

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**

**PRILOG NUMERIČKOJ OPTIMALIZACIJI
STROJARSKIH KONSTRUKCIJA**

MAGISTARSKI RAD

Gojko Magazinović, dipl.ing.

Zagreb, 1996.

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**

**PRILOG NUMERIČKOJ OPTIMALIZACIJI
STROJARSKIH KONSTRUKCIJA**

MAGISTARSKI RAD

Gojko Magazinović, dipl.ing.

**Mentor:
Prof. dr sc. Dragutin Ščap, dipl.ing.**

Zagreb, 1996.

PREDGOVOR

Nakon desetljeća burnoga razvoja optimiranje je doseglo znanstvenu zrelost s mogućim primjenama u raznim područjima ljudske djelatnosti. Optimiranje strojarskih konstrukcija pritom je jedno od najprikladnijih područja. Međutim i pored izuzetnih ulaganja u računalnu tehnologiju i osuvremenjavanje procesa konstruiranja, optimiranje je, pored svih prednosti koje obećava, još uvijek zanemarivo zastupljeno u proizvodnim procesima mnogih organizacija. Što je tomu uzrok? Odgovor na ovo pitanje nije jednostavan i zahtijevao bi temeljitiju analizu. Jedan od mogućih uzroka je, iako možda ne presudan, nepostojanje jednoga općega, pouzdanoga, projektantima lako uporabiva, alata za optimiranje.

Ovaj rad je pokušaj razrade upravo takva alata za optimiranje. Za predložak je odabran algoritam optimiranja rekurzivnim kvadratnim programiranjem, kako je predložen u radovima Pšeničnoga, Lima, Belegundua i Arore.

Osjećam dužnost zahvaliti se svima onima bez čije potpore ovaj rad ne bi bio moguć. Svome prvome, iako neslužbenome, mentoru, nažalost prerano preminulomu, uvaženom profesoru Aurelu Kosteliću, dugujem zahvalnost za usmjeravanje istraživanja, oblikovanje zadatka i potporu tijekom izrade ovoga rada. Trenutke zajednička rada trajno ću pamtiti po dobroti i stručnosti ovoga velikoga čovjeka i znanstvenika. Mentor, profesoru Dragutinu Ščapu, zahvaljujem na prihvaćanju zadaće koju profesor Kostelić nažalost nije stigao dovršiti, kao i na primjedbama i prijedlozima kojima je ovaj rad dobio na potpunosti i kakvoći. Profesoru Michaelu J.D. Powellu sa kembridškoga sveučilišta zahvaljujem za nesebično ustupanje potprograma *ZQPCVX*, a profesoru Klausu Schittkowski, Universität Bayreuth, za ustupanje niza pokusnih zadataka. Konačno, svojoj obitelji dugujem zahvalnost za dugotrajno strpljenje, razumijevanje i potporu iskazanu tijekom izrade ovoga rada.

SADRŽAJ

SAŽETAK	3
SUMMARY	4
1. UVOD	5
1.1. Teorija proizvoda: geneza optimiranja strojarskih konstrukcija	5
1.2. Opći matematički model optimiranja	7
1.3. Obilježja matematičkoga modela optimiranja strojarskih konstrukcija	8
1.4. Opći oblik postupaka numeričkoga optimiranja	9
1.5. Željena obilježja dobrog algoritma za optimiranje	10
1.6. Razvoj postupaka optimiranja rekurzivnim kvadratnim programiranjem	11
1.7. Obrazloženje teme	13
2. POSTUPAK OPTIMIRANJA REKURZIVNIM KVADRATNIM PROGRAMIRANJEM	14
2.1. Temeljne postavke	14
2.2. Podzadatak smjera pretraživanja	15
2.2.1. Oblikovanje kvadratnoga podzadatka	15
2.2.2. Geometrijski smisao vektora smjera pretraživanja	17
2.2.3. Aproksimacija Hesseove matrice Lagrangeove funkcije	18
2.3. Podzadatak usmjerenoga pretraživanja	21
2.3.1. Izvorni postupak Pšeničnoga	21
2.3.2. Novi postupak utemeljen na objedinjavanju kubne i kvadratne interpolacije s postupkom zlatnoga reza	22
2.3.3. Popravni parametar r	23
2.4. Uvjet zaustavljanja	24
2.5. Mjere poboljšavanja svojstava postupka	25
2.5.1. Poboljšanje početnoga rješenja	25
2.5.2. Granični broj pokušaja pri usmjerenom pretraživanju	26
2.5.3. Zadržavanje varijabli unutar rubnih granica	27
2.5.4. Postupak za slučaj lošega smjera pretraživanja	28

2.6. Algoritam postupka optimiranja rekurzivnim kvadratnim programiranjem	30
2.7. Primjer primjene predloženoga postupka	33
3. PROCJENA VALJANOSTI PREDLOŽENOGA POSTUPKA	38
3.1. Izbor mjerila valjanosti	38
3.2. Izbor zadataka optimiranja	40
3.3. Izvođenje pokusa	42
3.4. Rezultati	43
3.4.1. Polazna izvedba postupka optimiranja rekurzivnim kvadratnim programiranjem	44
3.4.2. Usmjerenom pretraživanju predloženim postupkom objedinjavanja kubne i kvadratne interpolacije s postupkom zlatnoga reza	46
3.4.3. Primjena postupka za slučaj lošega smjera pretraživanja	48
4. RASPRAVA	50
4.1. Postignuća predloženih izmjena postupka optimiranja	50
4.2. Usporedba ostvarenih rezultata s rezultatima drugih autora	52
4.3. Prijedlozi za budući rad	57
5. ZAKLJUČAK	59
LITERATURA	60
ŽIVOTOPIS	64
PRILOZI	
PRILOG A: Algoritam procjene podobne točke usmjerenoga pretraživanja objedinjavanjem kubne i kvadratne interpolacije s postupkom zlatnoga reza	66
PRILOG B: Poziv potprograma <i>RQPOPT</i>	70
PRILOG C: Prikaz zadataka optimiranja	72
PRILOG D: Prikaz rezultata po zadacima	90

SAŽETAK

Suvremeni tržišni uvjeti i proizvodni odnosi postavljaju pred projektante i konstruktore nove izazove koji se iskazuju kroz rastuće zahtjeve za sve kvalitetnijim i jeftinijim proizvodima, razvijenim i proizvedenim u sve kraćim vremenskim razdobljima. U takvom okruženju javlja se optimiranje kao jedno od mogućih rješenja rastućih potreba. Projektanti i konstruktori nisu, i ne trebaju biti, stručnjaci za teoriju optimiranja, već korisnici kojima alat za optimiranje mora omogućiti brži i kvalitetniji rad. Stoga alat za optimiranje mora biti pouzdan, točan, djelotvoran i jednostavan za uporabu, kako bi korisniku omogućio posvećivanje postavljenu zadatku i ostvarivanje boljšeg konstrukcijskoga rješenja. U ovom radu razvijen je postupak optimiranja strojarskih konstrukcija utemeljen na rekuzivnom kvadratnom programiranju, kako su ga odredili Pšeničnij, Lim, Belegundu i Arora. Izvorni postupak je dopunjen dvjema izmjenama: postupkom usmjerenoga pretraživanja koji se koristi kubnom i kvadratnom interpolacijom i postupkom zlatnoga reza, i postupkom svladavanja poteškoća koje nastaju u slučaju lošega smjera pretraživanja. Predloženi postupak provjeren je na skupu od 19 stvarnih zadataka optimiranja, nastalih kroz projektiranje i konstruiranje strojarskih konstrukcija. Svi zadaci su rješavani istim skupom parametara optimiranja, kako bi se odredila njegova prava sposobnost za rješavanjem stvarnih zadataka. Predloženi postupak usmjerenoga pretraživanja nije polučio očekivani rezultat - rijetka poboljšanja zasjenjena su bitnim pogoršanjima kod značajnoga broja pokusnih zadataka. Suprotno očekivanjima, izvorna izvedba usmjerenoga pretraživanja je zadržana kao pouzdanija i djelotvornija. Predloženi postupak svladavanja poteškoća u slučajevima lošega smjera pretraživanja pokazao se uspješnim i korisnim. Osim u jednom slučaju, svi postavljene zadaci su uspješno riješeni, prevladavajući nedostatke uočene prilikom primjene izvornoga postupka. Svojim rezultatima, u prvom redu pokazanom pouzdanošću, točnošću, djelotvornošću i jednostavnošću uporabe, predloženi postupak se pokazao prikladnim za rješavanje suvremenih zadataka optimiranja strojarskih konstrukcija.

SUMMARY

Global trends in modern trade and production systems stress the importance of achieving the best product or system designs in the shortest evolution time and at the lowest development and production costs. In such environment, design optimization arises as a natural response to such growing needs. In the last three decades, a number of optimization methods have been proposed and used by researchers and design engineers. Amongst these, the class of algorithms based on recursive quadratic programming emerge as the most applicable methods for general design use. In this paper, an optimization method based on Arora and coworkers' version of Pshenichny's linearization method is proposed. This method falls into a broad class of recursive quadratic programming algorithms for design optimization. Two enhancements to basic algorithm are proposed and investigated. The first is cubic and quadratic interpolation, combined with the golden search step, during the line search to obtain a better estimate for the step size, and the other is novel technique for alleviating the numerical difficulties induced by the bad direction of search. The proposed algorithm is implemented in FORTRAN subroutine named *RQPOPT* and tested on a set of nineteen real-life engineering design optimization problems. All test problems are solved with the same set of optimization parameters to test algorithm intrinsic ability of solving real-life problems. The results showed that interpolation during the line search was not a right choice due to increased number of needed function evaluations in many instances. Therefore, it has been dropped from the final version of the method. On the other hand, the technique for alleviating the numerical difficulties induced by the bad direction of search worked very well. Except in one case, all test problems have been satisfactorily solved, alleviating the numerical difficulties encountered during the basic algorithm application. Finally, the results showed that the proposed optimization method is very reliable, accurate, general and moderately efficient, as well as easy to use, and hence suitable for general mechanical engineering design optimization purposes.

1. UVOD

1.1. TEORIJA PROIZVODA : GENEZA OPTIMIRANJA STROJARSKIH KONSTRUKCIJA

Suvremeni proizvodni odnosi i zahtjevi tržišta sve više prisiljavaju proizvođače da nastoje zadovoljiti kupce u pogledu kvalitete, roka isporuke i cijene proizvoda [1, 2]. Naime, životni vijek proizvoda postaje sve kraći, pa je i raspoloživo vrijeme za razvoj novoga proizvoda sve kraće. Istodobno, kupci zahtijevaju sve kvalitetnije proizvode uz što niže cijene. Dok je svojedobno bilo najvažnije *moći* izraditi proizvod, danas je to biti *bolji* od svojih takmaca.

U teorija proizvoda, nastaloj u okrilju znanosti o konstruiranju [1], se proizvod prikazuje svojom strukturom [2]:

$$\Omega = \{ \Omega_f, \Omega_s, \Omega_k, \Omega_g, \Omega_z \}, \quad (1)$$

gdje su:

- Ω - skup svih obilježja konstrukcije (konstrukcijska struktura proizvoda, sadrži n obilježja),
- Ω_f - podskup obilježja konstrukcije koji proizlaze iz pretvorbenog mehanizma proizvoda (sadrži n_f obilježja),
- Ω_s - podskup obilježja konstrukcije koji proizlaze iz rješavanja sekundarnih procesa (sadrži n_s obilježja),
- Ω_k - podskup obilježja konstrukcije koji proizlaze iz konvencionalnih zahtjeva (sadrži n_k obilježja),
- Ω_g - podskup obilježja konstrukcije koji proizlaze iz geometrijskih zahtjeva (sadrži n_g obilježja),

Ω_z - podskup obilježja konstrukcije koji nisu uvjetovani nikakvom zakonitošću
 - skup neovisnih varijabli (sadrži n_z obilježja).

Prikaže li se broj ovisnih varijabli n' s:

$$n' = n_f + n_s + n_k + n_g, \quad (2)$$

onda je:

$$n_z = n - n', \quad (3)$$

pri čemu mogu nastupiti tri svojstvena slučaja:

- a) $n_z < 0$ - preodređena konstrukcija ($n' > n$),
- b) $n_z = 0$ - jednoznačno određena konstrukcija ($n' = n$),
- c) $n_z > 0$ - nejednoznačno određena konstrukcija ($n' < n$).

