A'A''}, \overrightarrow{A'A''}) + 0 = (\overrightarrow{A'A''}, \overrightarrow{A'A''}) , \end{aligned}$$

pa iz $(\overrightarrow{A'A''}, \overrightarrow{A'A''}) = 0$ slijedi $\overrightarrow{A'A''} = \theta$, odnosno $A' = A''$. □

U dokazu propozicije 24. definirali smo ravninu $(\Pi^k)^{\perp}_A$ sa smjerom $(W^k)^{\perp}$. Kao što je poznato, skup $(W^k)^{\perp}$ svih vektora prostora U^n okomitih na W^k je vektorski potprostor dimenzije $n-k$. Taj je potprostor pridružen skupu $(\Pi^k)^{\perp}_A$ svih točaka koje leže na pravcima koji prolaze točkom A i okomiti su na k-ravninu Π^k. Prema tome, $(\Pi^k)^{\perp}_A$ je $(n-k)$-dimenzionalna ravnina. Presjek $\Pi^k \cap (\Pi^k)^{\perp}_A$ ne može, očito, sadržavati niti jedan pravac, ali nije ni prazan. On se sastoji samo od nožišta okomice iz točke A na Π^k.

Definicija 35. *Neka je Π^k k-ravnina prostora $\mathcal{E}^n$ s pridruženim vektorskim prostorom W^k i neka je $A \in \mathcal{E}^n$ bilo koja točka. Afini potprostor točkom A sa smjerom $(W^k)^{\perp}$ naziva se* ortogonalni komplement ravnine Π^k točkom A *i označava sa* $(\Pi^k)^{\perp}_A$.

Ortogonalni komplement hiperravnine Π^{n-1} točkom A je upravo okomica iz te točke na hiperravninu.

7.1.1 Ortogonalna projekcija

Definicija 36. Ortogonalna projekcija točke A *na bilo koju ravninu* Π *je presjek ravnina* Π *i* $\Pi^{\perp}_A$, *a označava se sa* A_{Π}.

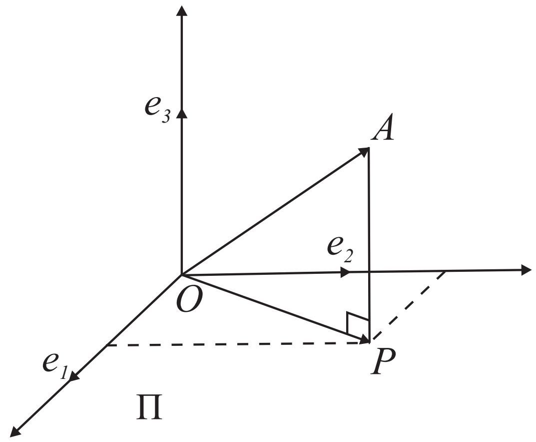
Ortogonalna projekcija točke A na ravninu Π je nožište okomice iz A na Π. Ako je $A \in \Pi$, ortogonalna projekcija A na Π podudara se s točkom A.

Definicija 37. *Preslikavanje* $p_{\Pi} : \mathcal{E}^n \to \Pi$ *koje točki* $A \in \mathcal{E}^n$ *pridružuje točku* A_{Π} *naziva se* ortogonalno projiciranje *prostora* $\mathcal{E}^n$ *na ravninu* Π.

Razmotrimo sada kako se koordinate ortogonalne projekcije A_{Π} određuju pomoću koordinata točke A.

Odaberimo u k-ravnini Π pravokutni koordinatni sustav $(0; e_1, \ldots, e_k)$. Bazu $\{e_1, \ldots, e_k\}$ nadopunimo vektorima $e_{k+1}, \ldots, e_n$ do pravokutne baze $\{e_1, \ldots, e_n\}$ prostora U^n.
Za pravokutni koordinatni sustav u $\mathcal{E}^n$ uzmimo $(0; e_1, \ldots, e_n)$.
Neka je u tom sustavu $\overrightarrow{OA} = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$. Tada je ortogonalna projekcija točke A na Π točka P s koordinatama $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, 0, \ldots, 0)$.

Koordinate točaka u ravnini Π su oblika $(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$, a bilo koji vektor x s početnom i krajnjom točkom u Π može se prikazati u obliku $x = x_1 e_1 + \cdots + x_k e_k$.



Slika 7.1: Ortogonalna projekcija točke A na ravninu Π

S druge strane je $\overrightarrow{PA} = \alpha_{k+1}e_{k+1} + \cdots + \alpha_n e_n$ i zato je skalarni produkt $(x, \overrightarrow{PA}) = 0$, tj. pravac PA je okomit na Π. To je i trebalo pokazati. Dakle, iz

$$\overrightarrow{OA} = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$$

slijedi

$$\overrightarrow{OA_\Pi} = x_1 e_1 + \ldots + x_k e_k. \tag{7.1}$$

Propozicija 25. *Ortogonalno projiciranje* $p_\Pi : \mathcal{E}^n \to \Pi$ *je linearno preslikavanje, odnosno za bilo koje točke* $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ *i bilo koje realne brojeve* λ, μ *iz jednakosti*

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \lambda\,\overrightarrow{A_3A_4} + \mu\,\overrightarrow{A_5A_6}$$

slijedi

$$\overrightarrow{p_\Pi(A_1)\;p_\Pi(A_2)} = \lambda\,\overrightarrow{p_\Pi(A_3)\;p_\Pi(A_4)} + \mu\,\overrightarrow{p_\Pi(A_5)\;p_\Pi(A_6)}\ .$$

Dokaz. Neka je $A_i = (x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i)$, $i = 1, \ldots 6$. Tada na temelju zadanog uvjeta dobivamo

$$x_j^2 - x_j^1 = \lambda\left(x_j^4 - x_j^3\right) + \mu\left(x_j^6 - x_j^5\right)\ , \qquad j = 1, 2, \ldots, n\ . \tag{7.2}$$

S druge strane, (7.1) daje

$$\overrightarrow{p_\Pi(A_i)\;p_\Pi(A_{i+1})} = \sum_{l=1}^{k}(x_l^{i+1} - x_l^i)\,e_l\ , \qquad i = 1, 3, 5. \tag{7.3}$$

Iz (7.2) i (7.3) slijedi tražena jednakost. □

Definicija 38. *Skup ortogonalnih projekcija svih točaka iz* S *na* Π *naziva se* projekcija S_Π skupa točaka S *na ravninu* Π.

Propozicija 26. *Ortogonalna projekcija pravca* Π^1 *na bilo koju ravninu* Π *je ili pravac ili točka.*
Ako su $\Pi_1^1, \ldots, \Pi_m^1$ *pravci prostora* $\mathcal{E}^n$, *onda je*

$$\left(\Pi_1^1 + \ldots + \Pi_m^1\right)_\Pi = \left(\Pi_1^1\right)_\Pi + \ldots + \left(\Pi_m^1\right)_\Pi\ . \tag{7.4}$$

Dokaz. Na svakom pravcu Π_i^1 odaberimo par različitih točaka A_i i B_i, gdje je $i = 1, 2, \ldots, m$. Ravnina $\Pi_1^1 + \ldots + \Pi_m^1$ se sastoji od točaka T za koje je

$$\overrightarrow{A_1T} \;=\; \lambda_1\overrightarrow{A_1B_1} + \ldots + \lambda_m\overrightarrow{A_1B_m} + \mu_2\overrightarrow{A_1A_2} + \ldots + \mu_m\overrightarrow{A_1A_m} \;, \tag{7.5}$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu_2, \ldots, \mu_m \in \mathbb{R}$. Na temelju propozicije (25) slijedi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{p_\Pi(A_1)p_\Pi(T)} \;&=\; \lambda_1\overrightarrow{p_\Pi(A_1)p_\Pi(B_1)} + \ldots + \lambda_m\overrightarrow{p_\Pi(A_1)p_\Pi(B_m)} \\ &+\; \mu_2\overrightarrow{p_\Pi(A_1)p_\Pi(A_2)} + \ldots + \mu_m\overrightarrow{p_\Pi(A_1)p_\Pi(A_m)} \;,\end{aligned} \tag{7.6}$$

pa je $\;p_\Pi(T) \in (p_\Pi(A_1) + p_\Pi(B_1)) + \ldots + (p_\Pi(A_n) + p_\Pi(B_m))\;$.
Obratno, ako je $\;P \in (p_\Pi(A_1) + p_\Pi(B_1)) + \ldots + (p_\Pi(A_n) + p_\Pi(B_m))\;$, tada se može pisati

$$\begin{aligned}\overrightarrow{p_\Pi(A_1)P} \;&=\; \lambda_1\overrightarrow{p_\Pi(A_1)p_\Pi(B_1)} + \ldots + \lambda_m\overrightarrow{p_\Pi(A_1)p_\Pi(B_m)} \\ &+\; \mu_2\overrightarrow{p_\Pi(A_1)p_\Pi(A_2)} + \ldots + \mu_m\overrightarrow{p_\Pi(A_1)p_\Pi(A_m)} \;.\end{aligned} \tag{7.7}$$

Ako je T točka u prostoru $\Pi_1^1 + \ldots + \Pi_m^1$ za koju vrijedi (7.5), tada uspoređivanjem jednakosti (7.6) i (7.7) vidimo da je $\;p_\Pi(T) = P\;$ i zato je $\;P \in (\,\Pi_1^1 + \ldots + \Pi_m^1)_{\;\Pi}\;$. Također je

$$\left(\Pi_1^1 + \ldots + \Pi_m^1\right)_{\;\Pi} \;=\; (\;p_\Pi(A_1) + p_\Pi(B_1)\;) + \ldots + (\;p_\Pi(A_n) + p_\Pi(B_m)\;)\;.$$

Za $\;m = 1\;$ dobivamo $\quad(\Pi_1^1)_{\;\Pi} \;=\; p_\Pi(A_1) + p_\Pi(B_1)\;$.

Zato je i $\quad(\Pi_i^1)_{\;\Pi} \;=\; p_\Pi(A_i) + p_\Pi(B_i)\;$. □

Korolar 7. *Ortogonalna projekcija k-dimenzionalne ravnine Π_1 na l-dimenzionalnu ravninu Π_2 je opet ravnina i pritom je*

$$\dim\left(p_{\Pi_2}(\Pi_1)\right) \;\le\; \dim \Pi_1 \;.$$

Primjer 40. *Ortogonalna projekcija točke na hiperravninu*

Odredimo koordinate ortogonalne projekcije točke A koja u pravokutnom koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2, \ldots, e_n)$ ima koordinate $x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ$ na hiperravninu

$$\Pi^{n-1} \ldots \quad \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \ldots + \alpha_nx_n + \alpha_0 = 0 \tag{7.8}$$

Neka su B i C bilo koje dvije točke u Π^{n-1} s koordinatama $\beta_1, \beta_2 \ldots, \beta_n$, odnosno γ_1, γ_2, $\ldots$, γ_n. Tada je

$$\overrightarrow{BC} = \sum_{i=1}^{n}(\gamma_i - \beta_i)\, e_i \;.$$

Koordinate točaka B i C moraju zadovoljavati jednadžbu hiperravnine što uvrštavanjem u (7.8) i oduzimanjem daje jednadžbu

$$\alpha_1(\gamma_1 - \beta_1) + \alpha_2(\gamma_2 - \beta_2) + \ldots + \alpha_n(\gamma_n - \beta_n) = 0 \;. \tag{7.9}$$

Iz prikaza $\overrightarrow{BC}$ i posljednje jednakosti zaključujemo da je pravac

$$\Pi^1 \ldots \;\frac{x_1 - x_1^\circ}{\alpha_1} = \ldots = \frac{x_n - x_n^\circ}{\alpha_n} = (\tau) \tag{7.10}$$

okomit na pravac čiji je vektor smjera $\overrightarrow{BC}$.
Budući da su B i C po volji odabrane točke iz Π^{n-1}, slijedi $\Pi^1 \perp \Pi^{n-1}$, pa je $\Pi^1 = (\Pi^{n-1})^\perp$
.
Rješavanjem jednadžbi (7.8) i (7.10) dobivamo tražene koordinate ortogonalne projekcije točke A

$$x_i = -\frac{\alpha_o + (\alpha_1 x_1^\circ + \ldots + \alpha_n x_n^\circ)}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2}\alpha_i + x_i^0 \ , \quad i = 1, 2, \ldots, n \ . \tag{7.11}$$

7.1.2 Paralelnost dviju ravnina

Podsjetimo se što znači paralelnost ravnina. Ravnine Π_1^k i Π_2^l $(k \leq l)$ s pridruženim potprostorima W_1^k, $W_2^l \preceq U^n$ su paralelne ako je $W_1^k \preceq W_2^l$. Pojam paralelnosti ravnina u euklidskom prostoru $\mathcal{E}^n$ možemo izraziti i na ovaj način.

Propozicija 27. *Neka su* Π_1^k *i* Π_2^l *ravnine s pripadnim smjerovima* $W_1^k = [\,a_1, \ldots, a_k\,]$ *i* $W_2^l = [\,b_1, \ldots, b_l\,]$.
Ravnine Π_1^k *i* Π_2^l *su paralelne (potpuno paralelne) ako i samo ako je svaki vektor koji je okomit na* W_2^l *(okomit na vektore* $b_1, b_2, \ldots, b_l$*), okomit i na* W_1^k *(okomit na vektore* $a_1, a_2, \ldots, a_k$*).*

Dokaz. Neka je svaki vektor koji je okomit na W_2^l također okomit na W_1^k. Tada je $(W_2^l)^\perp \preceq (W_1^k)^\perp$, odnosno $W_1^k \preceq W_2^l$. Obrat je očigledan. □

Definicija 39. *Neka su* Π_1^k *i* Π_2^l *ravnine s pripadnim smjerovima* W_1^k *i* $W_2^l = [\,b_1, \ldots, b_l\,]$. *Ako ravnina* W_1^k *sadrži* m *linearno nezavisnih vektora koji su linearne kombinacije vektora* $b_1, \cdots, b_l$*, ali ne sadrži* $m+1$ *takvih vektora, tada se kaže da su* Π_1^k *i* Π_2^l $\dfrac{m}{k}$ -paralelne.

Neka su Π_1^k i Π_2^l ravnine s pripadnim smjerovima $W_1^k = [\,a_1, \ldots, a_k\,]$ i $W_2^l = [\,b_1, \ldots, b_l\,]$.
Za $\dfrac{m}{k}$ -paralelnost ravnina Π_1^k i Π_2^l je nužno i dovoljno da je broj linearno nezavisnih vektora u skupu $\{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l\}$ jednak $k + l - m$.
Ako se dvije $\dfrac{m}{k}$ -paralelne ravnine prostora $\mathcal{E}^n$ sijeku, onda je njihov presjek m-dimenzionalna ravnina.