Slučajevi preodređene i jednoznačno određene konstrukcije imaju teorijski značaj i nisu mogući u stvarnosti. Slučaj nejednoznačno određene konstrukcije ($n_z > 0$) je jedini stvarni slučaj i predstavlja temelj različitosti konstrukcijskih rješenja.

Broj mogućih konstrukcijskih rješenja, određen uzajamnim kombinacijama neovisnih varijabli u njihovom području definicije, može biti izuzetno velik, počesto i neograničen. Postavljanjem određenoga cilja, kao svojevrsnoga mjerila kakvoće [3], broj mogućih konstrukcijskih rješenja se bitno smanjuje, ili čak svodi samo na jedno - optimalno rješenje. Pronalaženje ovoga rješenja predstavlja zadaću optimiranja¹.

¹ Fletcher [4] definira optimiranje kao znanost o određivanju "najboljih" rješenja matematički postavljenih zadataka koji često predstavljaju modele fizikalne stvarnosti.

1.2. OPĆI MATEMATIČKI MODEL OPTIMIRANJA

Svi zadaci optimiranja mogu se prikazati jednim općim, standardnim, matematičkim modelom:

Odrediti n -dimenzionalni vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, neovisnih varijabli koji minimira funkciju cilja

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (4)$$

uz zadovoljavanje m' jednakosnih ograničenja

$$g_j(\mathbf{x}) \equiv g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \quad j = 1 \text{ do } m', \quad (5)$$

i $m - m'$ nejednakosnih ograničenja

$$g_j(\mathbf{x}) \equiv g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0; \quad j = m'+1 \text{ do } m, \quad (6)$$

pri čemu je vektor neovisnih varijabli omeđen svojim područjem definicije (donjom granicom \mathbf{x}_L i gornjom granicom \mathbf{x}_U)

$$x_{Li} \leq x_i \leq x_{Ui}; \quad i = 1 \text{ do } n. \quad (7)$$

Ovaj model je prilagođen zadacima optimiranja s neprekinutim projektnim varijablama, ali je, uz određene pretpostavke, primjenjiv i na zadatke s prekinutim, odnosno diskretnim varijablama, kao i na zadatke s višestrukim ciljevima.

U svom izvornom obliku opći matematički model optimiranja pretpostavlja neprekinute i derivabilne funkcije cilja i ograničenja, kao i linearnu neovisnost gradijenata funkcija ograničenja u točki optimuma [5].

Svaki se zadatak optimiranja može izraziti u obliku ovoga općeg, standardnog, matematičkog modela. To znači da svi zadaci optimiranja, neovisno o svom podrijetlu i naravi, nakon izražavanja u standardnom obliku postaju nalik jedan drugomu, pa se za njihovo rješavanje mogu rabiti i isti principi rješavanja [6].

1.3. OBILJEŽJA MATEMATIČKOGA MODELA OPTIMIRANJA STROJARSKIH KONSTRUKCIJA

Zadaci optimiranja strojarskih konstrukcija, kao i drugi zadaci optimiranja u tehničkoj praksi, obilježeni su nekim posebnostima koje nisu česte u ostalim područjima optimiranja, npr. u matematičkom programiranju. Stoga poznavanje i uvažavanje ovih posebnosti umnogome određuje pristup rješavanju zadataka optimiranja. Neka od najvažnijih obilježja su [5, 7-12]:

- Zadatak optimiranja je općenit, što pretpostavlja nepostojanje nikakva uvjeta za oblikom funkcija cilja ili ograničenja.
- Funkcije cilja i ograničenja su eksplicitne i implicitne funkcije projektnih varijabli. Funkcije cilja često predstavljaju težinu konstrukcije, naprezanje ili pomak u nekoj točki. Funkcije ograničenja su obično granična naprezanja, pomaci ključnih točaka ili svojstvene frekvencije konstrukcije.
- Određivanje funkcija cilja i ograničenja, kao i njihovih gradijenata, može biti složeno i dugotrajno. Izračunavanje implicitnih funkcija cilja i ograničenja predstavlja izuzetan računski napor (često su to cjelokupne analize konstrukcija postupkom konačnih elemenata). Dopunsku poteškoću često stvara i nepoznavanje analitičkoga izraza za gradijente ovih funkcija, kada je jedina mogućnost njihovo približno numeričko izračunavanje, što dodatno povećava potreban računski rad.

Ovo obilježje naročito dolazi do izražaja u slučajevima optimiranja složenih sustava kada broj projektnih varijabli i funkcija ograničenja doseže razinu više stotina ili tisuća.

- Broj ograničenja može biti izuzetno velik, što dodatno otežava njihovo višestruko izračunavanje. Zanimljivo je da većina tih ograničenja ne djeluje u točki optimuma, što znači da su se tijekom postupka optimiranja mogla i zanemariti. Međutim, poteškoća je u tomu što se unaprijed ne zna koje će od ograničenja djelovati u točki optimuma, a koje neće.
- Zadaci optimiranja su često visoko nelinearni i u općemu slučaju nekonveksni, što ima za posljedicu postojanje višestrukih lokalnih rješenja. Tada posebnu poteškoću predstavlja određivanje globalnoga rješenja.

Postupci numeričkoga optimiranja su iterativni postupci koji uzastopnim izračunavanjem funkcija cilja, ograničenja i njihovih gradijenata nastoje poboljšati trenutno pretpostavljeno rješenje. Izuzetno je važno razviti takve postupke koji će s najmanjim potrebnim brojem izračunavanja funkcija i njihovih gradijenata dovesti do željena rezultata. Broj izračunavanja funkcija i njihovih gradijenata do postizanja rješenja se, stoga, često uzima mjerilom uspješnosti postupka optimiranja [5].

1.4. OPĆI OBLIK POSTUPAKA NUMERIČKOGA OPTIMIRANJA

Većina numeričkih postupaka optimiranja može se zajednički opisati uzastopnom primjenom jednadžbe:

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + \alpha_k^* \cdot \mathbf{d}^{(k)}, \quad (8)$$

gdje su:

\mathbf{x} - vektor neovisnih varijabli,

- \mathbf{d} - vektor smjera pretraživanja,
- α^* - veličina koraka (iznos promjene vektora \mathbf{x}) u smjeru pretraživanja \mathbf{d} ,
- k - redni broj iteracije.

Kada je smjer pretraživanja jednom poznat, optimalna veličina koraka α^* određuje se jednodimenzionalnim (usmjerenim) minimiranjem funkcije $f(\mathbf{x})$, odnosno određivanjem one vrijednosti koraka α za koju funkcija $f(\mathbf{x})$, u smjeru \mathbf{d} , ima minimum. Proces optimiranja (8) se ponavlja sve do zadovoljavanja uvjeta zaustavljanja.

Za započinjanje postupka nužno je potrebna početna, pretpostavljena vrijednost rješenja $\mathbf{x}^{(0)}$ koja se, tijekom postupka optimiranja, stalno utočnjava i približava pravom, konačnom, rješenju.

Različiti postupci optimiranja se međusobno razlikuju samo po načinu određivanja vektora smjera pretraživanja \mathbf{d} i veličine koraka α^* .

1.5. ŽELJENA OBILJEŽJA DOBROGA ALGORITMA ZA OPTIMIRANJE

Izbor algoritma² za optimiranje strojarskih konstrukcija predstavlja ključnu odluku za postizanje uspješnih rezultata u složenim i velikim stvarnim primjenama. Željena obilježja dobrog algoritma mogu se objediniti u [9, 5, 13]:

- *POUZDANOST* - Algoritam mora posjedovati dokazanu sposobnost konvergencije k lokalnom optimumu neovisno o položaju početne točke. Takav algoritam se naziva globalno konvergentnim³, pouzdanim ili stabilnim.

² Dogovor o nazivlju: *Postupak* predstavlja skup (načelnih) pravila kojima se određuje način rješavanja određenoga zadatka. *Algoritam* je razrada postupka i predstavlja višu razinu potankosti. Računalni *program* je oživotvorenje algoritma koje predstavlja najvišu razinu potankosti. To znači da se na temelju jednoga postupka mogu izraditi različiti algoritmi, a na temelju svakoga od njih, različiti programi.

³ Pojam globalne konvergencije ne smije se miješati s pojmom određivanja globalnoga optimuma zadatka optimiranja [6].

- *OPĆENITOST* - Algoritam mora biti sposoban podjednako rješavati zadatke s jednakosnim i nejednakosnim ograničenjima i ne smije postavljati nikakva ograničenja u smislu oblika i vrste funkcija koje se javljaju u zadatku.
- *DJELOTVORNOST* - Algoritam treba konvergirati k rješenju s najmanjim brojem iteracija, a broj izračunavanja funkcija i njihovih gradijenata unutar jedne iteracije mora biti što manji.
- *TOČNOST* - Sposobnost algoritma za konvergencijom k točnom matematičkom optimumu je važno obilježje, iako se u praksi možda ne zahtijeva. Algoritam obilježen točnošću je vjerojatno čvrsto matematički utemeljen i stoga pouzdan.
- *LAKOĆA UPORABE* - Algoritam mora biti lako uporabiv od strane kako iskusna, tako i neiskusna korisnika. S praktičnoga stajališta ovo je izuzetno važno obilježje. Algoritam koji zahtijeva fino ugađanje parametara i poznavanje i razumijevanje matematičke strukture algoritma, nije lak za uporabu i nije prikladan za opću uporabu.

Obilježja pouzdanosti, općenitosti, točnosti i lakoće uporabe su ključna za uspješnu primjenu postupaka optimiranja u tehničkoj praksi, pa im pri izboru odgovarajućega alata za optimiranje treba dati prednost u odnosu na obilježje djelotvornosti [13]. Naime, djelotvornost se počesto ostvaruje nauštrb pouzdanosti, općenitosti, točnosti i lakoće uporabe, a vrijedi i obrat.

1.6. RAZVOJ POSTUPAKA OPTIMIRANJA REKURZIVNIM KVADRATNIM PROGRAMIRANJEM

Postupci optimiranja, u obliku kakvim ih danas poznajemo, nastaju zajedno s nastankom elektroničkih računala, a značajniji razvoj bilježe posljednjih desetljeća. Slikovit prikaz burnoga razvoja ove, danas izuzetno dinamične discipline, dan je u brojnim knjigama [14-17], preglednim člancima [5, 9, 18, 19] i usporednim studijama [20-25].

Temeljnu zamisao o svođenju zadataka optimiranja općih nelinearnih funkcija s nelinearnim ograničenjima na niz zadataka kvadratnoga programiranja s linearnim ograničenjima izložio je 1963. godine R.B. Wilson u svojoj doktorskoj disertaciji "A Simplicial Algorithm for Concave Programming", utemeljivši ideju rekurzivnoga kvadratnoga programiranja. Zanimljivo je što su prvi računski rezultati bili loši [26], pa ideja nije imala značajnijega odjeka u ondašnjoj stručnoj javnosti.

Od pojedinačnih pokušaja primjene Wilsonove ideje vrijedno je istaći radove Robinsona [8], Garcia-Palomaresa [27, 28] i Bartholomew-Biggsa [29-30]. Prekretnicu čine radovi Shih-Ping Hana [31, 32] iz 1976. i 1977. godine, koji je pri razvio algoritam rekurzivnoga kvadratnog programiranja s dokazanom globalnom konvergencijom. Powell je poboljšao Hanov algoritam [33, 34], izradivši nadaleko poznat program *VF02AD*, dostupan preko Harwell Subroutine Library. U velikoj usporednoj studiji [23] koja je obuhvatila 35 programa ispitana na 185 zadataka, program *VF02AD* je postigao ukupno najveću ocjenu. Današnju zrelost Wilson-Han-Powellov algoritam dostiže u radovima Schittkowskoga [35-37] koji je svoja zapažanja i promišljanja pretočio u program *NLPQL* [38], danas vjerojatno jedan od najboljih općih programa za optimiranje.

Znatno prije radova Hana i Powella, a moguće i neovisno o radu Wilsona, u ondašnjem Sovjetskom savezu je 1970. godine Pšeničnij objavio nevelik članak u kojemu predlaže postupak za rješavanje općih zadataka optimiranja [39]. Iako ga je nazvao postupkom linearizacije za optimiranje s ograničenjima, predloženi postupak predstavlja svojstvenu izvedbu postupka rekurzivnoga kvadratnoga programiranja. Zbog toga što je rad bio napisan na ruskome, sve do pojave engleskoga prijevoda [40] o njemu se na Zapadu nije ništa znalo. Uočivši skrivene prednosti ovoga postupka, a najveća je dokaz konvergencije iz proizvoljne početne točke uz korištenje samo dijela postavljenih ograničenja, Arora sa suradnicima provodi višegodišnje istraživanje kojim je značajno usavršio izvornu ideju Pšeničnoga, izradivši *PLBA* (Pšeničnij-Lim-Belegundu-Arora) algoritam [41, 10, 8]. *PLBA* algoritam, ugrađen u istoimeni program [7, 42, 43] pokazao se moćnim alatom u rješavanju općih zadataka optimiranja u tehnici, postižući izvanredne rezultate u pogledu pouzdanosti i djelotvornosti [43, 44].

Iako mi nisu poznati rezultati izravnoga sučeljavanja programa *PLBA* i *NLPQL*, na istomu skupu zadataka, nedvojbeno se radi o dva izuzetno uspješna programa koji, svaki na svoj način, predstavljaju vrhunac suvremenoga rješavanja zadataka optimiranja.

1.7. OBRAZLOŽENJE TEME

Nužan uvjet za premoštenje jaza između razvijene teorije optimiranja i njene zanemarive industrijske primjene [45], je razvoj općega, pouzdana i projektantima lako uporabiva *alata* za optimiranje. Široko je prihvaćeno mišljenje [5, 14, 23, 24] kako je optimiranje rekurzivnim kvadratnim programiranjem jedno od najprikladnijih za opće primjene. Optimiranje postupkom Pšeničnoga je, pritom, posebno pogodno za industrijske primjene. Pored čvrste matematičke utemeljenosti resi ga i dokaz globalne konvergencije uz uporabu tek dijela postavljenih ograničenja, što se izuzetno povoljno odražava na veličinu rješavanoga zadatka. Nastao u okrilju teorije matematičkoga programiranja (Pšeničnij je matematičar, slično kao i Han, Powell i Schittkowski), ovaj postupak doživljava svoju punu zrelost i potvrdu tek s radovima Arore i suradnika, inače sve odreda inženjera, koji su ga ustrajnim radom uspjeli usavršiti do sadašnjih visina.

Ovaj rad predstavlja pokušaj daljnega usavršavanja postupka optimiranja rekurzivnim kvadratnim programiranjem i doprinosa njegovoj široj primjeni u optimiranju strojarskih konstrukcija.

2. POSTUPAK OPTIMIRANJA REKURZIVNIM KVADRATNIM PROGRAMIRANJEM

2.1. TEMELJNE POSTAVKE

Optimiranje postupkom rekurzivnoga kvadratnoga programiranja svodi se na uzastopnu primjenu utočnjavanja trenutnoga rješenja $\mathbf{x}^{(k)}$ (8), pri čemu se smjer pretraživanja $\mathbf{d}^{(k)}$ određuje rješavanjem kvadratnoga podzadatka, a veličina koraka α^* , u smjeru pretraživanja, minimiranjem funkcije spuštanja.

Kvadratni podzadatak predstavlja pojednostavljene izvornoga zadatka optimiranja (4)-(7) koje se dobije linearizacijom funkcija cilja i ograničenja u okolišu trenutne točke $\mathbf{x}^{(k)}$, uz dodavanje kvadratnoga člana uz lineariziranu funkciju cilja [40]. Razlog ovakva pristupa može se objasniti lakoćom rješavanja kvadratnoga podzadatka, za što postoje dobro razvijeni standardni postupci [6].

Funkcija spuštanja služi kao mjerilo napredovanja iterativnoga postupka prema optimumu i osigurava da svako međurješenje $\mathbf{x}^{(k)}$ bude bolje od prethodnoga [9]. Tvori se od iznosa funkcije cilja, uvećanoga za popravni član koji objedinjuje utjecaj prekoračenja ograničenja. U točki optimuma iznos funkcije spuštanja postaje jednak iznosu funkcije cilja. Pšeničnij je funkciju cilja odredio [39, 40] s:

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + r \cdot V(\mathbf{x}), \quad (9)$$

gdje je r pozitivni broj (popravni parametar), a $V(\mathbf{x})$ najveće prekoračenje ograničenja:

$$V(\mathbf{x}) = \max (|g_j(\mathbf{x})|, j = 1 \text{ do } m'; g_j(\mathbf{x}), j = m'+1 \text{ do } m). \quad (10)$$

Pšeničnij je uveo i pojam parametra prekoračenja ograničenja $\varepsilon(\mathbf{x})$:

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \delta - V(\mathbf{x}), \quad (11)$$

gdje je δ pozitivna konstanta. Ovaj parametar ima odlučujuću ulogu prilikom određivanja skupa djelatnih ograničenja. Skup djelatnih ograničenja u nekoj točki tvore sva jednakosna ograničenja i ona nejednakosna ograničenja za koja vrijedi:

$$g_j(\mathbf{x}) + \varepsilon(\mathbf{x}) \geq 0, \quad j = m'+1 \text{ do } m. \quad (12)$$

Parametar prekoračenja ograničenja $\varepsilon(\mathbf{x})$ omogućuje tvorbu skupa djelatnih ograničenja s promjenjivim brojem sudionika, što je važno obilježje koje ne posjeduje ni jedan drugi algoritam [10]. Iako za velika prekoračenja ograničenja $V(\mathbf{x})$ parametar $\varepsilon(\mathbf{x})$ može biti negativan, u ovom radu se pri određivanju skupa djelatnih ograničenja koriste samo njegovi nenegativni iznosi, odnosno:

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \max(0, \varepsilon(\mathbf{x})). \quad (13)$$

2.2. PODZADATAK SMJERA PRETRAŽIVANJA

2.2.1. Oblikovanje kvadratnoga podzadatka

Linearizacijom funkcija cilja i ograničenja u trenutnoj točki $\mathbf{x}^{(k)}$ može se izvorni zadatak optimiranja (4)-(7) zamijeniti slijedećim kvadratnim podzadatkom:

$$\text{Odrediti minimum } (\mathbf{G}^0, \mathbf{d}) + 1/2 \cdot (\mathbf{d}, \mathbf{Hd}), \quad (14)$$

$$\text{uz ograničenja} \quad \mathbf{g}_j + (\mathbf{G}^j, \mathbf{d}) = 0, \quad j \in I_1, \quad (15)$$

$$\mathbf{g}_j + (\mathbf{G}^j, \mathbf{d}) \leq 0, \quad j \in I_2, \quad (16)$$

$$x_{Li} \leq x_i \leq x_{Ui}, \quad i \in I_3, \quad (17)$$

gdje su:

\mathbf{G}^0 - gradijent funkcije cilja,

\mathbf{H} - simetrična, pozitivno određena, matrica,

\mathbf{G}^j - gradijent j -te funkcije ograničenja,

pri čemu (\mathbf{a}, \mathbf{b}) označuje skalarni umnožak. Skup indeksa djelatnih ograničenja I_ε određen je s:

$$I_\varepsilon = I_1 \cup I_2 \cup I_3, \quad (18)$$

$$I_1 = \{j \mid |\mathbf{g}_j(\mathbf{x})| + \varepsilon(\mathbf{x}) \geq 0, j = 1 \text{ do } m'\}, \quad (19)$$

$$I_2 = \{j \mid \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) + \varepsilon(\mathbf{x}) \geq 0, j = m'+1 \text{ do } m\}, \quad (20)$$

dok skup indeksa I_3 uključuje djelatna rubna ograničenja projektnih varijabli (17), izraženih u obliku (20). Ovako postavljen kvadratni podzadatak uključuje samo dio ukupnoga broja ograničenja, što ima za posljedicu njegovu manju veličinu, lakšu rješivost i manju potrebu za gradijentima funkcija ograničenja.

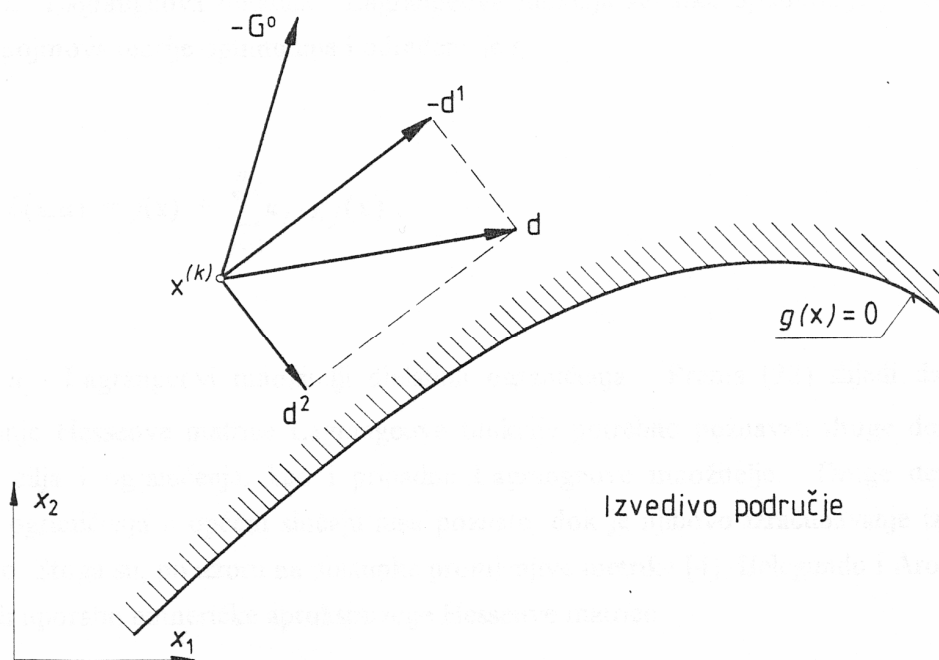
Pšeničnij se za simetričnu, pozitivno određenu, matricu \mathbf{H} koristio jediničnom matricom \mathbf{I} [39, 40], dok su Belegundu i Arora [41], radi ubrzanja konvergencije algoritma, predložili uporabu aproksimacije Hesseove matrice Lagrangeove funkcije. Zbog odličnih postignutih rezultata ovo poboljšanje je primijenjeno i u ovomu radu.

Kvadratni podzadatak (14)-(17) rješiv je bilo kojim standarnim postupkom određivanja minimuma kvadratne funkcije s linearnim ograničenjima [6, 46, 47]. U ovom radu je primijenjen Powellov potprogram *ZQPCVX* [48], koji se temelji na postupku Goldfarba i Idnanija [47].

2.2.2. Geometrijski smisao vektora smjera pretraživanja

Rješavanjem kvadratnoga podzadatka određuje se smjer pretraživanja \mathbf{d} . Promotri li se поближе geometrijski smisao ovoga rješenja, moglo bi se pokazati [11] kako se vektor smjera pretraživanja \mathbf{d} sastoji iz dva dijela:

$$\mathbf{d} = -\mathbf{d}^1 + \mathbf{d}^2, (21)$$



Slika 1. Geometrijski smisao vektora smjera pretraživanja \mathbf{d} [11]

pri čemu je vektor \mathbf{d}^1 nastao projiciranjem, u odnosu na \mathbf{H} , vektora gradijenta funkcije cilja na tangentnu hiperravninu djelatnih ograničenja, dok je vektor \mathbf{d}^2 okomit na ovu hiperravninu (Slika 1.). Vektor $-\mathbf{d}^1$ teži smanjenju funkcije cilja, dok vektor \mathbf{d}^2 teži smanjenju prekoračenja ograničenja. Prema tomu, smjer pretraživanja \mathbf{d} , kod postupaka rekursivnoga kvadratnoga programiranja, teži istodobnomu smanjenju funkcije cilja i smanjenju prekoračenja ograničenja [11].

2.2.3. Aproximacija Hesseove matrice Lagrangeove funkcije

Hesseova matrica, odnosno matrica drugih derivacija, Lagrangeove funkcije određena je s:

$$\mathbf{H} = [\partial^2 L / \partial x_i \partial x_j]; \quad i = 1 \text{ do } n, \quad j = 1 \text{ do } n, \quad (22)$$

gdje je L Lagrangeova funkcija. Lagrangeova funkcija zadatka optimiranja je jedan od ključnih pojmova teorije optimiranja i određena je s:

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m u_j \cdot g_j(\mathbf{x}), \quad (23)$$

gdje su u_j Lagrangeovi množitelji djelatnih ograničenja. Prema (22) slijedi da je za određivanje Hesseove matrice Lagrangeove funkcije potrebno poznavati druge derivacije funkcija cilja i ograničenja, kao i pripadne Lagrangeove množitelje. Druge derivacije funkcija ograničenja u općem slučaju nisu poznate, dok je njihovo izračunavanje izuzetno zahtjevno. Stoga su, po uzoru na postupke promjenjive metrike [4], Belegundu i Arora [41] predložili uporabu numeričke aproksimacije Hesseove matrice.