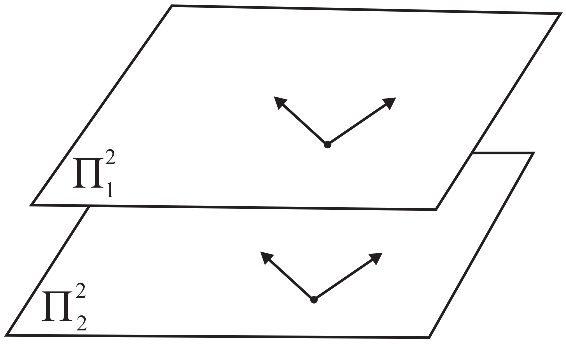
Primjer 41. *Potpuna paralelnost u* $\mathcal{E}^3$

U $\mathcal{E}^3$ bilo koje dvije ravnine su ili potpuno paralelne ili $\dfrac{1}{2}$ -paralelne.

7.1.3 Okomitost dviju ravnina

Analogno paralelnosti uvodi se pojam okomitosti dviju ravnina.

Definicija 40. *Dvije ravnine* Π_1^k *i* Π_2^l *su međusobno* potpuno okomite *ako su* (*potpuno*) *ortogonalni pripadni potpostori* W_1^k *i* W_2^l*, odnosno ako je svaki vektor jednog potpostora okomit na svaki vektor drugog potpostora.*



Slika 7.2: Potpuno paralelne 2-ravine u prostoru $\mathcal{E}^3$

Primjer 42. *Potpuno okomite ravnine*
Sljedeće su ravnine međusobno potpuno okomite:

- Ravnine euklidskog prostora $\mathcal{E}^n$ sa smjerovima $W_1^k = [\,e_1, \ldots, e_r\,]$ i $W_2^l = [\,e_{r+1}, \ldots, e_n\,]$, gdje je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza pripadnog vektorskog prostora U^n;
- $\Pi_1^k \quad i \quad (\Pi_1^k)_A^\perp$.

Definicija 41. *Neka su* Π_1^k *i* Π_2^l *ravnine s pripadnim vektorskim potprostorima* W_1^k *i* W_2^l .
Ako W_2^l *sadrži* p *linearno nezavisnih vektora okomitih na potprostor* W_1^k*, a ne sadrži* $p+1$ *takvih vektora, tada se kaže da su ravnine* Π_1^k *i* Π_2^l $\dfrac{p}{l}$ *-okomite.*

Neka su Π_1^k i Π_2^l ravnine s pripadnim smjerovima $W_1^k = [\,a_1, \ldots, a_k\,]$ i $W_2^l = [\,b_1, \ldots, b_l\,]$. Nadopunimo bazu $\{a_1, \ldots, a_k\}$ prostora W_1^k vektorima $a_{k+1}, \ldots, a_n$ do baze prostora U^n. Za $\dfrac{p}{l}$ -okomitost ravnina Π_1^k i Π_2^l nužno i dovoljno da je maksimalni broj linearno nezavisnih vektora u skupu $\{a_{k+1}, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_l\}$ jednak $n - k + l - p$.

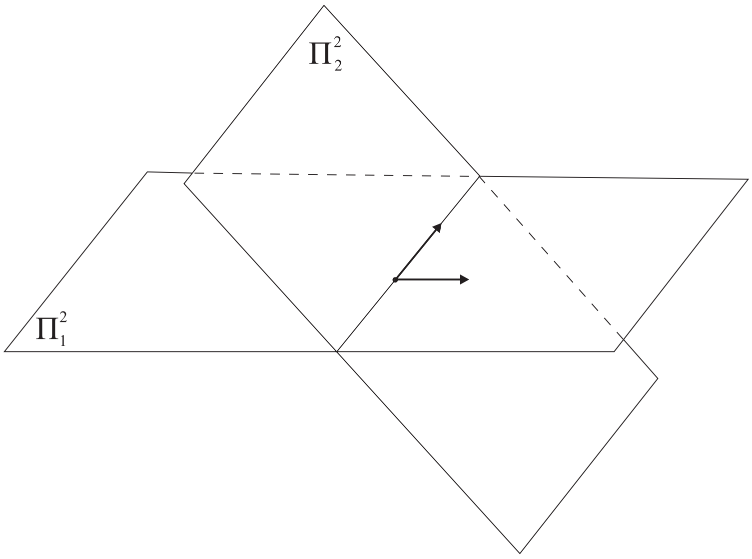
U prostoru $\mathcal{E}^3$ ne postoje potpuno okomite 2-ravnine.

7.2 Udaljenost ravnina

7.2.1 Udaljenost točke od hiperravnine

Neka je $A\,(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0)$ točka prostora $\mathcal{E}^k$, a Π hiperravnina s jednadžbom $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k + \alpha_0 = 0$ koja se uz oznake $x = [x_1, x_2, \ldots, x_k]$, $n = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]$ može pisati u vektorskom obliku $(n, x) + \alpha_0 = 0$.

Definicija 42. *Udaljenost* $\mathrm{d}(A, A_\Pi)$ *točke* A *od njezine ortogonalne projekcije na hiperravninu* Π*, naziva se* udaljenost točke A od hiperravnine Π *i označava sa* $\mathrm{d}(A, \Pi)$.



Slika 7.3: $\dfrac{1}{2}$- okomite 2-ravine u prostoru $\mathcal{E}^3$

Prema razmatranjima u 7.1.1. vektor n je okomit na hiperravninu Π (*vektor normale*), pa jednadžba pravca $\Pi_A^\perp$ glasi $r = r_A + \tau\, n$, a vrijednost parametra τ za točku A_Π je jednaka $-\dfrac{(n, r_A) + \alpha_0}{\|n\|^2}$.
Slijedi

$$r_{A_\Pi} = r_A - \frac{(n, r_A) + \alpha_0}{\|n\|^2}\, n.$$

Za udaljenost $\mathrm{d}\,(A, \Pi)$ dobivamo

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(A, \Pi) &= \mathrm{d}(A, A_\Pi) = \|r_{A_\Pi} - r_A\| \\ &= \frac{|\,(n, r_A) + \alpha_0\,|}{\|n\|}\ , \end{aligned}$$

ili u *koordinatnoj formi*

$$\boxed{\mathrm{d}(A, \Pi) = \frac{|\,\alpha_1 x_1^0 + \alpha_2 x_2^0 + \ldots + \alpha_k x_k^0 + \alpha_0\,|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_k^2}}}\ . \tag{7.12}$$

Posebno, za udaljenost δ ishodišta O od hiperravnine Π iz (7.12) dobivamo

$$\delta = \mathrm{d}(O, \Pi) = \frac{|\,\alpha_0\,|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_k^2}} \tag{7.13}$$

Ako je $\|n\| = 1$, tada je $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k + \alpha_0 = 0$ tzv. *Hesseov normalni oblik jednadžbi hiperravnine* Π.
U tom slučaju je n jedinični vektor, a koeficijenti $\alpha_1, \ldots \alpha_k$ zovu se kosinusi smjera vektora normale, jer je $\alpha_i = \cos\sphericalangle(n, e_i) = \cos\phi_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Uz to je $\delta = |\,\alpha_0\,|$.

Da bi se u općem slučaju jednadžba $\sum_i \alpha_i x_i + \alpha_0 = 0$ svela na Hesseov normalni oblik, dovoljno je lijevu stranu jednadžbe podijeliti brojem

$$\pm\|n\| = \pm\sqrt{\sum_i {\alpha_i}^2} \; .$$

Pritom je uobičajeno da se od dvije mogućnosti za jedinični vektor normale odabere onu kod koje je uz $\|n_0\| = 1$ i $(n_0, x) \geq 0$.
Tada je

$$\cos\phi_i = \frac{\alpha_i}{-\,\mathrm{sign}\ \alpha_0 \sqrt{\sum_j \alpha_j^2}} \; , \qquad \delta = \frac{\alpha_0}{\mathrm{sign}\ \alpha_0 \sqrt{\sum_i \alpha_i^2}} \; ,$$

pa Hesseov normalni oblik jednadžbe hiperravnine Π glasi

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \cos\phi_i - \delta = 0 \; . \tag{7.14}$$

Primjer 43. *Udaljenost točke od hiperravnine*
Odredimo udaljenost točke $A\,(10, 0, 6, 0)$ u prostoru $\mathcal{E}^4$ od hiperravnine Π zadane parametarskim jednadžbama:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + 2\tau_2 + \tau_3 \\ x_2 &= -2 + \tau_1 + 3\tau_2 \\ x_3 &= 3 + 2\tau_1 \\ x_4 &= -1 + \tau_3 \end{aligned}$$

Eliminacijom parametara τ_1, τ_2 i τ_3 dobivamo opći oblik jednadžbe hiperravnine Π

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 - 13 = 0 \; .$$

Udaljenost točke A od Π je prema (7.12)

$$\mathrm{d}(A, \Pi) = \frac{|\,3\cdot 10 + (-2)\cdot 0 + 1\cdot 6 + (-3)\cdot 0 - 13\,|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2 + (-3)^2}} = \frac{|\,23\,|}{\sqrt{23}} = \sqrt{23} \; .$$

Jednadžba okomice točkom A na hiperravninu Π glasi

$$\Pi_A^{\perp} \;\cdots\quad \frac{x_1 - 10}{3} = \frac{x_2}{-2} = \frac{x_3 - 6}{1} = \frac{x_4}{-3} \quad .$$

Ortogonalna projekcija točke A je presjek Π i $\Pi_A^{\perp}$.

$$\begin{aligned} 3(10 + 3\tau) - 2(-2\tau) + (6 + \tau) - 3(-3\tau) - 13 &= 0 \\ 23\tau - 23 &= 0 \\ \tau &= 1 \end{aligned}$$

Slijedi $A_\Pi\ (13, -2, 7, -3)$.

Zaista,

$$\mathrm{d}(A, A_\Pi) = \sqrt{(13-10)^2 + (-2-0)^2 + (7-6)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{23} \; .$$

7.2.2 Udaljenost točke od k-ravnine

Definicija 43. *Neka je* Π^k *k-ravnina prostora* $\mathcal{E}^n$ *i* $A \in \mathcal{E}^n$ *bilo koja točka. Udaljenost* $\mathrm{d}(A, A_{\Pi^k})$ *točke A i njezine ortogonalne projekcije* A_{Π^k} *na ravninu* Π^k *naziva se* udaljenost točke A od k-ravnine Π^k *i označava sa* $\mathrm{d}(A, \Pi^k)$.

Napomena. Neka je B bilo koja točka k-ravnine Π^k. Tada je

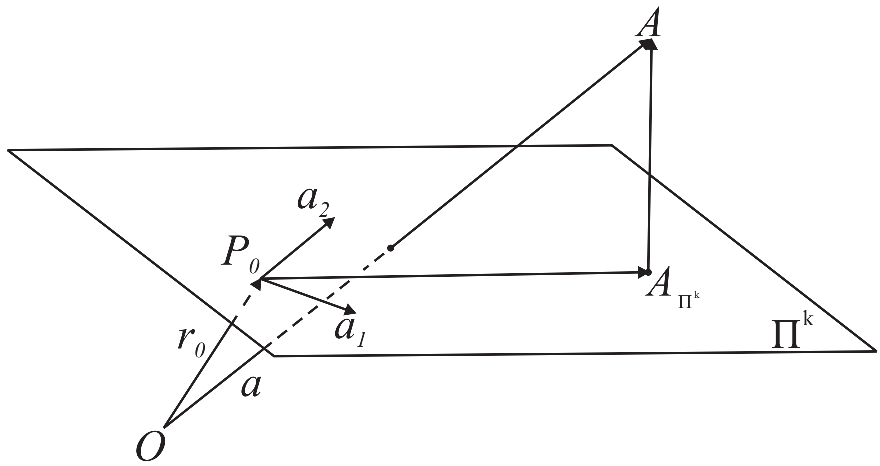
$$\|\overrightarrow{BA}\|^2 = \|\overrightarrow{BA_{\Pi^k}} + \overrightarrow{A_{\Pi^k}A}\|^2 = \|\overrightarrow{A_{\Pi^k}A}\|^2 + \|\overrightarrow{BA_{\Pi^k}}\|^2 \geq \|\overrightarrow{A_{\Pi^k}A}\|^2 .$$

Time smo pokazali da je udaljenost $\mathrm{d}(A, A_{\Pi^k})$ najkraća od svih udaljenosti točke A od točaka $B \in \Pi^k$, odnosno

$$\mathrm{d}(A, \Pi^k) = \mathrm{d}(A, A_{\Pi^k}) = \min_{B \in \Pi^k} \mathrm{d}(A, B) .$$

Nadalje, ova je definicija poopćenje prethodno definirane udaljenosti točke od hiperravnine (definicija 42).

Neka je $A(a)$ točka, $\Pi^k \ldots \quad r = r_0 + \sum_{i=1}^{k} \tau_i a_i \quad$ k-ravnina zadana točkom $P_0(r_0)$ i smjerom $W^k = [\, a_1, \ldots, a_k \,]$.



Slika 7.4: Udaljenost točke od 2-ravnine u prostoru $\mathcal{E}^3$

Vektor $\overrightarrow{A_{\Pi^k}A}$ ortogonalan je na W^k, tj. ortogonalan je na sve vektore a_i , $i = 1, 2, \ldots, k$. Prema tome, točka A_{Π^k} zadovoljava sljedeći sustav k jednadžbi sa k nepoznanica $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$

$$(\ a - r_0 - \sum_{i=1}^{k} \tau_i a_i \ ,\ a_j\ ) = 0 , \quad j = 1, 2, \ldots, k ,$$

a on je ekvivalentan sustavu

$$\sum_{i=1}^{k} (a_i, a_j)\tau_i - (a - r_0, a_j) = 0 , \quad j = 1, 2, \ldots, k . \tag{7.15}$$

Određivanjem nepoznanica $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ dobivamo ortogonalnu projekciju $A_{\Pi^k}(r')$ točke A na Π^k, pa je vektor $\overrightarrow{A_{\Pi^k}A} = a - r_0 - \sum_{i=1}^{k} \tau_i a_i$, a udaljenost $\mathrm{d}(A, \Pi^k) = \mathrm{d}(A, A_{\Pi^k}) = \|\overrightarrow{A_{\Pi^k}A}\|$.