U literaturi je opisano nekoliko numeričkih postupaka aproksimacije Hesseove matrice [4], međutim vlada općeprihvaćeno mišljenje kako je postupak zasnovan na radovima

Broydena, Fletchera, Goldfarba i Shannoa, poznatiji kao *BFGS* formula, najprikladniji. U ovomu radu se rabi Powellova izvedba *BFGS* formule [6, 49] koja, pored dobrih obilježja *BFGS* formule, uključuje i zaštitu od gubljenja pozitivne određenosti matrice \mathbf{H} .

BFGS postupak omogućuje numeričku aproksimaciju Hesseove matrice na temelju poznavanja samo gradijenata funkcija cilja i ograničenja, što je izuzetno poželjno svojstvo, naročito stoga što su te vrijednosti već određene prilikom oblikovanja kvadratnoga podzadatka. Osim toga, umjesto nepoznatih Lagrangeovih množitelja funkcija ograničenja se pri numeričkoj aproksimaciji rabe Lagrangeovi množitelji lineariziranih ograničenja, koji slijede iz rješenja kvadratnoga podzadatka.

BFGS aproksimacija Hesseove matrice vrši se slijedećim postupkom:

$$\mathbf{H}^{(k+1)} = \mathbf{H}^{(k)} + \mathbf{D}^{(k)} + \mathbf{E}^{(k)}, \quad (24)$$

gdje su $\mathbf{D}^{(k)}$ i $\mathbf{E}^{(k)}$ popravne matrice koje utočnjavaju raniju aproksimaciju. Postupak aproksimacije se započinje s $\mathbf{H}^{(0)} = \mathbf{I}$, gdje je \mathbf{I} jedinična matrica. Matrice $\mathbf{D}^{(k)}$ i $\mathbf{E}^{(k)}$ određene su promjenama projektnih varijabli i gradijenata Lagrangeove funkcije:

$$\mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}, \quad (25)$$

$$\mathbf{y}^{(k)} = \nabla L(\mathbf{x}^{(k+1)}, \mathbf{u}^{(k)}) - \nabla L(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}), \quad (26)$$

i slijedećih pomoćnih veličina:

$$\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{s}^{(k)}, \quad (27)$$

$$\xi_1 = (\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)}), \quad (28)$$

$$\xi_2 = (\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{z}^{(k)}), \quad (29)$$

$$\theta = 1 \quad \text{za } \xi_1 \geq 0.2, \quad (30)$$

$$\theta = 0.8\xi_2 / (\xi_2 - \xi_1) \quad \text{u ostalim slučajevima,} \quad (31)$$

$$\mathbf{w}^{(k)} = \theta \mathbf{y}^{(k)} + (1 - \theta) \mathbf{z}^{(k)}, \quad (32)$$

$$\xi_3 = (\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{w}^{(k)}), \quad (33)$$

kada se konačno dobija:

$$\mathbf{D}^{(k)} = \mathbf{w}^{(k)} \mathbf{w}^{(k)T} / \xi_3, \quad (34)$$

$$\mathbf{E}^{(k)} = \mathbf{z}^{(k)} \mathbf{z}^{(k)T} / \xi_2. \quad (35)$$

Promjene skupa djelatnih ograničenja uzrokom su značajnih poteškoća pri određivanju promjena gradijenta Lagrangeove funkcije (26), za čije je izračunavanje nužno potrebno poznavanje Lagrangeovih množitelja. Naime, zbog promjena skupa, kada pojedina ograničenja uđu ili napuste skup, česte su pojave nepoznavanja iznosa odgovarajućih Lagrangeovih množitelja. Radi prevladavanja ovih poteškoća se u ovom radu, na prijedlog Tsenga i Arore [43], pri određivanju promjene gradijenta Lagrangeove funkcije uzimaju u obzir samo ona ograničenja koja su djelatna u k -toj i u $(k+1)$ -oj iteraciji.

Svojstvo pozitivne određenosti matrice \mathbf{H} ima krunski značaj za konvergenciju postupka optimiranja k rješenju, pa mu treba pridati posebnu pozornost. Naime, tijekom postupka aproksimacije moguća je, štoviše vrlo često, pojava gubitka pozitivne određenosti matrice \mathbf{H} , kada se postupak konvergencije usporava ili, što je još vjerojatnije, potpuno onemogućuje. Uobičajeni postupak zaštite u tim slučajevima je, po uzoru na postupke promjenljive metrike [4], obnavljanje aproksimacije matrice \mathbf{H} jediničnom matricom, čime se zadržava svojstvo pozitivne određenosti, ali i usporava brzina konvergencije. Ključno je pitanje kako predvidjeti skori gubitak pozitivne određenosti matrice \mathbf{H} . Prema [42], predlaže se provjera uvjetovnoga broja matrice c , koja je određena s:

$$c = \lambda_{\max} / \lambda_{\min} , \quad (36)$$

gdje su λ_{\max} i λ_{\min} najveća i najmanja svojstvena vrijednost matrice \mathbf{H} . Ako c postane veće od neke, unaprijed određene vrijednosti c_0 , onda se matrica \mathbf{H} smatra loše uvjetovanom, nakon čega se pristupa obnavljanju $\mathbf{H} = \mathbf{I}$. Prema [44], ovaj pristup se pokazao najdjelotvornijim, pa je primijenjen i u ovom radu. Za određivanje svojstvenih vrijednosti matrice \mathbf{H} upotrijebljen je Jacobijev postupak [50].

2.3. PODZADATAK USMJERENOGA PRETRAŽIVANJA

Kada bi kvadratni podzadatak (14)-(17) bio jednak stvarnom zadatku optimiranja (4)-(7), nova točka rješenja $\mathbf{x}^{(k)}$ bila bi jednaka $\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{d}$, odnosno veličina koraka α^* bi bila jednaka jedinici. Takvo rješenje bilo bi ujedno i rješenje zadatka (4)-(7). Međutim, kako u općem slučaju taj uvjet nije zadovoljen, potrebno je odrediti onu veličinu koraka α^* za koju će funkcija $f(\mathbf{x})$ imati minimum. Postupak određivanja ove veličine koraka naziva se usmjerenim pretraživanjem.

Za razliku od "egzaktih" postupaka usmjerenog pretraživanja [4], kada se traži točka minimuma funkcije spuštanja, u postupcima rekurzivnoga kvadratnoga programiranja se rabe "neegzakti" postupci [4, 51], kod kojih se traži točka koja daje određeni "napredak" prema rješenju, odnosno točka koja zadovoljava određeni "uvjet spuštanja".

2.3.1. Izvorni postupak Pšeničnoga

Pšeničnij je postupak usmjerenoga pretraživanja odredio s [39, 40]: veličina koraka α^* je jednaka 0.5^J , gdje je J najmanji cijeli broj q koji zadovoljava uvjet spuštanja:

$$F(\mathbf{x} + 0.5^q \mathbf{d}) \leq F(\mathbf{x}) - 0.5^q \cdot \beta \cdot \|\mathbf{d}\|^2 , \quad (37)$$

za bilo koju vrijednost $0 < \beta < 1$. U gornjoj jednadžbi $\|\mathbf{d}\|$ ima značenje norme vektora smjera pretraživanja.

U ovom radu se na prijedlog Tsenga i Arore [42], što su potvrdila i osobna istraživanja tijekom izrade ovoga rada, rabi blaži uvjet spuštanja:

$$F(\mathbf{x} + 0.5^q \mathbf{d}) < F(\mathbf{x}), \quad (38)$$

dopuštajući veće korake napredovanja i omogućujući bržu konvergenciju k rezultatu.

2.3.2. Novi postupak utemeljen na objedinjavanju kubne i kvadratne interpolacije s postupkom zlatnoga reza

Pri provjeri uvjeta spuštanja (37) ili (38) pokusne veličine koraka pretraživanja α poprimaju brožčane iznose niza $\alpha = 1$ (za $q = 0$), $\alpha = 0.5$ (za $q = 1$), $\alpha = 0.25$ (za $q = 2$), ... Ovakav postupak odlikuje se svojom jednostavnošću, ali i neiskorištavanjem saznanja o iznosima funkcije spuštanja u ranijim, neuspjelim, pokusnim točkama, radi mogućega ubrzanja postupka pretraživanja. Stoga je u ovom radu predložen postupak predviđanja veličine koraka pretraživanja α koja zadovoljava uvjet spuštanja uz najmanji broj pokušaja.

Postupak predviđanja optimalne veličine koraka α^* se zasniva na objedinjavanju kubne i kvadratne interpolacije s postupkom zlatnoga reza. Radi jednostavnosti i preglednosti postupak će biti prikazan u obliku pseudoprograma, dok je više potankosti dano u prilogu (Prilog A).

```

Function New_point ( q )

Select_case ( q )
  Case ( q = 0 )
     $\alpha^*$  = 1
  Case ( q = 1 )
     $\alpha^*$  = 0.618034      !parametar zlatnoga reza
  Case ( q > 1 )
    If ( q  $\geq$  3 ) then
       $\alpha$   $\leftarrow$  kubna interpolacija kroz 4 toèke
    End if
    If ( uvjet za kubnu interpolaciju ) then
       $\alpha^*$  =  $\alpha$ 
    Else
       $\alpha$   $\leftarrow$  kvadratna interpolacija kroz 3 toèke
      If ( uvjet za kvadratnu interpolaciju ) then
         $\alpha^*$  =  $\alpha$ 
      Else
         $\alpha^*$   $\leftarrow$  zlatnim rezom
      End if
    End if
  End_select
  New_point =  $\alpha^*$ 

End_function

```

2.3.3. Popravni parametar r

Popravni parametar r ima zadaću uravnotežavanja upliva funkcije cilja i prekoračenja ograničenja pri određivanju iznosa funkcije spuštanja (9), a time i optimalne veličine koraka usmjerenoga pretraživanja. Njegov utjecaj na rad algoritma je izuzetno velik, jer premale vrijednosti omogućuju duboka zadiranja u neizvediva područja, dok prevelike vrijednosti usporavaju konvergenciju, dopuštajući samo male pomake u smjeru pretraživanja [52].

Pšeničnij je predložio slijedeće pravilo za izbor veličine parametra r [39, 40]:

$$r = 2 \cdot r^* , \text{ ako je } r^* > r , \quad (39)$$

$$r^* = \Sigma |u_j| , \quad j \in I_\varepsilon , \quad (40)$$

gdje su u_j Lagrangeovi množitelji proizašli iz rješenja kvadratnoga podzadatka, a početna vrijednost za r neki proizvoljni pozitivni broj. Pravilo (39)-(40) osigurava nužan uvjet globalne konvergencije algoritma:

$$r \geq r^* , \quad (41)$$

ali tijekom postupka optimiranja izaziva vrlo velike vrijednostima popravnoga parametra, što se nepovoljno odražava na njegovu djelotvornost. Stoga su, umjesto (39), Tseng i Arora [42] predložili drugo pravilo:

$$r = r^* . \quad (42)$$

Tijekom izrade ovoga rada ispitana su oba pravila. Zbog boljih ostvarenih rezultata konačno je usvojeno pravilo Tsenga i Arore (42).

2.4. UVJET ZAUSTAVLJANJA

Iterativni postupak određivanja rješenja zadataka optimiranja (4)-(7) ponavlja se do zadovoljavanja uvjeta zaustavljanja. Uvjet zaustavljanja predstavlja nužni uvjet koji treba biti zadovoljen kako bi se trenutno rješenje $\mathbf{x}^{(k)}$ moglo smatrati rješenjem zadatka (4)-(7).

Pšeničnij je dokazao [39, 40] kako je kod postupka optimiranja rekursivnim kvadratnim programiranjem:

$$\|\mathbf{d}^{(k)}\| = 0 \quad (43)$$

nužan i dovoljan uvjet da $\mathbf{x}^{(k)}$ zadovoljava Kuhn-Tuckerove nužne uvjete optimalnosti zadatka (4)-(7), pa je za zaustavljanje postupka optimiranja prikladno istodobno zadovoljavanje uvjeta [10]:

$$V^{(k)}(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_v, \quad (44)$$

$$\|\mathbf{d}^{(k)}\| \leq \varepsilon_d, \quad (45)$$

gdje su ε_d i ε_v po volji maleni pozitivni brojevi. U ovom radu se za zaustavljanje postupka optimiranja rabi, pored uvjeta (44), i drugi uvjet [12]:

$$\|\nabla L^{(k)}\| \leq \varepsilon_d, \quad (46)$$

gdje je $\|\nabla L^{(k)}\|$ norma vektora gradijenta Lagrangeove funkcije.

2.5. MJERE POBOLJŠAVANJA SVOJSTAVA POSTUPKA

2.5.1. Poboljšanje početnoga rješenja

Ako je odabrano početno rješenje $\mathbf{x}^{(0)}$ duboko unutar neizvedivoga područja, algoritmu će trebati znatan broj iteracija, a samim tim i veći broj izračunavanja iznosa funkcija cilja i ograničenja, radi približavanja trenutnoga rješenja izvedivom području. U takvim slučajevima Arora [44] predlaže postupak poboljšanja početne točke kojim se, izmjenom kvadratnoga podzadatka, određuje smjer najbržega smanjenja prekoračenja ograničenja.

Nakon što se najveće prekoračenje ograničenja smanji, $V^{(k)}(\mathbf{x}) \leq V_0$, postupak se nastavlja uobičajenim postupkom rekurzivnoga kvadratnoga programiranja.

Zbog smanjenja prekoračenja ograničenja kvadratni se podzadatak (14)-(17) mijenja na način da se (14) zamijeni s:

$$\text{Odrediti minimum } 1/2 \cdot (\mathbf{d}, \mathbf{d}), \quad (47)$$

dok ograničenja (15)-(17) ostaju neizmijenjena. Razlika između (14) i (47) je samo u isključivanju gradijenta funkcije cilja, što rezultira smjerom pretraživanja \mathbf{d} koji je jednak smjeru \mathbf{d}^2 u jednadžbi (21). Tijekom postupka poboljšavanja početnoga rješenja ne vrši se nikakvo utočnjavanje matrice \mathbf{H} , već se svo vrijeme podrazumijeva $\mathbf{H} = \mathbf{I}$. Isto tako, tijekom poboljšanja početne točke ne vrši se nikakvo usmjereno pretraživanje, već se nova točka određuje izravno iz:

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{d}^{(k)}, \quad (48)$$

neovisno o mogućem porastu funkcije spuštanja. Iznos graničnoga prekoračenja ograničenja V_0 treba pažljivo odabrati kako se premalim iznosom ne bi toliko povećala funkcija cilja da se poništi koristan učin smanjenja prekoračenja ograničenja [43].

2.5.2. Granični broj pokušaja pri usmjerenom pretraživanju

Postupak određivanja veličine koraka α^* provodi se do zadovoljavanja uvjeta spuštanja (38). U slučajevima lošega smjera pretraživanja \mathbf{d} (zbog gubitka pozitivne određenosti matrice \mathbf{H} , neprikladnoga skupa djelatnih ograničenja ili nagomilane greške računanja), broj pokušaja određivanja veličine koraka može biti vrlo velik, ako uopće dođe do rješenja, što se izuzetno loše odražava na brzinu konvergencije. Zato se čini razboritom mjera ograničavanja broja pokušaja pri usmjerenom pretraživanju [10, 42], nakon kojega se

postupak pretraživanja prekida, a smjer odbacuje. Nakon toga se pristupa određivanju novoga smjera, obično obnavljanjem $\mathbf{H} = \mathbf{I}$ ili proširivanjem skupa djelatnih ograničenja, a ako se ni tada ne odredi veličina koraka pretraživanja, postupak optimiranja se prekida [7, 42].

Granični broj pokušaja n_{smax} uvjetovan je normom vektora smjera pretraživanja $\|\mathbf{d}\|$ i prema [42] određen je slijedećim pravilima:

- a) Ako je $\|\mathbf{d}\| \leq 0.01$, onda je $n_{\text{smax}} = 6$
 $0.01 < \|\mathbf{d}\| \leq 0.1$ $n_{\text{smax}} = 8$
 $0.1 < \|\mathbf{d}\| \leq 100$ $n_{\text{smax}} = 10$
 $100 < \|\mathbf{d}\| \leq 1000$ $n_{\text{smax}} = 16$
 $1000 < \|\mathbf{d}\|$ $n_{\text{smax}} = 20$
- b) Ako je trenutno rješenje izvedivo, a parametar r je manji od jedan, onda je $n_{\text{smax}} = 3 \cdot n_{\text{smax}} / 2$,
- c) Ako je u prošloj iteraciji ostvareno n_{smax} pokušaja, onda se postavlja $n_{\text{smax}} = 2 \cdot n_{\text{smax}}$,
- d) Ako je $n_{\text{smax}} > 20$, postavlja se $n_{\text{smax}} = 20$.

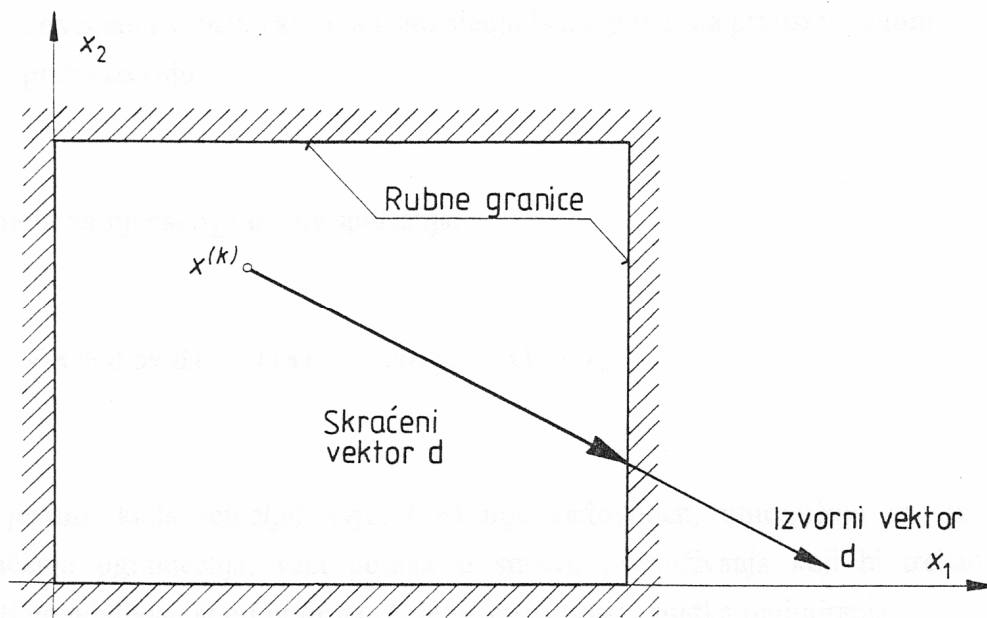
2.5.3. Zadržavanje varijabli unutar rubnih granica

Prilikom usmjerenoga pretraživanja moguće su pojave prekoračenja rubnih granica varijabli (17), što može dovesti do neželjenih posljedica izračunavanja funkcija izvan područja određenosti. Zato je u ovom radu primijenjena tehnika ograničavanja vektora smjera pretraživanja \mathbf{d} radi zadržavanja varijabli unutar rubnih granica (Slika 2.) [52]:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d} \cdot (x_{Ui} - x_i) / d_i, \quad \text{ako je } x_i + d_i > x_{Ui}, \quad (49)$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{d} \cdot (x_{Li} - x_i) / d_i, \quad \text{ako je } x_i + d_i < x_{Li}, \quad (50)$$

gdje i ide od 1 do n .



Slika 2. Ograničavanje vektora pomaka radi zadržavanja unutar rubnih granica [52]

2.5.4. Postupak za slučaj lošega smjera pretraživanja

Pri rješavanju slabo uvjetovanih zadataka optimiranja česte su pojave nemogućnosti određivanja veličine koraka α^* koje udovoljavaju postavljenim uvjetima spuštanja (37) ili (38), što je posljedica neprikladno odabranoga smjera pretraživanja \mathbf{d} . Jedan pristup rješavanju ovih poteškoća, na prijedlog Arore i suradnika [7, 42], dan je poglavlju 2.5.2. Primjenom ovoga prijedloga (predložena tehnika u nekim zadacima je dala rezultata, ali u drugima nije) polučen je provedenim istraživanjem polovičan uspjeh pa je, stoga, predložen drugačiji pristup.

Novi pristup rješavanju poteškoća u slučajevima lošega smjera pretraživanja sastoji se u:

- obnavljanju matrice \mathbf{H} jediničnom matricom i povećanju skupa djelatnih ograničenja radi određivanja boljšega smjera (isto kao i u prijedlogu Arore i suradnika [7, 42]),
- uvođenju zamjenskoga, labavijega, uvjeta spuštanja,
- povećanju veličine koraka i smanjenju broja pokušaja pri usmjerenom pretraživanju.

Uvođenjem zamjenskoga uvjeta spuštanja:

$$V(\mathbf{x} + 0.5q \mathbf{d}) < V(\mathbf{x}) , \quad \text{ako je } V(\mathbf{x}) > \varepsilon_v , \quad (51)$$

u slučajevima kada temeljni uvjet (38) nije zadovoljen, omogućuje se, uz smanjenje prekoračenja ograničenja, veći pomak u smjeru pretraživanja koji bi trebao povoljno djelovati na udaljavanje od područja loše uvjetovanosti zadatka optimiranja.

Postupak prevladavanja posljedica lošega smjera pretraživanja obilježen je velikim brojem neuspjelih pokušaja određivanja veličine koraka α^* , što ima za posljedicu brojna izračunavanja funkcija cilja i ograničenja. Radi smanjenja ovoga broja, u uvjetu spuštanja (37) ili (38), predlažem promjenjivu veličinu pokusnoga koraka usmjerenoga pretraživanja, kao i promjenjivi granični broj pokušaja usmjerenoga pretraživanja n_{smax} . Različite veličine pokusnoga koraka, kao i broja pokušaja, bi se rabile u ovisnosti o trenutnomu stanju postupka optimiranja, pri čemu razlikujem tri stanja:

- A - Redovno napredovanje k rješenju
- B - Slučaj lošega smjera
- C - Prva iteracija nakon slučaja lošega smjera

Veličine pokusnoga koraka, kao i broj pokušaja usmjerenoga pretraživanja, za svaki od tri navedena slučaja, dani su u tablici I.

Tablica I. Veličine pokusnoga koraka i graničnoga broja pokušaja u ovisnosti o trenutnom stanju postupka optimiranja

Stanje postupka optimiranja		A [42]	B	C
Veličina pokusnoga koraka		$(1/2)q$	$(1/4)q$	$(1/3)q$
n_{smax}	$\ \mathbf{d}\ \leq 0.01$	6	4	5
	$0.01 < \ \mathbf{d}\ \leq 0.1$	8	5	6
	$0.1 < \ \mathbf{d}\ \leq 100$	10	6	7
	$100 < \ \mathbf{d}\ \leq 1000$	16	9	11
	$1000 < \ \mathbf{d}\ $	20	12	13

2.6. ALGORITAM POSTUPKA OPTIMIRANJA REKURZIVNIM KVADRATNIM PROGRAMIRANJEM

Izloženi postupak optimiranja rekurzivnim kvadratnim programiranjem može se prikazati slijedećim algoritmom:

Korak 1. Početno stanje: Odabrati iznose parametara $\delta > 0$, $V_0 > 0$, $c_0 > 0$, $\varepsilon_v > 0$, $\varepsilon_d > 0$ i početnoga rješenja $\mathbf{x}^{(0)}$. Postaviti $\mathbf{H}^{(0)} = \mathbf{I}$ i $k = 0$.

Korak 2. Poboljšanje početnoga rješenja:

2.1. Odrediti iznose svih ograničenja (5), (6) i (7).

2.2. Najveće prekoračenje ograničenja, (10), označiti s $V(\mathbf{x}^{(0)})$.

2.3. Ako je $V(\mathbf{x}^{(0)})$ manje ili jednako V_0 , postaviti $k = k + 1$

i nastaviti s korakom 3.