Međutim, udaljenost $\mathrm{d}(A, \Pi^k)$ možemo eksplicitno izraziti i samo pomoću vektora $a_1, \ldots, a_k$, a, r_0. U tu svrhu dodamo sustavu (7.15) jednadžbu

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \tau_i - \overrightarrow{P_0 A_{\Pi^k}} = 0 \ . \tag{7.16}$$

Promatrajmo sustav (7.15), (7.16) kao homogeni sustav linearnih jednadžbi s netrivijalnim rješenjem $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k, -1$. Pritom je važno da je

$$\begin{vmatrix} (a_1, a_1) & \ldots & (a_1, a_k) & a_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_k, a_1) & \ldots & (a_k, a_k) & a_k \\ (a - r_0, a_1) & \ldots & (a - r_0, a_k) & \overrightarrow{P_0 A_{\Pi^k}} \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

iz čega slijedi

$$\begin{aligned} r' - r_0 = \ & \overrightarrow{P_0 A_{\Pi^k}} \ = \\ = & -\frac{1}{\Gamma(a_1, \ldots, a_k)} \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & \ldots & (a_1, a_k) & a_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_k, a_1) & \ldots & (a_k, a_k) & a_k \\ (a - r_0, a_1) & \ldots & (a - r_0, a_k) & 0 \end{vmatrix} . \end{aligned} \tag{7.17}$$

Sada iz jednakosti $\overrightarrow{A_{\Pi^k}A} = \overrightarrow{P_0 A} - \overrightarrow{P_0 A_{\Pi^k}}$ slijedi

$$\begin{aligned} a - r' = \ & \overrightarrow{A_{\Pi^k}A} \ = \\ = & \frac{1}{\Gamma(a_1, \ldots, a_k)} \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & \ldots & (a_1, a_k) & a_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_k, a_1) & \ldots & (a_k, a_k) & a_k \\ (a - r_0, a_1) & \ldots & (a - r_0, a_k) & a - r_0 \end{vmatrix} . \end{aligned} \tag{7.18}$$

Konačno, za udaljenost $\mathrm{d}(A, \Pi^k)$ dobivamo

$$\mathrm{d}^2(A, \Pi^k) = \|\overrightarrow{A_{\Pi^k}A}\|^2 = (\overrightarrow{A_{\Pi^k}A}, \overrightarrow{A_{\Pi^k}A}) = (\overrightarrow{A_{\Pi^k}A}, a - r_0) \ ,$$

jer je

$$\overrightarrow{A_{\Pi^k}A} = \overrightarrow{A_{\Pi^k}P_0} + \overrightarrow{P_0 A} \ .$$

Primjenom jednakosti (7.18) dobivamo

$$\boxed{\mathrm{d}^2(A, \Pi^k) = \frac{\Gamma(a_1, \ldots, a_k, a - r_0)}{\Gamma(a_1, \ldots, a_k)}} \ . \tag{7.19}$$

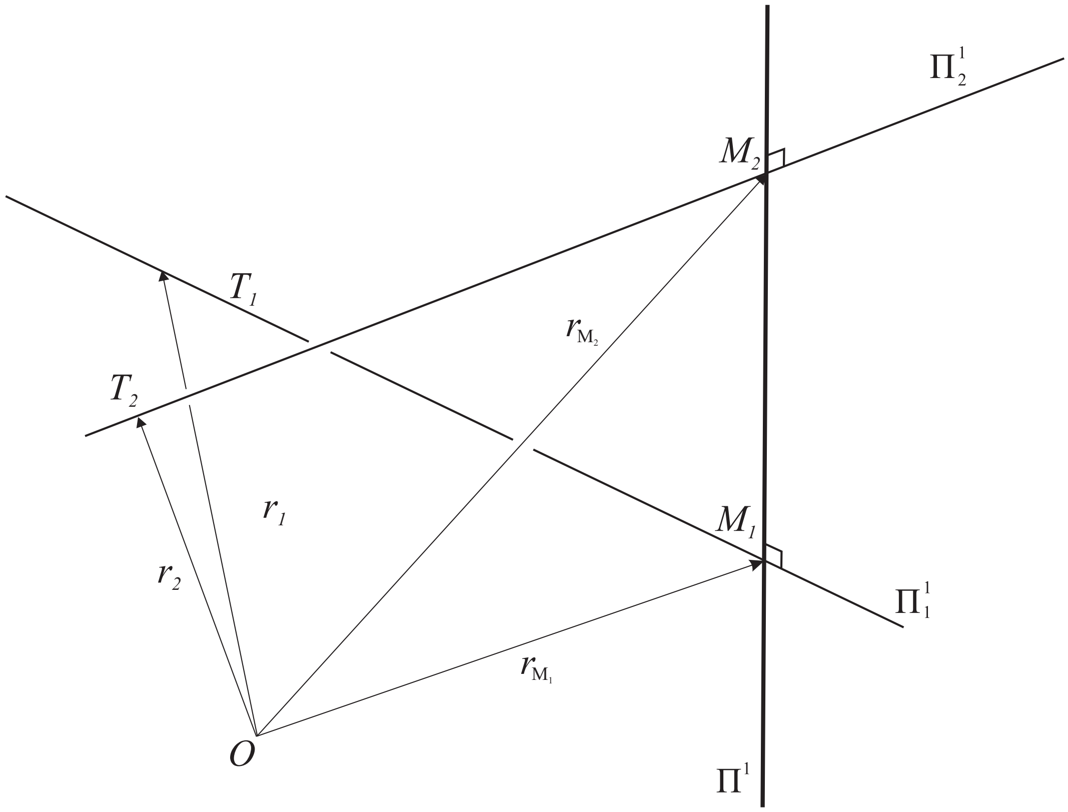
Udaljenost $\mathrm{d}(A, \Pi^1)$ točke A od pravca Π^1 dobiva se najjednostavnije tako da se najprije odredi presjek $\Pi^1 \cap (\Pi^1)^{\perp}_{A}$, tj. točka A_{Π^1}.
Tada je

$$\mathrm{d}(A, \Pi^1) = \mathrm{d}(A, A_{\Pi^1}) \ .$$

7.2.3 Zajednička normala i udaljenost k-ravnina

Definicija 44. *Pravac* Π^1 *koji siječe dva pravca* Π_1^1 *i* Π_2^1 *i na njih je okomit naziva se* zajednička normala pravaca Π_1^1 *i* Π_2^1.

Neka su $\Pi_1^1 \ldots\ r = r_1 + \tau_1 a_1$ i $\Pi_2^1 \ldots\ r = r_2 + \tau_2 a_2$ dva mimosmjerna pravca u $\mathcal{E}^n$. Tada su vektori a_1 i a_2 linearno nezavisni, a vektor $\overrightarrow{T_1T_2} \neq \theta$, za sve $T_1 \in \Pi_1^1$, $T_2 \in \Pi_2^1$.



Slika 7.5: Zajednička normala dvaju mimosmjernih pravaca

Propozicija 28. *Neka su* $\Pi_1^1 \ldots\ r = r_1 + \tau a_1$ *i* $\Pi_2^1 \ldots\ r = r_2 + \tau a_2$ *mimosmjerni pravci. Pravac* Π^1 *točkama* $M_1 \in \Pi_1^1$ *i* $M_2 \in \Pi_2^1$, *određen jednadžbom*

$$r = r_1 + \tau_1 a_1 + \tau(r_2 + \tau_2 a_2 - r_1 - \tau_1 a_1) \ , \tag{7.20}$$

gdje je $r_{M_1} = r_1 + \tau_1 a_1$ *i* $r_{M_2} = r_2 + \tau_2 a_2$, *pri čemu je*

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{(r_2 - r_1, a_1)\, a_2^2 - (r_2 - r_1, a_2)(a_1, a_2)}{a_1^2 a_2^2 - (a_1, a_2)^2} \ , \\ \tau_2 &= \frac{(r_2 - r_1, a_1)(a_1, a_2) - (r_2 - r_1, a_2)\, a_1^2}{a_1^2 a_2^2 - (a_1, a_2)^2} \end{aligned} \tag{7.21}$$

je zajednička normala pravaca Π_1^1 *i* Π_2^1 .

Dokaz. Vektor smjera pravca Π^1 (7.20) je $r_2 + \tau_2 a_2 - r_1 - \tau_1 a_1$.
Pravac Π^1 je zajednička normala pravaca Π^1_1 i Π^1_2 ako i samo ako vrijedi:

$$\begin{aligned} (\, r_2 + \tau_2 a_2 - r_1 - \tau_1 a_1 \,,\, a_1 \,) &= 0 \;, \\ (\, r_2 + \tau_2 a_2 - r_1 - \tau_1 a_1 \,,\, a_2 \,) &= 0 \;. \end{aligned} \tag{7.22}$$

Tada je vektor smjera pravca Π^1 ortogonalan na vektore a_1 i a_2, odnosno pravac Π^1 je okomit na pravce Π^1_1 i Π^1_2. Primjenom svojstava skalarnog produkta uvjeti (7.22) mogu se ekvivalentno zapisati kao:

$$\begin{aligned} a_1^2\, \tau_1 - (a_1, a_2)\, \tau_2 &= (\, r_2 - r_1, a_1) \;, \\ (a_1, a_2)\, \tau_1 - a_2^2\, \tau_2 &= (\, r_2 - r_1, a_2) \;. \end{aligned}$$

Zbog linearne nezavisnosti vektora a_1 i a_2 je $a_1^2 a_2^2 - (a_1, a_2)^2 \neq 0$, pa vrijedi (7.21). Parametrima τ_1 i τ_2 određene su točke M_1 i M_2 u kojima se pravci Π^1_1 i Π^1_2 sijeku s pravcem Π. Stoga je pravac Π^1 zajednička normala pravaca Π^1_1 i Π^1_2. □

Propozicija 29. *Neka su* $\Pi^1_1 \ldots\; r = r_1 + \tau a_1$ *i* $\Pi^1_2 \ldots\; r = r_2 + \tau a_2$ *mimosmjerni pravci, a pravac* Π^1 *točkama* $M_1 \in \Pi^1_1$ *i* $M_2 \in \Pi^1_2$ *zajednička normala pravaca* Π^1_1 *i* Π^1_2. *Udaljenost* $\mathrm{d}(M_1, M_2)$ *je najmanja udaljenost točaka pravaca* Π^1_1 *i* Π^1_2.

Dokaz. Za sve $T_1 \in \Pi^1_1$, $T_2 \in \Pi^1_2$ je $\overrightarrow{T_1T_2} = \overrightarrow{T_1M_1} + \overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2T_2}$. Stoga zbog $(\overrightarrow{T_1M_1}, \overrightarrow{M_1M_2}) = (\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_2T_2}) = \theta$ vrijedi

$$\overrightarrow{T_1T_2}^2 = \; (\overrightarrow{T_1M_1} + \overrightarrow{M_2T_2})^2 + \overrightarrow{M_1M_2}^2 \;,$$

odnosno

$$\overrightarrow{M_1M_2}^2 = \; \overrightarrow{T_1T_2}^2 - (\overrightarrow{T_1M_1} + \overrightarrow{M_2T_2})^2 \;\leq\; \overrightarrow{T_1T_2}^2 \;,$$

pa je

$$\mathrm{d}(M_1, M_2) \;\leq\; \mathrm{d}(T_1, T_2) \;.$$

Jednakost vrijedi za $T_1 = M_1$ i $T_2 = M_2$. Stoga vrijedi

$$\mathrm{d}(M_1, M_2) \;=\; \min_{T_1 \in \Pi^1_1 \,,\, T_2 \in \Pi^1_2} \mathrm{d}(T_1, T_2) \;.$$

□

Primjer 44. *Zajednička normala dvaju mimosmjernih pravaca u prostoru* $\mathcal{E}^3$

Neka su $\Pi^1_1 \ldots\; r = r_1 + \tau a_1$ i $\Pi^1_2 \ldots\; r = r_2 + \tau a_2$ mimosmjerni pravci.
Vektor smjera zajedničke normale dvaju pravaca u prostoru $\mathcal{E}^3$ može se odrediti pomoću vektorskog produktra vektora smjera zadanih pravaca

$$a = a_1 \times a_2 \;.$$

Zatim, zajedničku normalu Π^1 možemo dobiti kao presjek dviju 2-ravnina Π^2_1 i Π^2_2 određenih jednim od zadanih pravaca i vektorom smjera zajedničke normale. Tada je

$$\Pi^1_1 \subset \Pi^2_1,\; \Pi^1 \subset \Pi^2_1 \quad \text{i} \quad \Pi^1_2 \subset \Pi^2_2,\; \Pi^1 \subset \Pi^2_2,$$

odnosno:

$$\begin{array}{ll} \Pi_1^2 \ \dots & (\, r - r_1\,,\, a_1\,,\, a_1 \times a_2\,) = 0 \\ \Pi_2^2 \ \dots & (\, r - r_2\,,\, a_2\,,\, a_1 \times a_2\,) = 0 \end{array}$$

čime je određena opća jednadžba pravca $\Pi^1 = \Pi_1^2 \cap \Pi_2^2$.

Definicija 45. *Neka su* Π_1^k *i* Π_2^l *ravnine u prostoru* $\mathcal{E}^n$*. Pravac* Π^1 *koji siječe ravnine* Π_1^k *i* Π_2^l *i na njih je okomit naziva se* zajednička normala ravnina Π_1^k *i* Π_2^l .

Zajednička normala k-ravnine i l-ravnine poopćenje je prethodno definirane zajedničke normale dvaju pravaca (definicija 44). U tom slučaju kada promatrane ravnine nisu mimosmjerne, njihova zajednička normala nije jednoznačno određena.

Propozicija 30. *Za svake dvije ravnine* Π_1^k *i* Π_2^l *u prostoru* $\mathcal{E}^n$ *koje se ne sijeku postoji zajednička normala.*
Najkraća udaljenost točaka tih ravnina jednaka je duljini odreska zajedničke normale, tj. udaljenosti točaka u kojima ta normala siječe ravnine.

Dokaz. Pokažimo najprije egzistenciju zajedničke normale. Neka su

$$r = r_0 + \sum_{i=1}^{k} \tau_i a_i \ , \qquad r = r_1 + \sum_{j=1}^{l} \tau_j b_j$$

jednadžbe ravnina Π_1^k i Π_2^l . Pretpostavimo da je broj linearno nezavisnih vektora u skupu $\{a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l\}$ jednak s , odnosno da su ravnine Π_1^k i Π_2^l $\dfrac{k+l-s}{k}$-paralelne. Označimo te vektore sa $c_1, \dots, c_s$. Tada jednadžba $(s+1)$-dimenzionalne ravnine $\Pi_1^k + \Pi_2^l$ glasi

$$r = r_0 + \lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_s c_s + \lambda_{s+1}(r_1 - r_0) \ .$$

U ravnini $\Pi_1^k + \Pi_2^l$ jednoznačno su određene paralelne s-ravnine $\overline{\Pi_1^s}$ i $\overline{\Pi_2^s}$ takve da je

$$\Pi_1^k \subseteq \overline{\Pi_1^s} \quad , \quad \Pi_2^l \subseteq \overline{\Pi_2^s} \ .$$

Jednadžbe tih ravnina možemo zapisati u obliku

$$\overline{\Pi_1^s} \dots \quad r = r_0 + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i c_i \ , \qquad \overline{\Pi_2^s} \dots \quad r = r_1 + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j c_j \ .$$

Ortogonalna projekcija $p_{\overline{\Pi_2^s}}(\Pi_1^k)$ ravnine Π_1^k je k-dimenzionalna ravnina koja ravninu Π_2^l siječe u $(k+l-s)$-ravnini $\hat{\Pi}_1^{k+l-s}$.

Svaka okomica na ravninu $\overline{\Pi_1^s}$ iz točaka ravnine $\hat{\Pi}_1^{k+l-s}$ siječe Π_1^k i okomita je na ravnine $\overline{\Pi_1^s}$ i $\overline{\Pi_2^s}$, pa je stoga okomita i na ravnine Π_1^k i Π_2^l.

Uočavamo da je u Π_1^k, odnosno u Π_2^l, skup nožista zajedničkih normala ravnina Π_1^k i Π_2^l $(k+l-s)$-ravnina.