2.4. Ako je $V(\mathbf{x}^{(0)})$ veće od V_0 , ponavljati:

2.4.1. Odrediti skup djelatnih ograničenja \mathbf{I}_ε (18).

2.4.2. Izračunati gradijente djelatnih ograničenja (18), \mathbf{G}^j , $j \in \mathbf{I}_\varepsilon$.

2.4.3. Oblikovati kvadratni podzadatak minimiranja funkcije (47) uz zadovoljavanje skupa djelatnih ograničenja (15), (16) i (17).

- 2.4.4. Riješiti kvadratni podzadatak. Rješenje je vektor pomaka $\mathbf{d}^{(k+1)}$.
- 2.4.5. Ako se točka $\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}^{(k+1)}$ nalazi unutar rubnih granica (7), nastaviti s točkom 2.4.7.
- 2.4.6. Ako se točka $\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}^{(k+1)}$ ne nalazi unutar rubnih granica (7), primjenom (49) i (50) skratiti vektor $\mathbf{d}^{(k+1)}$.
- 2.4.7. Postaviti $k = k + 1$.
- 2.4.8. Primjenom (48) odrediti novu točku $\mathbf{x}^{(k)}$.
- 2.4.9. Odrediti iznose svih ograničenja (5), (6) i (7).
- 2.4.10. Najveće prekoračenje ograničenja (10) označiti s $V(\mathbf{x}^{(k)})$.
- 2.4.11. Ako je $V(\mathbf{x}^{(k)})$ manje ili jednako V_0 , postaviti $k = k + 1$ i nastaviti s korakom 3.
Ako je $V(\mathbf{x}^{(k)})$ veće od V_0 , nastaviti s korakom 2.4.1.

Korak 3. Smjer pretraživanja:

- 3.1. Odrediti skup djelatnih ograničenja $I_{\mathcal{E}}$ (18).
- 3.2. Izračunati vektor gradijenta funkcije cilja (4), \mathbf{G}^0 .
- 3.3. Izračunati gradijente djelatnih ograničenja (18), $\mathbf{G}^j, j \in I_{\mathcal{E}}$.
- 3.4. Oblikovati kvadratni podzadatak minimiranja funkcije (14) uz zadovoljavanje skupa djelatnih ograničenja (15), (16) i (17).
- 3.5. Riješiti kvadratni podzadatak. Rješenje su vektor pomaka $\mathbf{d}^{(k)}$ i Lagrangeovi množitelji $u_j^{(k)}, j \in I_{\mathcal{E}}$.
- 3.6. Odrediti vektor gradijenta Lagrangeove funkcije, (23).

Korak 4. Provjera uvjeta zaustavljanja:

- 4.1. Ako je najveće prekoračenje ograničenja $V(\mathbf{x}^{(k)})$ veće od ε_V , nastaviti s korakom 5.
- 4.2. Odrediti Euklidove norme vektora pomaka $\|\mathbf{d}^{(k)}\|$ i vektora gradijenta Lagrangeove funkcije $\|\nabla L^{(k)}\|$.
- 4.3. Ako je zadovoljen bar jedan od uvjeta: $\|\mathbf{d}^{(k)}\| \leq \varepsilon_d, \|\nabla L^{(k)}\| \leq \varepsilon_d$, trenutna točka $\mathbf{x}^{(k)}$ predstavlja rješenje zadatka optimiranja (4)-(7). Prekinuti postupak.

Korak 5. Usmjereno pretraživanje:

- 5.1. Primjenom (40) odrediti iznos popravno­ga parametra r (42).
- 5.2. Izračunati iznos funkcije spuštanja $F(\mathbf{x}^{(k-1)})$, (9).
- 5.3. Ako se točka $\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{d}^{(k)}$ nalazi unutar rubnih granica (7), nastaviti s točkom 5.5.
- 5.4. Ako se točka $\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{d}^{(k)}$ ne nalazi unutar rubnih granica (7), primjenom (49) i (50) skratiti vektor $\mathbf{d}^{(k)}$.
- 5.5. Pomoću tablice I. odrediti temeljnu veličinu pokusnoga koraka α (1/2 ili 1/3) i granični broj pokušaja n_{smax} .
- 5.6. Ponavljati najviše n_{smax} puta, pri čemu q ide od 0 do $(n_{\text{smax}}-1)$:
 - 5.6.1. Odrediti pokusnu točku $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + \alpha q \cdot \mathbf{d}^{(k)}$.
 - 5.6.2. U pokusnoj točki odrediti iznose svih ograničenja (5), (6) i (7).
 - 5.6.3. Najveće prekoračenje ograničenja, (10), označiti s $V(\mathbf{x}^{(k)})$.
 - 5.6.4. U pokusnoj točki odrediti iznos funkcije spuštanja $F(\mathbf{x}^{(k)})$, (9).
 - 5.6.5. Ako je zadovoljen uvjet spuštanja (38), pokusna točka $\mathbf{x}^{(k)}$ postaje novo pretpostavljeno rješenje zadatka. Nastaviti s korakom 6.
- 5.7. Ako za n_{smax} pokušaja nije određena točka koja udovoljava (38), nastao je slučaj lošega smjera pretraživanja:
 - 5.7.1. Postaviti $\mathbf{H}^{(k)} = \mathbf{I}$.
 - 5.7.2. Ponoviti korak 3.
 - 5.7.3. Ponoviti korak 5., pri čemu temeljna veličina pokusnoga koraka iznosi $\alpha = 1/4$, a prihvatljiv uvjet spuštanja, točka 5.6.5., pored (38), postaje i (51).
 - 5.7.4. Ako ponovno nije određena povoljnija točka $\mathbf{x}^{(k)}$, udvostručavati parametar prekoračenja ograničenja $\mathcal{E}(\mathbf{x})$, (13), do proširenja skupa djelatnih ograničenja $\mathbf{I}_{\mathcal{E}}$ s još barem jednim novim ograničenjem. Nastaviti s točkom 5.7.2.
 - 5.7.5. Ako skup djelatnih ograničenja $\mathbf{I}_{\mathcal{E}}$ sadrži sva ograničenja (5), (6) i (7), a prihvatljiva nova točka $\mathbf{x}^{(k)}$ nije određena, slučaj lošega smjera pretraživanja postaje nerješiv. Prekinuti postupak i dojaviti grešku.

Korak 6. Utočnjavanje aproksimacije Hesseove matrice:

- 6.1. Ako je usmjereno pretraživanje, korak 5., dosad izvršeno samo jednom, nastaviti s korakom 7.
- 6.2. Odrediti promjene vektora projektnih varijabli (25) i vektora gradijenata Lagrangeove funkcije (26). Pri oblikovanju (26) se uključuju samo ona ograničenja koja su djelatna u k -toj i $(k-1)$ -oj iteraciji.
- 6.3. Primjenom pomoćnih veličina (27)-(35) odrediti novu aproksimaciju Hesseove matrice Lagrangeove funkcije $\mathbf{H}^{(k+1)}$.
- 6.4. Odrediti svojstvene vrijednosti λ_i matrice $\mathbf{H}^{(k+1)}$, (24), i iznos uvjetovnoga broja c (36).
- 6.5. Ako je $c > c_0$, postaviti $\mathbf{H}^{(k+1)} = \mathbf{I}$.

Korak 7. Nova iteracija: Postaviti $k = k + 1$ i nastaviti s korakom 3.

Na temelju prikazanoga algoritma izrađen je računalni program *RQPOPT*, namijenjen rješavanju općih zadataka optimiranja strojarskih konstrukcija. Program je napisan u dvostrukoj preciznosti na programskom jeziku FORTRAN 77 i izveden je u obliku SUBROUTINE potprograma. Sažeti prikaz pozivanja potprograma i pozivnih argumenata dan je u prilogu (Prilog B).

2.7. PRIMJER PRIMJENE PREDLOŽENOGA POSTUPKA

Rad predloženoga postupka optimiranja prikazat će se na jednomu primjeru iz strojarske svakodnevice [6]. Zadatak je dimenzionirati ravni šuplji stup kružnoga presjeka koji će za zadanu duljinu l i uzdužno opterećenje F imati najmanju masu (Slika 3.). Odabrana konstrukcija mora udovoljavati dopuštenom naprezanju na tlak, kao i sigurnosti od izvijanja.

Zadane veličine i svojstva materijala su:

Dužina stupa	$l = 5 \text{ m}$
Opterećenje	$F = 10 \text{ MN}$
Gustoća materijala	$\rho = 7833 \text{ kg/m}^3$
Modul elastičnosti materijala	$E = 207 \text{ GPa}$

Dopušteno naprezanje $\sigma_{\text{dop}} = 248 \text{ MPa}$

Zadatak optimiranja se može postaviti na više načina u ovisnosti o odabranim projektnim varijablama. Pretpostavi li se tankostjenost stupa [6], za projektne varijable se mogu odabrati debljina stijenke t i srednji polumjer R . Tada su temeljne jednadžbe:

Površina poprečnoga presjeka, m^2	$A = 2 R t \pi$
Moment tromosti presjeka, m^4	$I = R^3 t \pi$
Masa stupa, kg	$m = A l \rho$
Tlačno naprezanje, Pa	$\sigma = F / A$
Kritična sila za izvijanje, N	$F_{\text{kr}} = R^3 E t \pi^3 / (4 l^2)$
Uvjet za tlačno naprezanje	$\sigma \leq \sigma_{\text{dop}}$
Uvjet zaštite od izvijanja	$F \leq F_{\text{kr}}$

Označi li se debljina stijenke s oznakom x_1 , a polumjer cijevi s oznakom x_2 , zadatak optimiranja se može prikazati standardnim matematičkim modelom:

Odrediti 2-dimenzionalni vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, neovisnih varijabli koji minimira funkciju cilja

$$f(\mathbf{x}) = 2.461 \cdot 10^5 x_1 x_2 ,$$

uz zadovoljavanje nejednakosnih ograničenja

$$g_1(\mathbf{x}) \equiv 6.418 \cdot 10^{-3} / (x_1 x_2) - 1 \leq 0 ,$$

$$g_2(\mathbf{x}) \equiv 1 - 6.418 \cdot 10^3 x_1 x_2^3 \leq 0 ,$$

pri čemu je vektor neovisnih varijabli omeđen svojim područjem definicije (donjom granicom \mathbf{x}_L i gornjom granicom \mathbf{x}_U)

$$0 \leq x_1 \leq 0.1 ,$$

$$0 \leq x_2 \leq 0.5 .$$

Funkcija cilja $f(\mathbf{x})$ predstavlja masu stupa, ograničenje $g_1(\mathbf{x})$ predstavlja zaštitu od tlačnoga prenaprezanja, dok $g_2(\mathbf{x})$ predstavlja zaštitu od izvijanja stupa.