Dokažimo sada drugi dio tvrdnje.
Neka je M_1M_2 zajednička normala promatranih ravnina, tako da je točka $M_1 \in \Pi_1^k$, točka $M_2 \in \Pi_2^l$, a $T_1 \in \Pi_1^k$, $T_2 \in \Pi_2^l$ bilo koje druge točke. Iz točke T_1 spustimo okomicu T_1N_2 na Π_2^l, $N_2 \in \Pi_2^l$.
Najkraća udaljenost točaka pravaca M_1T_1 i M_2N_2 je $\mathrm{d}(M_1, M_2)$, pa je stoga

$$\mathrm{d}(M_1, M_2) \leq \mathrm{d}(T_1, N_2) .$$

Kako je najkraća udaljnost točke T_1 od ravnine Π_2^l jednaka $\mathrm{d}(T_1, N_2)$, vrijedi

$$\mathrm{d}(T_1, N_2) \leq \mathrm{d}(T_1, T_2) .$$

Dakle, vrijedi $\mathrm{d}(M_1, M_2) \leq \mathrm{d}(T_1, T_2)$. □

Odredimo udaljenost $\mathrm{d}(M_1, M_2)$, koristeći se oznakama iz prethodnog dokaza. U tu svrhu dovoljno je korisiti se ortogonalnošću vektora

$$\overrightarrow{M_1M_2} = r_{M_2} - r_{M_1} = (r_1 - r_0) - \sum_{i=1}^{k} \tau_i a_i + \sum_{j=1}^{l} \sigma_j b_j$$

na vektore $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l$. Tako dobivamo sustav s nezavisnih linearnih jednadžbi sa $k+l$ nepoznanica $\tau_1, \ldots, \tau_k, \sigma_1, \ldots, \sigma_l$:

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{M_1M_2}, a_i) = 0 , \qquad & i = 1, \ldots, k , \\ (\overrightarrow{M_1M_2}, b_j) = 0 , \qquad & j = 1, \ldots, l . \end{aligned} \tag{7.23}$$

Svaka $(k+l)$-torka brojeva τ_i i σ_j koja je rješenje sustava (7.23) određuje par nožišta M_1 i M_2 zajedničke normale, pa je tada

$$\mathrm{d}(M_1, M_2) = \|\overrightarrow{M_1M_2}\| = \|(r_1 - r_0) - \sum_{i=1}^{k} \tau_i a_i + \sum_{j=1}^{l} \sigma_j b_j\| . \tag{7.24}$$

Ako je $s = k + l$ sustav (7.23) ima jedinstveno rješenje. Tada je $W_1^k \cap W_2^l = \{\theta\}$ i ravnine Π_1^k i Π_2^l imaju točno jednu zajedničku normalu (takav je npr. slučaj dvaju mimosmjernih pravaca).

Upravo dokazana tvrdnja opravdava sljedeću definiciju.

Definicija 46. *Neka su Π_1^k i Π_2^l disjunktne ravnine prostora $\mathcal{E}^n$. Udaljenost točaka u kojima zajednička normala siječe ravnine Π_1^k i Π_2^l naziva se* udaljenost ravnina Π_1^k *i* Π_2^l *i označava sa $\mathrm{d}(\Pi_1^k, \Pi_2^l)$. Udaljenost ravnina koje se sijeku jednaka je nuli.*

U ovoj definiciji nismo naveli posebna ograničenja na dimenzije k i l ravnina, no lako se pokazuje da je ova definicija u skladu s prethodno definiranom udaljenosti točke od k-ravnine (definicija 43).

Propozicija 30, uz uvedene oznake, zapravo izriče tvrdnju

$$\mathrm{d}(\Pi_1^k, \Pi_2^l) = \mathrm{d}(M_1, M_2) = \min_{T_1 \in \Pi_1^k, T_2 \in \Pi_2^l} \mathrm{d}(T_1, T_2) .$$

7.3 Kutovi ravnina

7.3.1 Kut pravca i k-ravnine

Definicija 47. *Neka je* Π_1^1 *pravac i* Π_2^k *k-ravnina, pri čemu je* $\Pi_1^1 \cap \Pi_2^k \neq \emptyset$*. Kut pravca* Π_1^1 *i njegove ortogonalne projekcije* $p_{\Pi_2^k}(\Pi_1^1)$ *na ravninu* Π_2^k *naziva se* kut pravca Π_1^1 i ravnine Π_2^k*, i označava sa* $\sphericalangle(\Pi_1^1, \Pi_2^k)$ *. U slučaju kada je* $\Pi_1^1 \perp \Pi_2^k$*, uzimamo da je* $\sphericalangle(\Pi_1^1, \Pi_2^k) = \dfrac{\pi}{2}$.

Neka je Π_1^1 pravac i Π_2^k k-ravnina. Ako je $\Pi_1^1 \cap \Pi_2^k = \emptyset$, onda postoji pravac $\overline{\Pi}_1^1 \parallel \Pi_1^1$, takav da je $\overline{\Pi}_1^1 \cap \Pi_2^k \neq \emptyset$. U tom slučaju je $\sphericalangle(\Pi_1^1, \Pi_2^k) = \sphericalangle(\overline{\Pi}_1^1, \Pi_2^k)$.
Posebno je u slučaju $\Pi_1^1 \subseteq \Pi_2^k$ projekcija $p_{\Pi_2^k}(\Pi_1^1) = \Pi_1^1$, pa je kut $\sphericalangle(\Pi_1^1, \Pi_2^k) = 0$.

Propozicija 31. *Neka su u prostoru* $\mathcal{E}^n$ *zadani pravac* Π_1^1 *i ravnina* Π_2^k *takvi da pravac siječe ravninu u točki* P *pod kutem* φ *,* $\varphi \neq 0$*,* $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ *.*
Kut pravca Π_1^1 *i bilo kojeg pravca ravnine* Π_2^k *točkom* P*, različitog od ortogonalne projekcije pravca* Π_1^1 *na* Π_2^k*, veći je od* φ *.*

Dokaz. Označimo sa a_0 i b_0 jedinične vektore smjera pravca Π_1^1 i njegove ortogonalne projekcije na Π_2^k tako da je $\varphi = \sphericalangle(a_0, b_0) < \frac{\pi}{2}$. Tada je

$$n = a_0 - (a_0, b_0)\, b_0$$

vektor smjera normale na ravninu Π^k jer je $n = a_0 + \lambda b_0$ i $(n, b_0) = 0$. Za bilo koji jedinični vektor $c_0 \in W_2^k$ je skalarni produkt

$$(n, c_0) = (a_0, c_0) - (a_0, b_0)(b_0, c_0) = 0 \ ,$$

pa je $(a_0, c_0) = (a_0, b_0)(b_0, c_0)$.
Budući da je $(a_0, b_0) > 0$ i $(a_0, b_0) \leq 1$, vrijede sljedeće tvrdnje:
ako je $(b_0, c_0) < 0$, tada je $(a_0, c_0) < 0 < (a_0, b_0)$;
ako je $(b_0, c_0) \geq 0$, tada je $(a_0, c_0) \leq (a_0, b_0)$.
Kada vrijedi $c_0 \neq b_0$, odnosno kada je pravac u ravnini Π_2^k sa smjerom c_0 različit od ortogonalne projekcije pravca Π_1^1, tada je u oba gore navedena slučaja $(a_0, c_0) < (a_0, b_0)$, a to znači da je $\sphericalangle(a_0, c_0) > \sphericalangle(a_0, b_0)$. □

Razmotrimo sada kut pravca i hiperravnine.
Neka su u prostoru $\mathcal{E}^n$ zadani pravac $\Pi_1^1 \ldots\ r = r_1 + \tau b$ i hiperravnina $\Pi_2^{n-1} \ldots\ (n, r) + \alpha_0 = 0$.
Za kut φ pravca Π_1^1 i hiperravnine Π_2^{n-1} vrijedi: $\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = |\cos\sphericalangle(n, b)|$ pa je

$$\sin\varphi = \frac{|\,(n, b)\,|}{\|n\|\|b\|} \ . \tag{7.25}$$

Ova se jednakost uz oznake $n = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ može zapisati u obliku

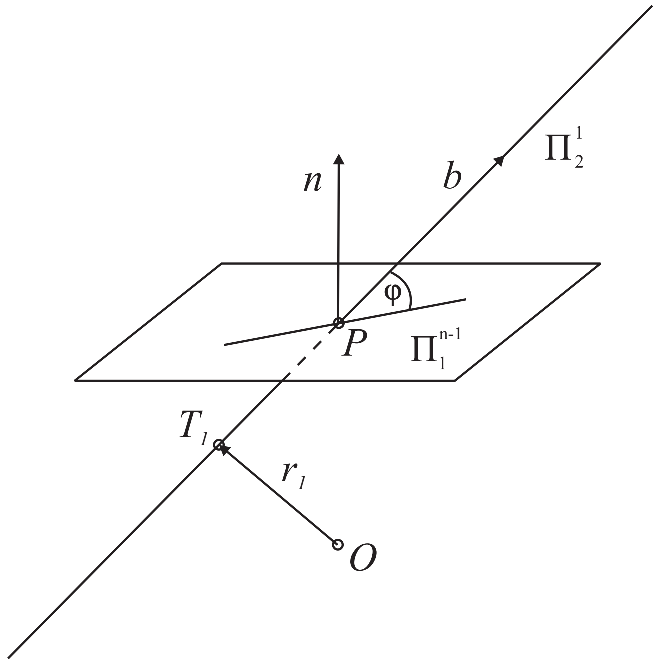
$$\sin\varphi = \frac{|\,\alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n\,|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2}\ \sqrt{\beta_1^2 + \ldots + \beta_n^2}} \ . \tag{7.26}$$

Ako je $\varphi = 0$, tada je $\Pi_1^1 \parallel \Pi_2^{n-1}$, pa iz (7.25) dobivamo uvjet paralelnosti pravca i hiperravnine

$$(n, b) = 0, \qquad \text{odnosno} \qquad \alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n = 0 \ . \tag{7.27}$$

Ako je $\Pi_1^1 \perp \Pi_2^{n-1}$, vektori n i b su linearno zavisni. Stoga je uvjet okomitosti pravca i hiperravnine

$$n = \lambda\, b, \qquad \text{odnosno} \qquad \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \ldots = \frac{\alpha_n}{\beta_n} \ . \tag{7.28}$$



Slika 7.6: Kut pravca i hiperravnine

7.3.2 Kut dvije hiperravnine

Definicija 48. *Neka su hiperravnine* Π_1^{n-1} *i* Π_2^{n-1} *zadane jednadžbama*

$$\Pi_i^{n-1} \ldots \ (n_i, r) + \alpha_0^i = 0 \ , \qquad i = 1, 2 \ . \tag{7.29}$$

Kut hiperravnina Π_1^{n-1} *i* Π_2^{n-1} *je manji od dvaju suplementarnih kutova* $\sphericalangle(n_1, n_2)$, $\sphericalangle(n_1, -n_2)$.

Uočimo da je prema prethodnoj definiciji kut dvije paralelne hiperravnine jednak 0.

Za kut φ hiperravnina Π_1^{n-1} i Π_2^{n-1} vrijedi jednakost

$$\cos\varphi = \frac{|\,(n_1, n_2)\,|}{\|n_1\|\|n_2\|} \ , \tag{7.30}$$

koja se uz oznake $n_i = (\alpha_1^i, \ldots, \alpha_n^i)$, $i = 1, 2$ može zapisati u obliku

$$\cos\varphi = \frac{|\,\alpha_1^1\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^1\alpha_n^2\,|}{\sqrt{(\alpha_1^1)^2 + \ldots + (\alpha_n^1)^2}\ \sqrt{(\alpha_1^2)^2 + \ldots + (\alpha_n^2)^2}} \ . \tag{7.31}$$

Uvjet okomitosti, točnije $\frac{1}{n-1}$ -okomitosti hiperravnina, koji slijedi iz (7.31) je

$$\alpha_1^1\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^1\alpha_n^2 = 0 \quad . \tag{7.32}$$

7.3.3 Kut između ravnina

Pojam kuta između ravnina do sad smo promatrali samo za slučajeve kada je barem jedna od tih ravnina ili pravac ili hiperravnina. Pojam kuta između k-ravnine i l-ravnine može se poopćiti na slučajeve ravnina svih dimenzija.

Definicija 49. *Neka su* Π_1^k *i* Π_2^l *ravnine sa smjerovima* W_1 *i* W_2 *.*
Ako je $W_1 \cap W_2 = \{\theta\}$ *tada* kutom ravnina Π_1^k *i* Π_2^l *nazivamo infimum kutova između vektora iz pripadnih smjerova koji su različiti od nul-vektora, odnosno kut*

$$\sphericalangle(\Pi_1^k, \Pi_2^l) \;=\; \inf_{\substack{x\in W_1\backslash\{\theta\} \\ y\in W_2\backslash\{\theta\}}} \sphericalangle(x,y) \quad , \tag{7.33}$$

a ako je $W_1 \cap W_2 \neq \{\theta\}$ *tada kutom ravnina* Π_1^k *i* Π_2^l *nazivamo kut*

$$\sphericalangle(\Pi_1^k, \Pi_2^l) \;=\; \sphericalangle(\, W_1 \cap (W_1 \cap W_2)^{\perp} \,,\, W_2 \cap (W_1 \cap W_2)^{\perp} \,) \ . \tag{7.34}$$

Kut ravnina smo dakle definirali kao infimum kutova između vektora pripadnih smjerova s tim što smo promatrali samo one vektore koji su ortogonalni na presjek oba smjera.

Definicija 49 je poopćenje definicija 47 i 48. Za definiciju 47 kuta između pravca i ravnine, to direktno slijedi iz teorema 31. Za definiciju 48 kuta dvije hiperravnine najprije uočimo da presjek smjerova hiperravnina nije trivijalan. Ukoliko su smjerovi promatranih hiperravnina jednaki (hiperravnine su paralelne ili se poklapaju), tada su i normale n_1 i n_2 jednake, te je kut hiperravnina prema definiciji 48 jednak 0. Budući da je $\sphericalangle(\, W_1 \cap (W_1)^{\perp} \,,\, W_1 \cap (W_1)^{\perp} \,) = 0$, tada je i po definiciji 49 uz $W_1 = W_2$ kut hiperravnina jednak 0. Ukoliko su smjerovi hiperravnina različiti tada je $\sphericalangle(\, W_1 \cap (W_1 \cap W_2)^{\perp} \,,\, W_2 \cap (W_1 \cap W_2)^{\perp} \,) = \sphericalangle([n_2],[n_1])$, pa se i tada definicije poklapaju.

Primjer 45. *Kut između ravnina*

Odrediti kut između 2-ravnina prostora $\mathcal{E}^4$ zadanih jednadžbama:

$$\Pi_1 \;\ldots \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad \Pi_2 \;\ldots \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Parametarske jednadžbe ravnina Π_1 i Π_2 su:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Neka su W_1 i W_2 smjerovi ravnina Π_1 i Π_2. Odredimo presjek smjerova W_1 i W_2.

$$[-\lambda-\mu\,,\,0\,,\,\lambda\,,\,\mu]=[\alpha+\beta\,,\,0\,,\,\alpha\,,\,\beta]$$

$$\left.\begin{aligned}-(\lambda+\mu)&=\alpha+\beta\\ \lambda&=\alpha\\ \mu&=\beta\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}-(\lambda+\mu)&=\lambda+\mu\\ \lambda+\mu&=0\end{aligned}\qquad\Rightarrow\qquad \mu=-\lambda$$

$$\lambda\,[-1,0,1,0]\;-\;\lambda\,[-1,0,0,1]=\lambda\,[0,0,1,-1]$$

Dakle, $\quad W_1\cap W_2=[\;[0,0,1,-1]\;]$.