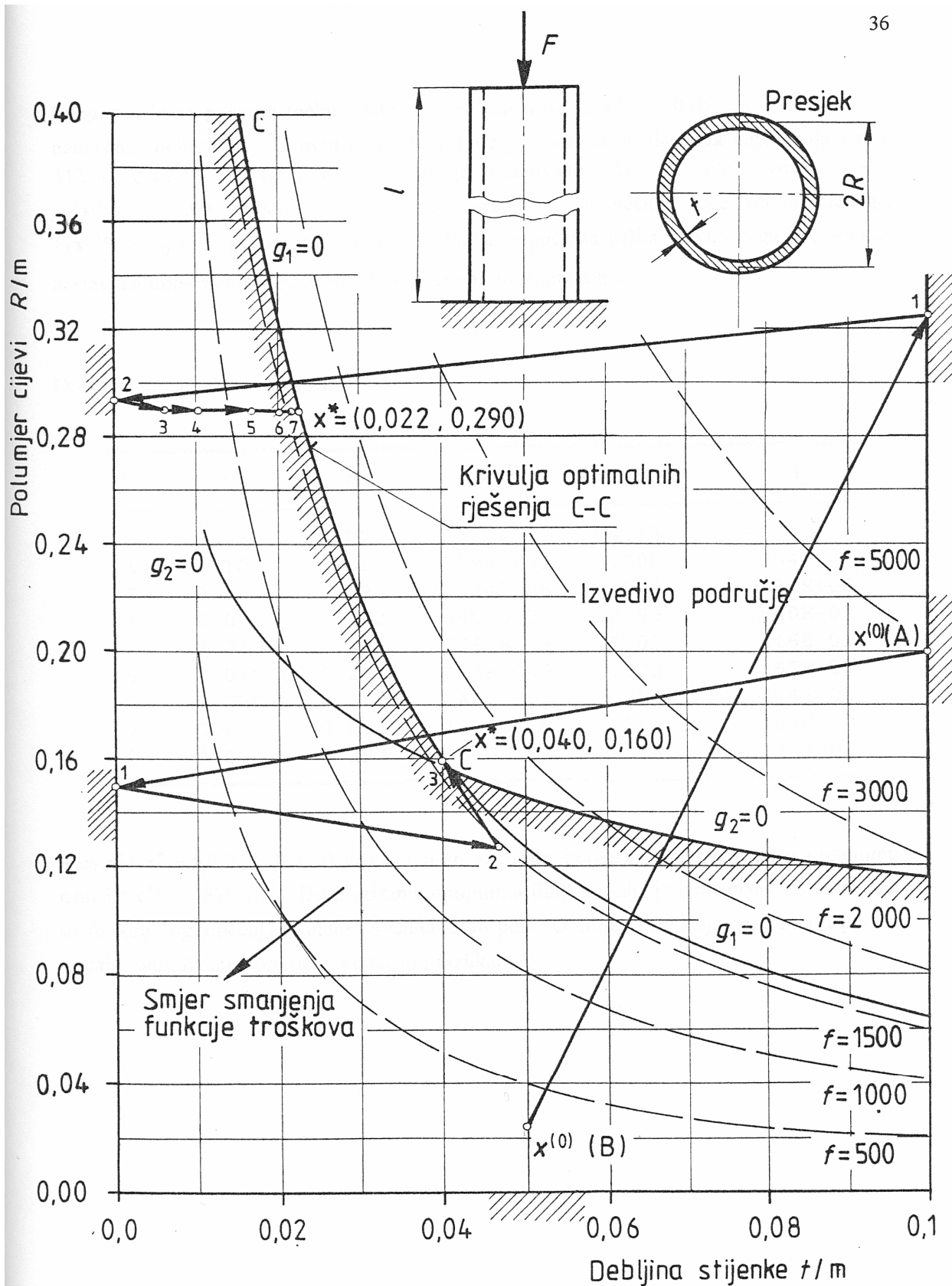
Projektni prostor zadatka je prikazan na slici 3. Izvedivo područje je s donje strane omeđeno ograničenjima $g_1(\mathbf{x})$ i $g_2(\mathbf{x})$, a s gornje strane rubnim granicama projektnih varijabli ($x_1 \leq 0.1, x_2 \leq 0.5$). Za debljine stijenki manje od 40 mm je odlučujuće ograničenje tlačnoga naprezanja $g_1(\mathbf{x})$, dok je za polumjere manje od 160 mm odlučujuće ograničenje kritične sile izvijanja. Zbog "paralelnosti" funkcije cilja $f(\mathbf{x})$ i funkcije ograničenja $g_1(\mathbf{x})$, oblik x_1x_2 , zadatak nema jedno rješenje, već su rješenja svi parovi x_1 i x_2 koji se nalaze na odsječku C-C krivulje $g_1(\mathbf{x})$.

Zadatak optimiranja je riješen računalnim programom *RQPOPT* dvaput iz dvije različite početne točke.

Prvi put je za početnu točku odabrana izvediva točka $\mathbf{x}^{(0)} = (0.1, 0.2)$, na slici 3. označena točkom A. Obilježja pojedinih iteracija su:

k	x_1	x_2	$f(\mathbf{x})$	$V(\mathbf{x})$	$\ \mathbf{d}\ $
0	0.100	0.200	4921.619	.000	-
1	0.000	0.150	.369E-08	.428E+12	.550E+05
2	0.046	0.127	1441.808	.394	.516E-01
3	0.040	0.160	1583.656	.000	.335E-01
4	0.040	0.160	1579.219	.918E-05	.145E-03

Rješenje $\mathbf{x}^* = (0.040, 0.160)$ je postignuto za svega četiri iteracije. Funkcija cilja u optimumu iznosi $f(\mathbf{x}^*) = 1579.219$. Do postizanja optimuma funkcija cilja je izračunana 13 puta, dok su funkcije ograničenja ukupno izračunane 22 puta. Gradijenti funkcija su određivani numerički, konačnim razlikama, uz prirast argumenta $\varepsilon = 10^{-6}$.



Slika 3. Grafički prikaz zadatka optimiranja i njegova rješenja

Drugi put je za početnu točku odabrana neizvediva točka $\mathbf{x}^{(0)} = (0.05, 0.025)$, na slici 3. označena točkom B. U ovoj točki prekoračenje ograničenja tlačnoga naprezanja iznosi 412%, $g_1(\mathbf{x}^{(0)}) = 4.12$, a prekoračenje ograničenja kritične sile izvijanja 99%, $g_2(\mathbf{x}^{(0)}) = 0.99$. Pošto je početno prekoračenje ograničenja veće od graničnoga, $V(\mathbf{x}^{(0)}) > V_0 = 1$, prvom iteracijom je poboljšana početna točka, nakon čega je postupak nastavljen uobičajenim rekurzivnim kvadratnim programiranjem.

Obilježja pojedinih iteracija su:

k	x_1	x_2	$f(\mathbf{x})$	$V(\mathbf{x})$	$\ \mathbf{d}\ $
0	0.050	0.025	307.6012	4.13	-
1	0.100	0.325	7997.631	.000	.304
2	0.000	0.294	.724E-08	.218E+12	.837E+05
3	0.006	0.292	440.0429	2.59	.640E-02
4	0.011	0.292	756.8249	1.09	.446E-02
5	0.016	0.291	1149.949	.373	.557E-02
6	0.020	0.290	1461.903	.803E-01	.444E-02
7	0.022	0.290	1570.439	.560E-02	.155E-02
8	0.022	0.290	1579.184	.313E-04	.125E-03

Rješenje $\mathbf{x}^* = (0.022, 0.290)$ je postignuto za osam iteracija. Funkcija cilja u optimumu iznosi $f(\mathbf{x}^*) = 1579.184$. Do postizanja optimuma funkcija cilja je izračunana 22 puta, dok su funkcije ograničenja ukupno izračunane 38 puta. Gradijenti funkcija su, kao i u prvom slučaju, određivani numerički, konačnim razlikama.

3. PROCJENA VALJANOSTI PREDLOŽENOGA POSTUPKA

S razvojem mnoštva programa za optimiranje javila se i potreba za njihovim vrednovanjem i međusobnim uspoređivanjem. Do danas su provedena mnoga ispitivanja programa za optimiranje, od kojih su najpoznatija ona Easona i Fentona [20], Sandgrena i Ragsdela [21, 22] i Schittkowskoga [23-25]. Sva ova ispitivanja imala su za cilj utvrditi sposobnost postupaka optimiranja za rješavanjem zadataka optimiranja iz svakodnevne tehničke prakse. Ispitivanja su se sastojala iz rješavanja skupa zadataka i mjerenja odabranih obilježja valjanosti.

3.1. IZBOR MJERILA VALJANOSTI

Iako do danas nisu u potpunosti usuglašeni stavovi o tomu koja su najprikladnija mjerila valjanosti postupka optimiranja [53-55], najčešće se rabe:

- Uspješnost rješavanja zadatka,
- Broj izračunavanja funkcija cilja,
- Broj izračunavanja gradijenata funkcija cilja,
- Broj izračunavanja funkcija ograničenja,
- Broj izračunavanja gradijenata funkcija ograničenja,
- Odstupanje rezultata od optimuma, ukoliko je stvarni optimum poznat,
- Prekoračenje ograničenja u optimumu,
- Vrijeme izračunavanja,
- Lakoća uporabe,

pa su ona odabrana i u ovomu radu.

Uspješnost rješavanja zadatka očituje se u zadovoljavanju postavljenih uvjeta zaustavljanja, neovisno da li se radi o lokalnomu ili globalnomu optimumu promatranoga zadatka. Neuspjeh rješavanja zadatka optimiranja očituje se kroz nemogućnost zadovoljavanja ovih uvjeta, uz istodobnu nemogućnost daljnjega napretka postupka optimiranja. Isto tako, neuspjehom se označuje i slučaj prekida postupka optimiranja izazvanoga greškom računanja (prekoračenje brojnoga područja, dijeljenje s nulom i slično).

Broj izračunavanja funkcija cilja i ograničenja, kao i njihovih gradijenata, predstavlja mjerilo djelotvornosti promatranoga postupka. Poželjno obilježje svakoga postupka optimiranja je dovesti do rješenja uz što manji broj izračunavanja funkcija i njihovih gradijenata.

Odstupanje rezultata od optimuma predstavlja mjerilo točnosti promatranoga postupka. Ako je zadatak optimiranja preuzet iz svakodnevne tehničke prakse, stvarni optimum najčešće nije ni poznat, pa se u tom slučaju za usporedbu može prihvatiti najbolji rezultat postignut nekim drugim postupkom.

Prekoračenje ograničenja u optimumu predstavlja još jedno mjerilo točnosti promatranoga postupka. Ovo obilježje se obično mjeri zbrojem prekoračenja svih ograničenja [20-25], dok je u ovomu radu, po uzoru na [42-43], za mjerilo prekoračenja ograničenja odabrano granično prekoračenje $V(\mathbf{x})$.

Vrijeme izračunavanja, odnosno vrijeme rada računala do postizanja rješenja, je mjerilo ograničena značaja. Iako se navodi u skoro svim ispitivanjima, zbog različitosti uporabljenih računala, operativnih sustava i prevodnika, njegovo praktično značenje je dvojbeno [53].

Lakoća uporabe je vrlo važno mjerilo valjanosti postupka optimiranja, ponajprije s gledišta korisnika koji nije stručnjak za optimiranje. Međutim ovo obilježje je istodobno i vrlo teško mjerljivo [23], pa se u ovomu radu ono iskazuje potrebom ugađanja parametara postupka optimiranja.

3.2. IZBOR ZADATAKA OPTIMIRANJA

Izbor zadataka optimiranja od ključne je važnosti za pravilnu procjenu valjanosti promatranoga postupka optimiranja. U literaturi se često susreću teorijski zadaci koji imaju prednost poznavanja točnoga rješenja, ali i nedostatak odražavanja uvjeta svojstvenih stvarnim zadacima optimiranja. S obzirom da je cilj ovoga rada ustvrditi valjanost predloženoga postupka rekurzivnoga kvadratnoga programiranja u optimiranju strojarskih konstrukcija, za potrebe ispitivanja su iz raspoložive literature odabrani samo oni primjeri koji su nastali rješavanjem stvarnih tehničkih zadataka.

Odabrani zadaci optimiranja preuzeti su iz [56, 57] i sažeto su prikazani u tablici II, dok je njihov potpun prikaz dan u prilogu (Prilog C). Značenje pojedinih stupaca u tablici II je sljedeće:

Br.	Redni broj zadatka
TP	Redni broj zadatka u izvoru [56] ili [57]
Zadatak	Opis zadatka optimiranja
N	Broj varijabli
MI	Broj nejednakosnih ograničenja
ME	Broj jednakosnih ograničenja
MB	Broj rubnih ograničenja varijabli
O	Oblik funkcije cilja:
	L Linearna
	Q Kvadratna
	P Polinomska
	G Opća
C	Oblik funkcije ograničenja:
	B Rubno ograničenje
	(ostale oznake odgovaraju onima opisanima za funkcije cilja)
F	Oznaka izvedivosti početnoga rješenja:
	F Izvedivo početno rješenje
	N Neizvedivo početno rješenje

Tablica IV. Rezultati ostvareni polaznom izvedbom potprograma *RPOPT* (autorovo viđenje i rekonstrukcija izvornoga *PLBA* postupka)

BR	INFO	NIT	NFE	NGE	NFGE	NGGE	F	DGX	DFX	CPUT
1	0	10	19	38	10	20	135.0760	.258E-08	.130E-05	.06
2	0	16	18	108	16	63	3.951163	.117E-07	-.164E-07	.11
3	2	1761	23710	142266	1760	10269	7401.587	.622E-01	352.	17.30
4	0	23	74	444	23	138	5055.012	.131E-06	-.289E-04	.33
5	0	26	38	114	26	78	-47.76107	.564E-16	-.535E-01	.27
6	2	11	240	2640	11	166	-1797.307	.217E-01	-28.5	.33
7	0	4461	37974	569625	4460	58901	97.58753	.116E-06	-.884E-03	151.32
8	0	16	25	0	16	0	1.744152	.000	.559E-08	.00
9	0	10	7	11	6	10	1.620583	.460E-08	.190E-07	.06
10	0	52	204	288	0	0	114.9511	.000	.935E-03	1.86
11	2	3	153	306	3	17	-7.700510	.317	-2.02	.00
12	0	79	371	375	0	0	36.97084	.000	.399E-04	.28
13	0	8	42	138	0	0	2.381165	.131E-08	-.376E-07	.00
14	2	1	6	364	0	0	.2708000	.000	.850E-02	.71
15	0	24	178	220	0	0	.6060026E-01	.367E-06	.616E-07	.72
16	2	4	182	3080	0	0	1122.070	.107E-01	418.	.11
17	0	332	768	11520	332	1789	-4430.088	.363E-13	.792	3.29
18	2	8	127	381	8	25	1.232247	.228	-1.94	.17
19	0	108	5416	16536	0	0	.8633802	.588E-07	.255E-06	100.07

G	Oznaka načina određivanja derivacija funkcija:
	A Derivacije se određuju analitički
	N Derivacije se određuju numerički
FUNCT	Najbolje poznato rješenje funkcije cilja
CV	Iznos zbroja prekoračenja ograničenja u najboljem poznatom rješenju

3.3. IZVOĐENJE POKUSA

Računski pokusi izvedeni su na računalu DIGITAL VENTURIS 466 (IBM PC odgovarajuće računalo s procesorom 80486, koprocetorom i unutarnjim satom frekvencije 66 MHz) pod DOS 6.2 operativnim sustavom. Potprogram *RQPOPT*, zajedno s pripadnim glavnim programom, preveden je 32-bitnim prevodnikom Microsoft FORTRAN Power Station 1.0. Vremena izvođenja mjerena su ugrađenim DOS satom razlučivosti 1/18 (0.055) sekunde.