Sada tražimo ortogonalni komplement toga smjera. Lako dobivamo tri linearno nezavisna vektora koja razapinju traženi prostor

$$(W_1\cap W_2)^{\perp}=[\;[1,0,0,0]\;,\;[0,1,0,0]\;,\;[0,0,1,1]\;]\;.$$

Istim postupkom kao gore, za presjek sa smjerovima W_1 i W_2 dobivamo:

$$W_1\cap(W_1\cap W_2)^{\perp}=[\;[-2,0,1,1]\;],$$

$$W_2\cap(W_1\cap W_2)^{\perp}=[\;[2,0,1,1]\;].$$

Tada za traženi kut $\varphi=\sphericalangle(\Pi_1,\Pi_2)$ vrijedi

$$\cos\varphi=\frac{|\,(\;[-2,0,1,1]\;,\;[2,0,1,1]\;)\,|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\;\;,$$

pa je $\;\varphi\approx 70^\circ 32'$.

Poglavlje 8

Politopi

8.1 Volumen paralelotopa

Kako bismo uveli pojam volumena n-dimenzionalnog paralelotopa, a budući da je paralelotop analogon paralelograma, odnosno paralelepipeda, promotrit ćemo najprije bitna svojstva njihove površine odnosno volumena, a zatim ćemo definirati volumen n-dimenzionalnog paralelotopa tako da i on ima ta svojstva.
Površina paralelograma se ne mijenja pri translaciji paralelograma u ravnini. Isto vrijedi pri translaciji paralelepipeda u prostoru. Stoga zahtijevamo da volumen paralelotopa bude neovisan o promjeni položaja. Drugim riječima, volumen paralelotopa $P^n(a_1,\ldots,a_n)$ treba ovisiti samo o n vektora $a_1,\ldots,a_n \in U^n$ kojima je taj paralelotop razapet. Taj ćemo volumen označiti sa $V_n(a_1,\ldots,a_n)$.
Pri izračunavanju volumena potrebno je odabrati prikladne mjerne jedinice. U tu svrhu uzimamo da paralelotop $P^n(e_1,\ldots,e_n)$, gdje je $\{e_1,\ldots,e_n\}$ ortonormirana baza prostora U^n , ima jedinični volumen, odnosno da je

$$V_n(e_1,\ldots,e_n) = 1 \ . \tag{8.1}$$

Površina paralelograma i volumen paralelepipeda su nenegativni. Takav treba biti i volumen n-dimenzionalnog paralelotopa. Prema tome zahtijevamo da je

$$V_n(a_1,\ldots,a_n) \geq 0 \ . \tag{8.2}$$

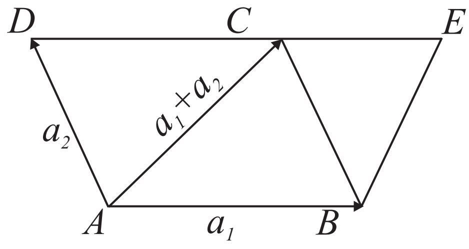
Iz elementarne geometrije je poznato da su površine paralelograma, donosno volumeni paralelepipeda s jednakim bazama i visinama jednaki (sl. 8.1. i sl. 8.2.) .

Odgovarajuće svojstvo koje treba imati paralelotop $P^n(a_1,\ldots,a_n)$ glasi

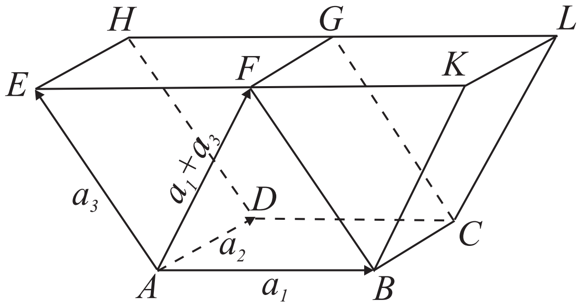
$$\begin{aligned} V_n(a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_n) = V_n(a_1,\ldots,a_i+a_k,\ldots,a_n) \ , \\ 1 \leq k \leq n, \ k \neq i \ . \end{aligned} \tag{8.3}$$

Uočimo sljedeće svojstvo površine i volumena.

Neka su $ABCD$ i $ABEF$ paralelogrami s razapeti vektorima a_1, a_2 , odnosno $a_1, \lambda a_2$ za $\lambda \in \mathbb{R}$. Budući da je $\mathrm{d}(A,F) = |\,\lambda\,|\ \mathrm{d}(A,D)$, to je $V_2(a_1,a_2) = |\,\lambda\,|\ V_2(a_1,\lambda a_2)$.



Slika 8.1: $V_2(a_1,a_2)=V_2(a_1,a_1+a_2)$



Slika 8.2: $V_3(a_1,a_2,a_3)=V_3(a_1,a_2,a_1+a_3)$

Za paralelepipede $P^3(a_1,a_2,a_3)$ i $P^3(a_1,a_2,\lambda a_3)$ je $V_3(a_1,a_2,\lambda a_3)=|\,\lambda\,|\;V_3(a_1,a_2,a_3)$. Prema tome, u n-dimenzionalnom slučaju zahtijevamo da vrijedi

$$V_n(a_1,\ldots,\lambda a_i,\ldots,a_n)=|\,\lambda\,|\;V_n(a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_n)\;. \tag{8.4}$$

Na temelju ovih razmatranja, problem određivanja volumena paralelotopa svodi se na određivanje funkcije $V_n(a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_n)$ koja svakoj n-torki vektora $a_1,\ldots,a_n$ pridružuje realnu vrijednost $V_n(a_1,\ldots,a_n)$ i koja ima svojstva (8.1)-(8.4). Pritom ćemo razmatrati sve n-torke vektora, a ne samo n-torke linearno nezavisnih vektora.

Pokažimo sada egzistenciju i jedinstvenost takve funkcije. U tu svrhu pronađimo funkciju D koja zadovoljava uvjete:

(i) $D(a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_n)=D(a_1,\ldots,a_i+a_k,\ldots,a_n)$

(ii) $D(a_1,\ldots,\lambda a_i,\ldots,a_n)=\lambda D(\,a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_n)$

(iii) $D(e_1,\ldots,e_n)=1$.

Znamo da je jedna funkcija koja zadovoljava uvjete (i),(ii) i (iii) determinanta $D(a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_n)$, pri čemu je i-ti stupac koordinatni zapis vektora $a_i\in U^n$. Može se pokazati da je determinanta jedino rješnje sustava funkcionalnih jednadžbi (i)-(iii). Naime, ako pretpostavimo da su D i $\overline{D}$ dvije funkcije koje zadovoljavaju uvjete (i)-(iii) , tada funkcija

$$F(a_1,\ldots,a_n)=D(a_1,\ldots,a_n)-\overline{D}(a_1,\ldots,a_n) \tag{8.5}$$

ima svojstva (i) i (ii) i vrijedi $F(e_1,\ldots,e_n)=0$. Iz toga neposredno slijedi da je $F(a_1,\ldots,a_n)=0$, za sve $a_1,\ldots,a_n\in U^n$, jer se svaki vektor a_i , $1\le i\le n$, može prikazati kao linearna kombinacija vektora $e_1,\ldots,e_n$. Dakle, $D=\overline{D}$.

Propozicija 32. *Neka su* $a_1, \ldots, a_n \in U^n$, *a* $D(a_1, \ldots, a_n)$ *determinanta kojoj je* i*-ti stupac koordinatni zapis vektora* a_i. *Funkcija* $|\,D(a_1, \ldots, a_n)\,|$ *je jedinstvena funkcija koja ima svojstva* (8.1)-(8.4) .

Dokaz. Na temelju prethodnih razmatranja upitna je jedino jedinstvenost. Neka je $V(a_1, \ldots, a_n)$ bilo koja funkcija koja ima svojstva (8.1)-(8.4) . Ako su vektori $a_1, \ldots, a_n$ linearno zavisni, mora biti $V_n(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Zaista, ako je

$$a_i = \sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} \lambda_k a_k \ ,$$

tada imamo redom

$$\begin{aligned} V_n(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n) &= V_n\left(a_1, \ldots,\ a_i - \sum_{k=1,k\neq i}^{n} \lambda_k a_k\ , \ldots, a_n\right) \\ &= V_n(a_1, \ldots, 0, \ldots, a_n) \\ &= V_n(a_1, \ldots, 0 \cdot a_i, \ldots, a_n) \\ &= 0 \cdot V_n(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n) = 0 \ . \end{aligned}$$

Za linearno nezavisne vektore $a_1, \ldots, a_n$ promatramo pomoćnu funkciju

$$F(a_1, \ldots, a_n) = \frac{V_n(a_1, \ldots, a_n) \cdot D(a_1, \ldots, a_n)}{|\,D(a_1, \ldots, a_n)\,|}. \tag{8.6}$$

Uočavamo da u tom slučaju funkcija F ima svojstva (i), (ii) $(\lambda \neq 0)$ i (iii).
Za linearno zavisne vektore $a_1, \ldots, a_n$ definiramo $F(a_1, \ldots, a_n) = 0$, pa i za takve skupove vektora funkcija F ima svojstva (i) i (ii) . No tada je prema prije dokazanom $F = D$, iz čega slijedi $V_n(a_1, \ldots, a_n) = |\,D(a_1, \ldots, a_n)\,|$. □

Definicija 50. *Neka je* $P^n(a_1, \ldots, a_n)$ n*-dimenzionalni paralelotop. Skalar* $|\,D(a_1, \ldots, a_n)\,|$, *gdje je* D *determinanta* , *naziva se* volumen paralelotopa $P^n(a_1, \ldots, a_n)$ *i označava sa*

$$V_n(a_1, \ldots, a_n) = |\,D(a_1, \ldots, a_n)\,| \ . \tag{8.7}$$

Propozicija 33. *Neka su* $A_0, A_1, \ldots, A_n$ *linearni nezavisne točke euklidskog prostora* $\mathcal{E}^n$. *Volumen* n*-dimenzionalnog paralelotopa* $P^n(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ *jednak je produktu udaljenosti* h *točke* A_n *od hiperravnine* Π^{n-1} *određene točkama* $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ *i volumena* $(n-1)$*-dimenzionalnog paralelotopa* $P^{n-1}(A_0, A_1, \ldots, A_{n-1})$ *u toj hiperravnini, odnosno*

$$V_n\left(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n}\right) = h \cdot V_{n-1}\left(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_{n-1}}\right). \tag{8.8}$$

Dokaz. Odaberimo ortonormirani koordinatni sustav $(O; e_1, \ldots, e_n)$ tako da je $O = A_0$ i $e_n \perp \overrightarrow{A_0A_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Vektori $e_1, \ldots, e_{n-1}$ određuju hiperravninu Π^{n-1}, pa možemo pisati

$$\overrightarrow{A_0A_i} = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{ik} e_k \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1 \ .$$

Ako je još $\overrightarrow{A_0A_n} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, imamo

$$D = \left(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n}\right) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1,n-1} & 0 \\ \hdotsfor{4} \\ \alpha_{n-1,1} & \ldots & \alpha_{n-1,n-1} & 0 \\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_n \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1,n-1} \\ \hdotsfor{3} \\ \alpha_{n-1,1} & \ldots & \alpha_{n-1,n-1} \end{vmatrix} .$$

Apsolutna vrijednost posljednje determinante jednaka je upravo volumenu paralelotopa $P^{n-1}(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_{n-1}})$.

Za nožište M okomice iz točke A_n na P^{n-1} vrijedi $\overrightarrow{A_0M} = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i$, pa je

$$\overrightarrow{MA_n} = \overrightarrow{A_0A_n} - \overrightarrow{A_0M} = \alpha_n e_n,$$

što ima za posljedicu $\mathrm{d}(M, A_n) = \|\alpha_n e_n\| = |\,\alpha_n\,|$. $\square$

Neka je sada u k-ravnini Π^k euklidskog prostora $\mathcal{E}^n$ zadan k-dimenzionalni paralelotop $P^k(a_1, \ldots, a_k)$. Za određivanje njegovog volumena nije potrebno poznavati koordinate vektora $a_1, \ldots, a_k$ s obzirom na neku ortonormiranu bazu ravnini Π^k pridruženog potprostora. Ako je, naime, $\{e_1, \ldots, e_k\}$ jedna takva baza, $a_i = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} e_j$, $i = 1, 2, \ldots, k$ i $\mathsf{A} = (\alpha_{ij})$, onda za volumen $V_k(a_1, \ldots, a_k)$ vrijedi

$$V_k^2(a_1, \ldots, a_k) = (\det \mathsf{A})^2 = \det(\mathsf{A}\mathsf{A}^*) = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \ldots & (a_1, a_k) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \ldots & (a_2, a_k) \\ \hdotsfor{4} \\ (a_k, a_1) & (a_k, a_2) & \ldots & (a_k, a_k) \end{vmatrix} .$$

Skalarni produkti (a_i, a_j) mogu se odrediti pomoću koordinata vektora s obzirom na bilo koju ortonormiranu bazu prostora U^n. Iz posljednje jednakosti neposredno slijedi

$$V_k(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \sqrt{\Gamma(a_1, a_2, \ldots, a_k)}. \tag{8.9}$$

Posebno, za $k = 2$, kao izraz za površinu paralelograma $P^2(a_1, a_2)$ dobiva se

$$V_2(a_1, a_2) = \sqrt{|\,a_1\,|^{\,2}\,|\,a_2\,|^{\,2} \begin{vmatrix} 1 & \cos\sphericalangle(a_1, a_2) \\ \cos\sphericalangle(a_1, a_2) & 1 \end{vmatrix}} = |\,a_1\,|\,|\,a_2\,| \sin\sphericalangle(a_1, a_2) .$$

Dokažimo sada dvije nejednakosti koje se odnose na volumen paralelepipeda.

Neka je u unitarnom prostoru U^n dan bilo koji vektor a i neki k-dimenzionalni potprostor W^k s bazom $\{a_1, \ldots, a_k\}$. Kao što znamo, vektor a se može na jednoznačan način prikazati u obliku $a = x + y$, $x \in W^k$, $y \perp W^k$. Tada je

$$(a, a) = (x + y, x + y) = (x, x) + (y, y) \geq (y, y) = \frac{\Gamma(a_1, \ldots, a_k, a)}{\Gamma(a_1, \ldots, a_k)},$$

pa slijedi

$$\Gamma(a_1,\ldots,a_k,a) \;\leq\; \Gamma(a_1,\ldots,a_k)\;\Gamma(a)\;. \tag{8.10}$$

Pri tom znak jednakosti vrijedi onda i samo onda ako je $a \perp a_1,\ldots,a_k$.
Iz (8.10) neposredno slijedi tzv. *Hadamardova nejednakost*

$$\Gamma(a_1,\ldots,a_k) \;\leq\; \Gamma(a_1)\,\Gamma(a_2)\;\cdots\;\Gamma(a_k)\;. \tag{8.11}$$

Na taj način smo, prema jednakosti (8.9), dokazali sljedeću tvrdnju.

Propozicija 34. *Volumen paralelotopa $P^k(a_1,a_2,\ldots,a_k)$ je manji ili najviše jednak produktu duljina njegovih bridova koji izlaze iz jednog vrha.*
Volumen je jednak tom produktu samo onda kada je $P^k(a_1,a_2,\ldots,a_k)$ k-dimenzionalni kvadar.

Standardni oblik Hadamardove nejednakosti dobije se ako se u (8.11) stavi $k=n$ i uvedu u razmatranja koordinate $\alpha_{1j},\ldots,\alpha_{nj}$ vektora a_j, $j=1,\ldots,n$ u nekoj ortonormiranoj bazi. Tada vrijedi nejednakost

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i1}^2\right)\cdots\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{in}^2\right)\;. \tag{8.12}$$

Dokažimo sada sljedeće poopćenje *Hadamardove nejednakosti.*

Teorem 10. *Neka su $a_1,\ldots,a_k$ vektori unitarnog prostora U^n. Tada vrijedi*

$$\Gamma(a_1,\ldots,a_k) \;\leq\; \Gamma(a_1,\ldots,a_j)\;\Gamma(a_{j+1},\ldots,a_k)\;. \tag{8.13}$$

Za $\Gamma(a_1,\ldots,a_j)\neq 0$, $\Gamma(a_{j+1},\ldots,a_k)\neq 0$ u (8.13) *vrijedi znak jednakosti ako i samo ako je svaki od vektora $a_1,\ldots,a_j$ okomit na svaki od vektora $a_{j+1},\ldots,a_k$.*

Dokaz. Dokaz ćemo provesti indukcijom po broju vektora, $a_{j+1},\ldots,a_k$.
Nejednakost vrijedi ako je taj broj jednak 1 jer se tada radi o nejednakosti (8.10).
Promatrajmo potprostore $W, W_1 \preceq U^n$ s bazama $\{a_1,\ldots,a_{k-1}\}$ i $\{a_{j+1},\ldots,a_{k-1}\}$. Očigledno je $W_1 \subset W$. Promatrajmo nadalje rastave:

$$\begin{aligned} a_k &= a_{W_1} + a_{N_1}\;, \qquad (a_{W_1}\in W_1, a_{N_1}\perp W_1)\,,\\ a_{N_1} &= a'_W + a_N\;, \qquad (a'_W \in W, a_N \perp W)\,. \end{aligned}$$

Slijedi

$$a_k = a_W + a_N\;, \qquad (a_W = a_{W_1} + a'_W, a_N\perp W).$$

Imajući u vidu jednakost (8.8) možemo pisati

$$\Gamma(a_1,\ldots,a_k) = \Gamma(a_1,\ldots,a_{k-1})\,\Gamma(a_N) \tag{8.14}$$

$$\Gamma\left(a_{j+1},\ldots,a_{k-1},a_k\right) = \Gamma\left(a_{j+1},\ldots,a_{k-1}\right)\Gamma(a_{N_1})\,. \tag{8.15}$$

Osim toga, iz rastava vektora a_{N_1} slijedi

$$\Gamma(a_N) \leq \Gamma(a_{N_1}). \tag{8.16}$$

Na temelju jednakosti (8.14),(8.15),(8.16) i pretpostavke indukcije dobivamo

$$\begin{aligned}
\Gamma(a_1,\ldots,a_k) &= \Gamma(a_1,\ldots,a_{k-1})\,\Gamma(a_N) \\
&\le \Gamma(a_1,\ldots,a_{k-1})\,\Gamma(a_{N_1}) \\
&\le \Gamma(a_1,\ldots,a_j)\,\Gamma(a_{j+1},\ldots,a_{k-1})\,\Gamma(a_{N_1}) \\
&= \Gamma(a_1,\ldots,a_j)\,\Gamma(a_{j+1},\ldots,a_k)\ .
\end{aligned} \tag{8.17}$$

Dobili smo nejednakost (8.13). Odredimo kada u njoj vrijedi znak jednakosti. Uzmimo da je $\Gamma(a_1,\ldots,a_j) \neq 0,\ \ \Gamma(a_{j+1},\ldots,a_k) \neq 0$.
Tada je prema (8.15) i $\Gamma(a_{j+1},\ldots,a_{k-1}) \neq 0$ i $\Gamma(a_{N_1}) \neq 0$.
S druge strane, u (8.17) svugdje vrijedi znak jednakosti ako je $a_{N_1} = a_N$ i svaki od vektora $a_{j+1},\ldots,a_{k-1}$ okomit je na vektore $a_1,\ldots,a_j$.
Tada je i vektor

$$a_k = a_{W_1} + a_{N_1} = a_{W_1} + a_N.$$

okomit na vektore $a_1,\ldots,a_j$.
Prema tome, znak jednakosti vrijedi u (8.13) ako i samo ako je svaki od vektora $a_1,\ldots,a_j$ okomit na svaki od vektora $a_{j+1},\ldots,a_k$ ili ako je vrijednost barem jedne od determinanti $\Gamma(a_1,\ldots,a_j)$, $\Gamma(a_{j+1},\ldots,a_k)$ jednaka nuli. □

Geometrijsko značenje nejednakosti (8.13) daje sljedeća tvrdnja.

Korolar 8. *Volumen paralelotopa manji je ili najviše jednak produktu volumena dviju njegovih komplementarnih strana.*
Volumen je jednak tom produktu ako i samo ako su te strane međusobno okomite ili je volumen bar jedne od njih jednak nuli.

8.2 Volumen simpleksa

Neka su $A_0, A_1, \ldots, A_n$ točke euklidskog prostora $\mathcal{E}^n$. Volumen simpleksa $S^n(A_0,\ldots,A_n)$ izrazit ćemo pomoću volumena paralelotopa $P^n(A_0,\ldots,A_n)$.
Za $n=1$ skupovi $S^1(A_0,A_1)$ i $P^1(A_0,A_1)$ se podudaraju.
Pretpostavit ćemo da je volumen simpleksa S^n jednak

$$c_n V_n(P^n) = c_n V_n(\overrightarrow{A_0A_1},\ldots,\overrightarrow{A_0A_n})\ ,$$

pri čemu skalar c_n treba ovisiti samo o dimenziji n. Za određivanje skalara c_n, a time i volumena simpleksa S^n, rastavit ćemo paralelotop P^n na $n!$ n-simpleksa sa sljedećim svojstvima:

a) P^n se sastoji od točaka koje pripadaju najmanje jednom n-simpleksu ;

b) dva različita n-simpleksa imaju zajedničke samo neke rubne točke ;

c) svaki n-simpleks ima volumen $c_n V_n(P^n)$.

Iz svojstva c) slijedi $\quad n!\,c_n V_n(P^n) = V_n(P^n)$, tj. $\quad c_n = \dfrac{1}{n!}$.
Na taj način dobivamo jednakost za volumen n-simpleksa

$$V_n(S^n) = \frac{1}{n!}\left|\, D(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})\,\right| \tag{8.18}$$

Pokažimo sada kako možemo dobiti $n!$ n-simpleksa s gornjim svojstvima. Neka je $A_0 = O$ i $\overrightarrow{A_0A_i} = a_i$, $i = 1, \ldots, n$.
Radijus-vektori vrhova politopa $P^n(A_0, \ldots, A_n)$ različitih od A_0 su

$$\sum_{\nu=1}^{k} a_{i_\nu}\,, \quad 1 \le k \le n\,, \quad 1 \le i_\nu \le n\,, \quad i_\nu \ne i_\mu \ \text{ za } \ \nu \ne \mu\ .$$

Označimo ove vrhove sa $A_{i_1,\ldots,i_k}$.
Za svaku od $n!$ permutacija $\begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ i_1 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$ promatramo n vektora

$$a'_k = \sum_{\nu=1}^{k} a_{i_\nu}\,, \qquad k = 1, \ldots, n\ .$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} D(\,a'_1, \ldots, a'_n) &= D(\,a_{i_1}, a_{i_1} + a_{i_2}\,,\ \ldots\ , a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_n}) = \\ &= D(\,a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}) = (-1)^{I(i_1,\ldots,i_n)} D(a_1, \ldots, a_n)\ , \end{aligned}$$

pri čemu s $I(i_1, \ldots, i_n)$ označujemo broj inverzija permutacije $(i_1, \ldots, i_n)$. Točke A_0, A_{i_1}, $A_{i_1 i_2}, \ldots, A_{i_1 \ldots i_n}$ određuju, dakle, n-simpleks $S^n_{i_1\ldots i_n}$ s volumenom $c_n V_n(P^n)$. Time je dokazano svojstvo c).

Za dokaz svojstava a) i b) prikažimo radijus-vektor r točke T na dva načina

$$r = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i a'_i\ . \tag{8.19}$$

Iz

$$\sum_{k=1}^{n} x'_k a'_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{k} x'_k a_{i_\nu} = \sum_{\nu=1}^{n}(\sum_{k=\nu}^{n} x'_k) a_{i_\nu}$$

slijedi

$$x_{i_\nu} = \sum_{k=\nu}^{n} x'_k\ , \quad \nu = 1, \ldots, n\ . \tag{8.20}$$

Točka T pripada simpleksu $S^n_{i_1\ldots i_n}$ ako je

$$x'_k \ge 0\ , \quad k = 1, \ldots\ n\ , \qquad \sum_{k=1}^{n} x'_k \le 1\ . \tag{8.21}$$

Prema (8.20) slijedi

$$0 \le\ x_{i_n} \le x_{i_{n-1}} \le \ldots \le x_{i_1} \le 1, \tag{8.22}$$

pa možemo zaključiti da svaka točka n-simpleksa $S^n_{i_1\dots i_n}$ pripada n paralelotopu $P^n(A_0,\dots,A_n)$. Obratno, za svaku točku $T\in P^n$ može se odrediti permutacija $\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ tako da vrijedi (8.22), tj. tako da je $T\in S^n_{i_1\dots i_n}$. Ova permutacija nije jednoznačno određena samo onda kad postoje različiti indeksi i i k takvi da je $x_i = x_k$. Međutim, tada u (8.22), a time i u (8.21) vrijedi najmanje jedan znak jednakosti, pa je T rubna točka simpleksa $S^n_{i_1\dots i_n}$.

Ako je $\mathcal{E}^n$ orijentiran prostor, izraz $\dfrac{1}{n!}\,D(\overrightarrow{A_0A_1},\dots,\overrightarrow{A_0A_n})$ ima značenje neovisno o izboru koordinatnog sustava i on je ili jednak volumenu simpleksa S^n s vrhovima $A_0,\dots,A_n$ ili vrijednosti tog volumena sa suprotnim predznakom, već prema tome daje li redoslijed vrhova $A_0,\dots,A_n$ istaknutu orijentaciju ili ne. Taj se izraz naziva *orijentirani volumen n-simpleksa* orijentiranog redoslijedom $A_0,\dots,A_n$ svojih vrhova i označava sa $\widetilde{V}_n(S^n(A_0,\dots,A_n))$.

Ako je $A_j = (\alpha^j_1,\dots,\alpha^j_n)$, $j=1,\dots,n$, tada je

$$a_i = \overrightarrow{A_0A_i} = [\alpha^i_1-\alpha^0_1,\dots,\alpha^i_n-\alpha^0_n], \quad i=1,\dots,n,$$

pa je

$$\widetilde{V}_n(S^n(A_0,\dots,A_n)) = \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} 1 & \alpha^0_1 & \dots & \alpha^0_n \\ 1 & \alpha^1_1 & \dots & \alpha^1_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha^n_1 & \dots & \alpha^n_n \end{vmatrix}. \tag{8.23}$$

Formula (8.23) izražava volumen n-simpleksa pomoću koordinata njegovih vrhova.

Na temelju dosadašnjih razmatranja jednostavno se određuje volumen k-dimenzionalnog simpleksa $S^n(A_0,\dots,A_n)$ u ravnini Π^k.
Formule (8.18) i (8.20) odmah daju

$$V_k(S^k(A_0,\dots,A_k)) = \frac{1}{k!}\sqrt{\Gamma(a_1,\dots,a_k)}\,. \tag{8.24}$$

Može se koristiti i jednakost (8.23). U tom slučaju potrebno je poznavati koordinate vrhova $A_0,\dots,A_k$ simpleksa S^k u nekoj ortonormiranoj bazi potprostora $W^k \preceq U^n$.
Ako je $A_j = (\alpha^j_1,\dots,\alpha^j_k)$, $j=1,\dots,k$, tada je

$$\widetilde{V}_k(S^k) = \frac{1}{k!}\begin{vmatrix} 1 & \alpha^0_1 & \dots & \alpha^0_k \\ 1 & \alpha^1_1 & \dots & \alpha^1_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha^k_1 & \dots & \alpha^k_k \end{vmatrix}. \tag{8.25}$$

Pomoću jednakosti (8.25) izvest ćemo formulu koja izražava volumen k-simpleksa S^k pomoću duljina njegovih bridova. U tu svrhu transformiramo determinantu u jednakosti (8.25) na sljedeći način

$$\widetilde{V}_k(S^k) = \frac{1}{k!}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha^0_1 & \dots & \alpha^0_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \alpha^k_1 & \dots & \alpha^k_k \end{vmatrix} = -\frac{1}{k!}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \alpha^0_1 & \dots & \alpha^0_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \alpha^k_1 & \dots & \alpha^k_k \end{vmatrix}.$$

Množenjem jednakosti

$$\widetilde{V}_k(S^k) = \frac{1}{k!}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_1^0 & \dots & \alpha_k^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \alpha_1^k & \dots & \alpha_k^k \end{vmatrix}$$

i

$$\widetilde{V}_k(S^k) = -\frac{1}{k!}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_1^0 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \alpha_k^0 & \alpha_k^1 & \dots & \alpha_k^k \end{vmatrix},$$

uz primjenu Binet-Cauchyjevog teorema [1] slijedi

$$V_k^2(S^k) = -\frac{1}{(k!)^2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & (\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_0}) & (\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_1}) & \dots & (\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_k}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (\overrightarrow{OA_k}, \overrightarrow{OA_0}) & (\overrightarrow{OA_k}, \overrightarrow{OA_1}) & \dots & (\overrightarrow{OA_k}, \overrightarrow{OA_k}) \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{(k!)^2(-2)^k}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -2(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_0}) & -2(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_1}) & \dots & -2(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_k}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -2(\overrightarrow{OA_k}, \overrightarrow{OA_0}) & -2(\overrightarrow{OA_k}, \overrightarrow{OA_1}) & \dots & -2(\overrightarrow{OA_k}, \overrightarrow{OA_k}) \end{vmatrix}.$$

Množenjem prvog retka i prvog stupca sa $\overrightarrow{OA_0}^2, \dots, \overrightarrow{OA_k}^2$ i dodavanjem redom ostalim recima i stupcima, te pomoću jednakosti

$$\overrightarrow{OA_i}^2 + \overrightarrow{OA_j}^2 - 2(\overrightarrow{OA_i}, \overrightarrow{OA_j}) = (\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OA_j})^2 = \mathrm{d}^2(A_i, A_j)$$

dobivamo

$$V_k{}^2(S^k) = -\frac{(-1)^{k-1}}{2^k(k!)^2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \mathrm{d}^2(A_0A_0) & \mathrm{d}^2(A_0A_1) & \dots & \mathrm{d}^2(A_0A_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \mathrm{d}^2(A_kA_0) & \mathrm{d}^2(A_kA_1) & \dots & \mathrm{d}^2(A_kA_k) \end{vmatrix}.$$

Posebno, ako je S^k pravilni k-simpleks, tj. simpleks kojem su bridovi jednake duljine a, imamo

$$V_k{}^2(S^k) = -\frac{(-1)^{k-1}}{2^k(k!)^2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & \dots & a^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a^2 & a^2 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \frac{(k+1)\,a^{2k}}{2^k(k!)^2},$$

odakle slijedi

$$V_k(S^k) = \frac{a^k}{k!}\sqrt{\frac{k+1}{2^k}}.$$

[1] Za kvadratne matrice A i B istog reda vrijedi jednakost $\det A \, \det B = \det AB$.

Tako npr. za površinu jednakostraničnog trokuta S^2 vrijedi

$$V_2(S^2) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad ,$$

a za volumen pravilnog tetraedra S^3

$$V_3(S^3) = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \quad .$$

8.3 Politopi i Eulerova formula

Politop u prostoru $\mathcal{E}^4$ definira se kao unija konačno mnogo poliedara u hiperravninama toga prostora za koje vrijedi:

a) Bilo koja 2-strana svakog od tih poliedara je 2-strana još točno jednog poliedra.

b) Za bilo koje dvije 3-strane Δ_0 *i* Δ_{k+1} moguće je naći lanac 3-strana $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ tako da je Δ_0 susjedna sa Δ_1, Δ_1 susjedna sa $\Delta_2, \ldots,$ Δ_k susjedna sa Δ_{k+1}.

c) Ako strane Δ_0 i Δ_{k+1} imaju zajednički vrh A, moguć je takav izbor 3-strana $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ da sve one imaju zajednički vrh A.

Na analogan način definiraju se politopi u prostorima $\mathcal{E}^5$, $\mathcal{E}^6$ itd. sve do $\mathcal{E}^n$. Od posebnog interesa za nas su kao i do sada konveksni politopi.

Neka je Π konveksni politop i N_k^n broj njegovih k-dimenzionalnih strana. Tada vrijedi sljedeća *Eulerova formula*

$$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)N_k^n = 1 + (-1)^{n-1} \ . \tag{8.26}$$

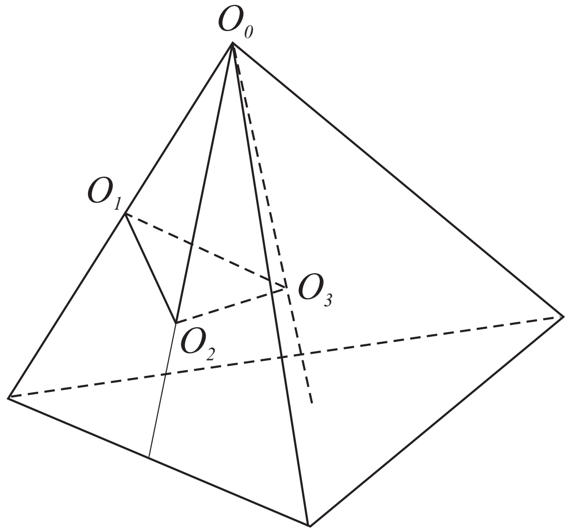
Primijetimo da je formula (8.26) ispunjena za $n = 1$ i $n = 2$ na trivijalan način. U prvom slučaju radi se o segmentu, pa je $N_0^1 = 2$, a formula poprima oblik $N_0^1 = 2 = 1 + 1$. U drugom slučaju radi se o l-terokutu, pa je $N_0^2 = N_1^2 = l$, a formula poprima oblik $N_0^2 - N_1^2 = l - l = 1 + (-1)^1 = 0$.
Dokaz formule (8.26) za $n > 2$ nije jednostavan pa ga nećemo provoditi.

Primijetimo još samo da smo valjanost formule (8.26) za paralelotope i simplekse dokazali ranije.

Definicija 51. Vršna figura *nekog vrha konveksnog politopa je konveksni politop određen polovištima bridova koji izlaze iz tog vrha.*

Pravilni politopi u $\mathcal{E}^2$ su pravilni poligoni, a pravilni politopi u $\mathcal{E}^3$ su pravilni poliedri.

Definicija 52. Pravilni n-dimenzionalni politop *je konveksni politop u* $\mathcal{E}^n$ *čije su sve* $(n-1)$-*strane i sve vršne figure pravilni* $(n-1)$-*dimenzionalni politopi.*



Slika 8.3: Karakteristični simpleks tetraedra

Schläflijevim simbolom (p_1, p_2) označavamo pravilni poliedar u $\mathcal{E}^3$ čije su 2-strane pravilni p_1-terokuti, a vršne figure pravilni p_2-terokuti. Općenito, Schläflijevim simbolom $(p_1, \ldots, p_{n-1})$ označavamo pravilni n-politop čije su $(n-1)$-strane pravilni $(n-1)$-politopi sa Schläflijevim simbolom $(p_1, \ldots, p_{n-2})$, a vršne figure pravilni $(n-1)$-politopi sa Schläflijevim simbolom $(p_2, \ldots, p_{n-1})$.

Svakom pravilnom n-politopu pridružujemo n-simpleks čiji su vrhovi težište O_n tog politopa i težišta O_p p-dimenzionalnih strana koje su sadržane jedna u drugoj, $p = n-1, n-2, \ldots, 0$ (O_0 je vrh politopa). Taj simpleks zove se *karakteristični simpleks* pravilnog n-politopa.

Primijetimo da je kut $\sphericalangle O_0O_2O_1$ jednak $\dfrac{\pi}{p_1}$, a kut $\sphericalangle O_1O_3O_2$ u 2-strani vršne figure politopa jednak $\dfrac{\pi}{p_2}$. Sasvim analogno se pokazuje da je svaki kut $\sphericalangle O_{k-1}O_{k+1}O_k$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, jednak $\dfrac{\pi}{p_k}$, a svi ostali kutovi 2-dimenzionalnih strana simpleksa $S^n(O_0, \ldots, O_n)$ su pravi. Zato su različiti od $\dfrac{\pi}{2}$ samo kutovi $(n-1)$-strana $S^{n-1}(O_0, O_1, \ldots, O_{k-1}, O_{k+1}, \ldots, O_n)$ i $S^{n-1}(O_0, O_1, \ldots, O_{k-2}, O_k, \ldots, O_n)$ toga simpleksa za $k = 1, 2, \ldots, n-1, n$. Označimo sa u_{k_i} jedinični vektor koji je okomit na $(n-1)$-stranu $S^{n-1}(O_0, O_1, \ldots, O_{k_i-1}, O_{k_i+1}, \ldots, O_n)$ karakterističnog simpleksa. Tada je

$$(u_o, u_1) = \cos\frac{\pi}{p_1}\ , \quad (u_1, u_2) = \cos\frac{\pi}{p_2}\ , \ \ldots\ , \ (u_{n-2}, u_{n-1}) = \cos\frac{\pi}{p_{n-1}}\ .$$

Budući da su vektori $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ linearno nezavisni, vrijedi

$$\Gamma(u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) = \begin{vmatrix} 1 & \cos\frac{\pi}{p_1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cos\frac{\pi}{p_1} & 1 & \cos\frac{\pi}{p_2} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{p_2} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \cos\frac{\pi}{p_{n-1}} & 1 \end{vmatrix} > 0\ . \qquad (8.27)$$

Za $n = 2$ nejednakost (8.27) poprima oblik

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\frac{\pi}{p} \\ \cos\frac{\pi}{p} & 1 \end{vmatrix} = \sin^2\frac{\pi}{p} > 0 \ . \tag{8.28}$$

Ona je ispunjena za sve cijele brojeve $p \geq 3$, a to odgovara egzistenciji pravilnih p-terokuta za bilo koji $p \geq 3$.

Za $n = 3$, uz oznake $p_1 = p$, $p_2 = q$, nejednakost (8.27) poprima oblik

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\frac{\pi}{p} & 0 \\ \cos\frac{\pi}{p} & 1 & \cos\frac{\pi}{q} \\ 0 & \cos\frac{\pi}{q} & 1 \end{vmatrix} > 0 \ , \qquad \text{tj.} \qquad \cos^2\frac{\pi}{p} + \cos^2\frac{\pi}{q} < 1 \ . \tag{8.29}$$

Ona je ispunjena samo u pet slučajeva: $(3,3)$, $(4,3)$, $(3,4)$, $(5,3)$ i $(3,5)$, pa postoji točno pet pravilnih poliedara.

Karakteristike tih pravilnih poliedara dane su u sljedećoj tablici.

	N_0^3	N_1^3	N_2^3	Schläflijev simbol
tetraedar	4	6	4	(3,3)
kocka	8	12	6	(4,3)
oktaedar	6	12	8	(3,4)
dodekaedar	20	30	12	(5,3)
ikosaedar	12	30	20	(3,5)

Za $n = 4$, uz oznake $p_1 = p$, $p_2 = q$, $p_3 = r$ nejednakost (8.27) poprima oblik

$$\sin\frac{\pi}{p}\ \sin\frac{\pi}{r}\ >\ \sin\frac{\pi}{q} \ . \tag{8.30}$$

Ona je ispunjena samo u šest slučajeva:
$(3,3,3)$, $(3,3,4)$, $(4,3,3)$, $(3,4,3)$, $(3,3,5)$, $(5,3,3)$.

Karakteristike tih pravilnih poliedara dane su u sljedećoj tablici:

	N_0^4	N_1^4	N_2^4	N_3^4	Schläflijev simbol
p simpleks	5	10	12	5	(3,3,3)
hiperkocka	16	32	24	8	(4,3,3)
hiperoktaedar	8	24	32	16	(3,3,4)
	24	90	96	24	(3,4,3)
	600	1200	720	120	(5,3,3)
	120	720	1200	600	(3,3,5)

Za $n > 4$, nejednakost (8.27) je ispunjena samo u tri slučaja:

$(3,3,\ldots,3,3)$	pravilni n-simpleks
$(4,3,\ldots,3,3)$	n-dimenzionalna kocka
$(3,3,\ldots,3,4)$	n-dimenzionalni oktaedar

Ovi pravilni politopi prostora $\mathcal{E}^n$, $n > 3$ prirodna su poopćenja poliedara $(3,3)$, $(4,3)$, $(3,4)$.

Poglavlje 9

Preslikavanja euklidskog prostora – izometrije

Odredimo sva preslikavanja $f : \mathcal{E}^n \to \mathcal{E}^n$ koja čuvaju metriku u metričkom prostoru $\mathcal{E}^n$.

Definicija 53. *Preslikavanje f prostora $\mathcal{E}^n$ u $\mathcal{E}^n$ zove se* izometrija *prostora $\mathcal{E}^n$ ako ono čuva udaljenost točaka, odnosno ako za sve $A, B \in \mathcal{E}^n$ vrijedi*

$$\mathrm{d}(f(A), f(B)) = \mathrm{d}(A, B). \tag{9.1}$$

Svaka izometrija je injekcija (naime, iz $A \neq B$ slijedi $\mathrm{d}(A, B) > 0$ i zato je neposredno $\mathrm{d}(f(A), f(B)) > 0$, tj. $f(A) \neq f(B)$).

Pokažimo da je svaka izometrija afino preslikavanje. Zbog $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{f(A)f(B)}\|$ operator u pridružen izometriji $f : \mathcal{E}^n \to \mathcal{E}^n$ je unitaran. Budući da je u unitaran operator na realnom vektorskom prostoru, u je ortogonalan operator. Ortogonalni operatori su bijekcije, pa je svaka izometrija bijekcija.

Jedno od svojstava skupa svih izometrija prostora $\mathcal{E}^n$ daje sljedeći teorem.

Teorem 11. *Skup svih izometrija prostora $\mathcal{E}^n$ tvori grupu s kompozicijom izometrija kao grupovnom operacijom.*

Dokaz. Neka su f, g bilo koje dvije izometrije. Tada je i preslikavanje $g \circ f$ izometrija, jer za sve $A, B \in \mathcal{E}^n$ vrijedi

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\left((g \circ f)(A), (g \circ f)(B)\right) &= \mathrm{d}\left(g(f(A)), g(f(B))\right) \\ &= \mathrm{d}\left(f(A), f(B)\right) = \mathrm{d}(A, B). \end{aligned}$$

Nadalje je preslikavanje $i : \mathcal{E}^n \to \mathcal{E}^n$ koje ima svojstvo da je $i(A) = A$ za svaku točku A također izometrija prostora $\mathcal{E}^n$.

Budući da je svaka izometrija f bijekcija, postoji inverzno preslikavanje f^{-1}. Ono je izometrija, jer za sve $A, B \in \mathcal{E}^n$ vrijedi

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\left(f^{-1}(A), f^{-1}(B)\right) &= \mathrm{d}\left(f(f^{-1}(A)), f(f^{-1}(B))\right) \\ &= \mathrm{d}\left(i(A), i(B)\right) = \mathrm{d}(A, B). \end{aligned}$$

□

Ako je $\mathsf{U} = (u_{ij})$ matrica operatora u pridruženog izometriji f, tada definiramo $\det f = \det u = \det \mathsf{U}$. Veza između koordinata točke $A(x_1, \ldots, x_n)$ i koordinata točke $f(A) = A'(x_1', \ldots, x_n')$ može se zapisati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \ldots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix},$$

gdje je $f(O) = O'(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
Kako je matrica U ortogonalna, to je kao što znamo, $\det \mathsf{U} = \pm 1$.

Sada možemo uvesti pojam sukladnosti skupova točaka.

Definicija 54. *Bilo koji podskup $F \subseteq \mathcal{E}^n$ naziva se* figura*. Za figure F_1 i F_2 kažemo da su* sukladne *i pišemo $F_1 \cong F_2$ ako postoji izometrija f prostora $\mathcal{E}^n$ sa svojstvom da je $F_2 = f(F_1)$.*

Sukladnost je relacija ekvivalencije na skupu $\mathcal{P}(\mathcal{E}^n)$ svih figura. [1]

9.1 Pomaci

Definicija 55. *Svaka izometrija $f : \mathcal{E}^n \to \mathcal{E}^n$ euklidskog prostora $\mathcal{E}^n$ sa svojstvom da je $\det f = 1$ naziva se* pomak *euklidskog prostora $\mathcal{E}^n$.*

Teorem 12. *Skup svih pomaka euklidskog prostora $\mathcal{E}^n$ tvori grupu s obzirom na kompoziciju kao grupovnu operaciju.*

Dokaz. Neka su f_1 i f_2 bilo koja dva pomaka, a u_1 i u_2 pripadni unitarni operatori. Tada iz $\det u_1 = 1$ i $\det u_2 = 1$ slijedi $\det(u_1 \circ u_2) = 1$.
S druge strane, izometriji $f = f_1 \circ f_2$ pripada unitarni operator $u = u_1 \circ u_2$. Dakle, vrijedi i $\det f = 1$.
Nadalje, ako je f pomak, pomak je i f^{-1}. Identitet i je također pomak. Time je teorem dokazan. □

9.2 Translacije

Translaciju afinog prostora $\mathcal{A}^n$ definirali smo kao afino preslikavanje $f_a : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}^n$ kojemu je pridruženi linearni operator $f : V^n \to V^n$ identitet (definicija 30).

Nije teško dokazati da za translacije vrijedi:

Propozicija 35. *Translacija $t : \mathcal{E}^n \to \mathcal{E}^n$ euklidskog prostora je izometrija i vrijedi*

a) translacija t svaki pravac Π^1 preslikava u pravac $t(\Pi^1)$ paralelan sa Π^1,
b) ako postoji točka $A \in \mathcal{E}^n$ takva da je $t(A) = A$, tada je $t(P) = P$ za svaku točku $P \in \mathcal{E}^n$.

[1] Dio matematike koji proučava svojstva figura euklidskog prostora $\mathcal{E}^n$ koja su invarijantna s obzirom na sve izometrije zove se *euklidska geometrija*. Pritom kažemo da je tvrdnja o figurama $F_1, \ldots, F_k$ *invarijantna* ako ona vrijedi i za figure $f(F_1), \ldots, f(F_k)$ za svaku izometriju f.

Vrijedi i obrat prethodne propozicije:

Propozicija 36. *Izometrija $t : \mathcal{E}^n \to \mathcal{E}^n$ za koju vrijedi:*

a) preslikavanje t svaki pravac Π^1 preslikava u pravac $t(\Pi^1)$ paralelan sa Π^1,
b) ako postoji točka $A \in \mathcal{E}^n$ takva da je $t(A) = A$, tada je $t(P) = P$ za svaku točku $P \in \mathcal{E}^n$

je translacija euklidskog prostora.

Dokaz se provodi tako da se pokaže da je izometriji t pridružen jedinični operator i, pa je prema definiciji 30. to preslikavanje translacija.

Sve translacije tvore komutativnu grupu. Ta grupa se zove grupa translacija prostora $\mathcal{E}^n$ i ona je podgrupa grupe svih pomaka prostora $\mathcal{E}^n$.

Izometriji f koja ima svojstvo da je $f(\Pi^1)$ pravac paralelan s pravcem Π^1 za svaki $\Pi^1 \in \mathcal{E}^n$ i koja nije identitet, pripada unitaran operator u za kojeg je $u(x) = x$ ili $u(x) = -x$, za svaki $x \in \mathcal{E}^n$. U prvom slučaju f je translacija, a u drugom postoji jedna točka S takva da je $f(S) = S$. Tada f nazivamo centralnom simetrijom, a točku S središtem centralne simetrije.

Definicija 56. *Izometrija f takva da joj pripada unitaran operator u za kojeg je $u(x) = -x$, za svaki $x \in \mathcal{E}^n$, zove se* centralna simetrija.

Centralne simetrije ne tvore grupu, što pokazuje sljedeća tvrdnja.

Propozicija 37. *Kompozicija dviju centralnih simetrija je translacija.*

Dokaz. Neka su f_1 i f_2 centralne simetrije sa središtima S_1 i S_2, a u_1 i u_2 pripadni unitarni operatori. Tada je $f = f_2 \circ f_1$ izometrija. Označimo li sa u unitaran operator koji pripada izometriji f, tada zbog $u_1 = -i$ i $u_2 = -i$ je $u = i$. Prema tome je f translacija. □

Propozicija 38. *Svaka se translacija t_a za vektor $a \in \mathcal{U}$ može prikazati kao kompozicija dviju centralnih simetrija.*

Dokaz. Neka je S_1 čvrsta točka u $\mathcal{E}^n$. Tada postoji jedinstvena točka S_2 takva da je $\overrightarrow{S_1S_2} = \frac{1}{2}a$. Neka su f_1 i f_2 centralne simetrije s obzirom na S_1 i S_2. Tada je $t_a = f_2 \circ f_1$. □

9.3 Rotacije

Definicija 57. Rotacija *prostora $\mathcal{E}^n$ je pomak f tog prostora koji ima bar jednu fiksnu točku. Tu točku nazivamo* središte rotacije.

Neka je O fiksna točka rotacije $f : \mathcal{E}^n \to \mathcal{E}^n$, tj. $f(O) = O$. Tada iz $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OO'} + u(\overrightarrow{OP})$, $P' = f(P)$, zbog $\overrightarrow{OO'} = \theta$ zaključujemo da je rotacija f određena sa

$$\overrightarrow{OP'} = u(\overrightarrow{OP}). \tag{9.2}$$

Pritom je u unitaran operator i $\det u = 1$.

Kako se bilo koji pomak $f : \mathcal{E}^n \to \mathcal{E}^n$ uz izbor čvrste točke O opisuje jednakošću

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OO'} + u(\overrightarrow{OP}), \quad P' = f(P),$$

s vektorom $\overrightarrow{OO'} \in U^n$ i unitarnim operatorom u, $\det u = 1$, zaključujemo da je svaki pomak f kompozicija rotacije sa središtem O i translacije prostora za vektor $a = \overrightarrow{OO'}$.

Teorem 13. *Sve rotacije euklidskog prostora sa zajedničkim središtem rotacije tvore grupu s kompozicijim kao grupovnom operacijom.*
Svaki pomak euklidskog prostora $\mathcal{E}^n$ je kompozicija dviju rotacija.
Samo je u euklidskom prostoru $\mathcal{E}^2$ svaki pomak ili rotacija ili translacija.

Dokaz. Prvi dio tvrdnje teorema lako se pokazuje pomoću jednakosti (9.2).

Dokažimo drugu tvrdnju.
Neka je f bilo koji pomak u $\mathcal{E}^n$. Za čvrstu točku O_1 postoji vektor a i unitarni operator u, $\det u = 1$, takav da je

$$\overrightarrow{O_1P'} = a + u(\overrightarrow{O_1P}), \quad P' = f(P).$$

Pokažimo da postoje dvije rotacije, rotacija f_1 oko točke O_1 određena operatorom u_1 i rotacija f_2 oko neke točke O_2 koja je određena unitarnim operatorom u_2, takve da je $f = f_1 \circ f_2$.
Vrijedi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O_1f_1(P)} &= u_1(\overrightarrow{O_1P}),\\ \overrightarrow{O_2f_2(P)} &= u_2(\overrightarrow{O_2P}),\end{aligned}$$

pa uz oznaku $b = \overrightarrow{O_1O_2}$ dobivamo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O_1f_2(P)} &= \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2f_2(P)}\\ &= b + u_2(\overrightarrow{O_2P}) = b + u_2(\overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{O_1P})\\ &= b + u_2(\overrightarrow{O_1P} - b).\end{aligned}$$

S jedne strane je

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O_1f_2(f_1(P))} &= b - u_2(b) + u_2(\overrightarrow{O_1f_1(P)})\\ &= b - u_2(b) + u_2(u_1(\overrightarrow{O_1P})),\end{aligned}$$

a s druge

$$\overrightarrow{O_1f(P)} = a + u(\overrightarrow{O_1P}).$$

Da bi vrijedilo $f = f_1 \circ f_2$ nužno je i dovoljno da za svaki vektor $x \in U^n$ vrijedi

$$a + u(x) = b - u_2(b) + (u_2 \circ u_1)(x)$$

što je ekvivalentno s uvjetima

$$a = (i - u_2)(b), \quad u = u_2 \circ u_1, \tag{9.3}$$

gdje je i identično preslikavanje, za koje znamo da je unitaran operator.

Rastavljanje pomaka f na rotacije f_1 i f_2 je moguće ako je moguće za zadani vektor a i unitaran operator u odrediti vektor b i unitarne operatore u_1 i u_2 takve da vrijedi (9.3).
Ako je $a = \theta$, tada je f rotacija oko točke O_1 kako smo i tražili.
Pretpostavimo stoga da je $a \neq \theta$ i $n > 2$.
Neka je $a' \neq \theta$, $a \perp a'$ i neka je W^2 potprostor razapet vektorima a i a'. U prostoru W^2 definiramo unitaran operator $u_0 \neq i$ na sljedeći način

$$u_0(e) = \cos\varphi\, e - \sin\varphi\, e'$$
$$u_0(e') = \sin\varphi\, e + \cos\varphi\, e'$$

gdje je $e = \dfrac{a}{\|a\|}$, $e' = \dfrac{a'}{\|a'\|}$, $0 < \varphi < 2\pi$.
Lako se vidi da je $i - u_0$ regularan operator na W^2, budući da je

$$\det(i - u_0) = 2(1 - \cos\varphi) \neq 0.$$

Tada je $(i - u_0)^{-1}(a) = b$ vektor u W^2 i vrijedi $(i - u_0)(b) = a$.

Označimo s u_2 linearni operator koji se na W^2 podudara sa u_0, a za $x \perp W^2$ je $u_2(x) = x$. Tada je u_2 unitaran operator i $a = (i - u_2)(b)$. Za unitarne operatore u_2 i u definiramo unitaran operator u_1 sa $u_1 = u_2^{-1} \circ u$. Zatim, pomoću točke O_1 za koju je $\overrightarrow{O_1 f(P)} = a + u(\overrightarrow{O_1P})$, definiramo rotacije

$$f_1 \;\ldots\; \overrightarrow{O_1 f_1(P)} = u_1(\overrightarrow{O_1P}),$$
$$f_2 \;\ldots\; \overrightarrow{O_1 f_2(P)} = b + u_2(\overrightarrow{O_1P} - b).$$

Tada je $f = f_2 \circ f_1$.
Ako je $n = 2$, tada je $u_2 = u_0$.

Dokažimo sada i posljednji dio tvrdnje teorema.
Neka je $n = 2$ i $\overrightarrow{OP'} = a + u(\overrightarrow{OP})$, $P' = f(P)$ pomak zadan pomoću vektora $a = \overrightarrow{OO'}$ i unitarnog operatora u.
Ako je $u = i$, f je translacija za vektor a.
Ako je $u \neq i$, tada je zbog $\det u = 1$ operator $i - u$ regularan i jednadžba $x = a + u(x)$ ima rješenje $x = (i - u)^{-1}(a)$.
Za vektor x postoji točka Q takva da je $x = \overrightarrow{OQ}$. Tada je

$$\overrightarrow{OQ'} = a + u(\overrightarrow{OQ}) = a + u(x) = x = \overrightarrow{OQ},$$

što povlači $Q = Q' = f(Q)$. Dakle, pomak f ima fiksnu točku, pa je to rotacija sa središtem Q.

Da za $n > 2$ tvrdnja ne vrijedi pokazuje sljedeći primjer.
U sustavu $(O; x_1, x_2, x_3)$ prostora $\mathcal{E}^3$, ako je rotacija f_1 sa središtem O zadana jednakostima:

$$x_1' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 - x_3)$$
$$x_2' = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + x_3)$$
$$x_3' = x_2$$

a rotacija f_2 sa središtem u točki $(1,0,0)$ zadana jednakostima:

$$\begin{aligned} x_1' &= 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 - 1 - x_2) \\ x_2' &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 - 1 + x_2) \\ x_3' &= x_3 \end{aligned}$$

tada je funkcija $f = f_2 \circ f_1$ određena jednakostima:

$$\begin{aligned} x_1' &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + x_1 \\ x_2' &= -\frac{1}{\sqrt{2}} - x_3 \\ x_3' &= x_2 \ . \end{aligned}$$

Lako se pokazuje da f nije ni translacija ni rotacija. □

9.4 Simetrije

Definicija 58. *Neka je Π^{n-1} hiperravnina prostora $\mathcal{E}^n$.*
Izometrija $s : \mathcal{E}^n \to \mathcal{E}^n$ naziva se simetrijom *s obzirom na hiperravninu Π^{n-1} ako je $s(P) = P$ za svaku točku $P \in \Pi^{n-1}$ i ako s nije identitet.*

Teorem 14. *Svaka izometrija f je ili pomak ili kompozicija simetrije i pomaka.*

Dokaz. Neka je s simetrija s obzirom na hiperravninu Π^{n-1}. Neka je dalje $O \in \Pi^{n-1}$ čvrsta točka i u unitarni operator prodružen simetriji s.
Tada je $\overrightarrow{OP'} = u(\overrightarrow{OP})$, $P' = s(P)$.
Za vektor $w \in W^{n-1}$ postoji točno jedna točka $P \in \Pi^{n-1}$ takva da je $w = \overrightarrow{OP}$. Međutim, $P \in \Pi^{n-1}$ povlači $P' = P$, pa je $u(w) = w$. Označimo s e_1 jedinični vektor okomit na W^{n-1}.
Neka je točka $Q \in \mathcal{E}^n$ takva da je $e_1 = \overrightarrow{OQ}$. Kako je $e_1 \perp W^{n-1}$ i u unitaran operator, vrijedi $u(e_1) = e_1$ ili $u(e_1) = -e_1$. Da je $u(e_1) = e_1$, bilo bi $s = i$. Dakle, $u(e_1) = -e_1$.
U ortonormiranoj bazi $\{e_1, \dots, e_n\}$ prostora U^n operatoru u pripada matrica

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{9.4}$$

jer je $u(e_1) = -e_1$, $u(e_2) = e_2, \dots, u(e_n) = e_n$.
U koordinatnom sustavu $(O; e_1, \dots, e_n)$ točka $P' = s(P)$ određena je jednakostima:

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 \\ x_2' &= \ \ x_2 \\ &\dots \\ x_n' &= \ \ x_n \ . \end{aligned}$$

Ako je $f : \mathcal{E}^n \to \mathcal{E}^n$ izometrija takva da je $\det f = -1$, onda je $f_1 = f \circ s$ pomak, jer je $\det s = -1$.
Budući da je $s \circ s$ identitet, vrijedi $f = f_1 \circ s$. □

Vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 15. *Svaka izometrija euklidskog prostora $\mathcal{E}^n$ je pomak ili kompozicija simetrije i pomaka.*
Svaki pomak je kompozicija rotacije i translacije.
Svaka translacija je kompozicija dviju simetrija s obzirom na paralelne hiperravnine.
Svaka rotacija je kompozicija simetrija sa zajedničkom fiksnom točkom .

Bibliografija

[1] M. Audin, *Geometry*, Springer, Heidelberg 2002.

[2] D. M. Bloom, *Linear Algebra and Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge 1988.

[3] K. W. Gruenberg, A. J. Weir, *Linear Geometry*, Springer, New York 1977.

[4] K. Horvatić, *Linearna algebra I.,II.,III.*, Sveučilište u Zagrebu, Matematički odjel PMF-a, Zagreb 1995.

[5] S. Kurepa, *Konačnodimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Liber, Zagreb 1992.

[6] V. V. Prasolov, V. M. Tikhomirov, *Geometry*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island 2001.

[7] P. Y. Ryan, *Euclidean and non-Euclidean geometry: an analytic approach*, Cambridge University Press, Cambridge 1986.