Zbog namjere da se pokusima ustvrdi stvarna pouzdanost postupka optimiranja, prilagođena uvjetima uporabe programa od strane projektanta, nestručnjaka za teoriju optimiranja, svi zadaci su riješeni s istim skupom parametara postupka optimiranja. Ovakav način rada ponekad ne ostvaruje najbolje rezultate, ali jamačno iskazuje sposobnost postupka za rješavanjem različitih zadataka. Odabrani parametri postupka optimiranja dani su u tablici III.

Tablica III. Odabrani parametri postupka optimiranja

Opis	Iznos
Granično početno prekoračenje ograničenja V_0	1.0
Parametar prekoračenja ograničenja δ	0.1
Početni iznos popravnooga parametra r	1.0
Granični uvjetovni broj Hesseove matrice c_0	10^8
Prirast argumenta pri numeričkoj diferencijaciji ε	10^{-6}
Uvjet zaustavljanja ε_v	10^{-3}
Uvjet zaustavljanja ε_d	10^{-3}

Sve funkcije ograničenja su, ako je to bilo moguće, isprogramirane u svom normiranom obliku, tj. podijeljene sa svojim graničnim iznosom [6]. Time se, pored bolje uvjetovanosti zadatka optimiranja [44], postiže i zoran uvid u iznos prekoračenja ograničenja. Na primjer, prekoračenje ograničenja naprezanja normirana iznosa 0.05 pokazuje da je u promatranoj točki stvarno naprezanje veće od dopuštenoga za 5% .

3.4. REZULTATI

Rezultati ostvareni primjenom potprograma *RQPOPT* dani su u tablicama IV, V i VI. Tablica IV sadrži rezultate postignute polaznom izvedbom potprograma *RQPOPT* koja predstavlja autorovo viđenje postupka Pšeničnoga [39, 40], poboljšanoga dopunama Arore i suradnika [7, 8, 10, 41-43]. Tablica V daje rezultate za slučaj dopune izvornoga postupka usmjerenoga pretraživanja postupkom objedinjavanja kubne i kvadratne interpolacije s postupkom zlatnoga reza, dok tablica VI sadrži konačne rezultate, ostvarene dopunom izvornoga postupka s predloženim postupkom za slučaj lošega smjera pretraživanja.

Značenje pojedinih stupaca u tablicama IV, V i VI je slijedeće:

BR	Redni broj zadatka
INFO	Dojavnik stanja obrade: INFO = 0 Postignut optimum (zadovoljeni uvjeti zaustavljanja) INFO = 2 Prekid proračuna zbog nemogućnosti pronalaženja povoljnijega rješenja
NIT	Broj iteracija
NFE	Broj izračunavanja funkcije cilja
NGE	Broj izračunavanja funkcija ograničenja (posebno se broji izračunavanje svake funkcije ograničenja)
NFGE	Broj izračunavanja gradijenta funkcije cilja (ako se gradijent određuje numerički, potreban broj izračunavanja funkcije cilja je pribrojen NFE)
NGGE	Broj izračunavanja gradijenata funkcija ograničenja, pri čemu se posebno broji izračunavanje svakoga od gradijenata (ako se gradijenti određuju numerički, potreban broj izračunavanja ograničenja je pribrojen NGE)

F	Iznos funkcije cilja u postignutom optimumu
DGX	Iznos najvećega prekoračenja ograničenja $V(\mathbf{x})$ u postignutom optimumu
DFX	Odstupanje postignuta rezultata (razlika iznosa funkcije cilja u postignutom optimumu i iznosa funkcije cilja u najboljem poznatom rezultatu, tablica II)
CPUT	Vrijeme izračunavanja, s

3.4.1. Polazna izvedba postupka optimiranja rekurzivnim kvadratnim programiranjem

Rezultati proračuna polaznom izvedbom postupka optimiranja rekurzivnim kvadratnim programiranjem dani su u tablici IV. Od 19 zadataka uspješno je riješeno 13 zadataka, promatrano kroz zadovoljavanje postavljenih uvjeta zaustavljanja. Svi neriješeni zadaci (zadaci br. 3, 6, 11, 14, 16 i 18) nisu riješeni zbog nemogućnosti programa da pronađe povoljniju točku napredovanja. Rješavanje ni jednoga zadatka nije prekinuto zbog greške računanja.

Kod svih 13 uspješno riješenih zadataka je postignuto, u okvirima tražene točnosti, najbolje poznato rješenje. U 10 zadataka je rješenje postignuto za manje od 100 iteracija, uz vrlo malen broj izračunavanja funkcija i njihovih gradijenata. Preostala tri zadatka (7, 17 i 19) su riješena uz znatniji računski napor, pri čemu naročito odstupa zadatak br. 7 s 4461 iteracijom.

Od šest neriješenih zadataka samo u jednom slučaju, zadatak br. 14, nije ostvaren nikakav napredak prema rješenju. Kod četiri zadatka (3, 11, 16 i 18) je došlo do prekida daleko od rješenja, dok je kod jednoga (zadatak br. 6), do prekida došlo u neposrednoj blizini rješenja.

Kod zadatka br. 14 nije ostvaren nikakav pomak prema rješenju jer je gradijent funkcije cilja, u izvedivoj početnoj točki, numerički određivano, bio jednak nuli. Uzrok tomu je izuzetna "položnost" funkcije cilja koju postupak, uz odabrani prirast argumenta pri numeričkoj diferencijaciji od 10^{-6} , nije bio u stanju razriješiti.

Tablica V. Rezultati ostvareni nakon dopune izvornoga postupka usmjerenoga pretraživanja postupkom objedinjavanja kubne i kvadratne interpolacije s postupkom zlatnoga reza

BR	INFO	NIT	NFE	NGE	NFGE	NGGE	F	DGX	DFX	CPUT
1	0	10	38	76	10	20	135.0760	.188E-08	.140E-05	.05
2	0	18	51	306	18	71	3.951163	.289E-08	-.124E-07	.17
3	2	16467	297101	1782612	16466	98561	7049.597	.401E-08	.266	218.77
4	0	7	17	102	7	42	5055.012	.151E-06	-.644E-04	.11
5	0	29	64	192	29	87	-47.76108	.475E-16	-.535E-01	.33
6	2	12	267	2937	12	172	-1793.752	.207E-01	-24.9	.38
7	2	5933	59910	898665	5932	87964	151.2349	.280E-04	53.3	237.06
8	0	5	25	0	5	0	1.747118	.000	.297E-02	.00
9	0	10	7	11	6	10	1.620583	.460E-08	.190E-07	.05
10	2	34	369	680	0	0	114.9499	.212E-04	-.715E-04	3.25
11	2	3	153	306	3	17	-7.700293	.317	-2.02	.05
12	0	96	714	718	0	0	36.97084	.000	.399E-04	.44
13	0	8	50	178	0	0	2.381165	.173E-13	-.358E-07	.00
14	2	1	6	364	0	0	.2708000	.000	.850E-02	.71
15	0	23	229	448	0	0	.6060023E-01	.172E-07	.313E-07	.88
16	2	4	182	3080	0	0	1122.084	.107E-01	418.	.11
17	0	414	2343	35145	414	2838	-4430.088	.198E-12	.792	5.11
18	2	18	261	783	18	45	1.255255	.223	-1.91	.32
19	0	105	5270	15954	0	0	.8633803	.328E-07	.360E-06	97.72

3.4.2. Usmjereno pretraživanje predloženim postupkom objedinjavanja kubne i kvadratne interpolacije s postupkom zlatnoga reza

Tablica V daje rezultate ostvarene dopunom postupka usmjerenoga pretraživanja uvođenjem kubne i kvadratne interpolacije s postupkom zlatnoga reza. Od 19 zadataka uspješno je riješeno 11 zadataka, dok je preostalih osam (zadaci br. 3, 6, 7, 10, 11, 14, 16 i 18) ostalo neriješeno zbog nemogućnosti postupka da pronađe povoljniju točku napredovanja. Rješavanje ni jednoga zadatka nije prekinuto zbog greške računanja.

Kod svih 11 uspješno riješenih zadataka je postignuto, u okvirima tražene točnosti, najbolje poznato rješenje. U 9 zadataka je rješenje postignuto za manje od 100 iteracija, uz vrlo malen broj izračunavanja funkcija i njihovih gradijenata. Preostala dva zadatka (17 i 19) su riješena uz znatniji računski napor (105, odnosno 414 iteracija).

Od osam neriješenih zadataka samo u jednom slučaju, zadatak br. 14, nije ostvaren nikakav napredak prema rješenju. Uzrok je obrazložen u poglavlju 3.4.1. Kod četiri zadataka (7, 11, 16 i 18) je došlo do prekida daleko od rješenja, dok je kod preostala tri (3, 6 i 10), do prekida došlo u neposrednoj blizini rješenja.

Usporede li se ostvareni rezultati s rezultatima temeljne izvedbe postupka optimiranja (Tablica IV), može se uočiti slijedeći upliv predloženoga postupka:

- Podjednaki rezultati su ostvareni kod sedam zadataka (1, 6, 9, 11, 14, 16 i 18),
- Poboljšanje je ostvareno kod četiri zadatka (3, 4, 8 i 19),
- Pogoršanje je ostvareno kod osam zadataka (2, 5, 7, 10, 12, 13, 15 i 17). Posebnu težinu ima činjenica da su dva zadatka (7 i 10), ranije uspješno riješena, sada ostala neriješena, štoviše uz značajno povećanje broja iteracija i broja izračunavanja funkcija i gradijenata.

Tablica VI. Rezultati ostvareni dopunom izvornoga postupka s predloženim postupkom za slučaj lošega smjera pretraživanja (konačna izvedba potprograma *ROOPT*)

BR	INFO	NIT	NFE	NGE	NFGE	NGGE	F	DGX	DFX	CPUT
1	0	10	19	38	10	20	135.0760	.258E-08	.130E-05	.00
2	0	16	18	108	16	63	3.951163	.117E-07	-.164E-07	.11
3	0	10413	117206	703242	10412	62013	7049.249	.117E-12	-.816E-01	96.33
4	0	23	74	444	23	138	5055.012	.131E-06	-.289E-04	.28
5	0	26	38	114	26	78	-47.76107	.564E-16	-.535E-01	.28
6	0	3049	24442	268862	3049	33502	-1768.800	.153E-12	.661E-02	79.37
7	0	4789	36195	542940	4788	63386	97.58754	.842E-08	-.867E-03	163.40
8	0	16	25	0	16	0	1.744152	.000	.559E-08	.00
9	0	10	7	11	6	10	1.620583	.460E-08	.190E-07	.00
10	0	52	199	278	0	0	114.9511	.000	.990E-03	1.82
11	0	29	200	400	29	57	-5.689543	.837E-03	-.476E-02	.06
12	0	79	371	375	0	0	36.97084	.000	.399E-04	.22
13	0	8	42	138	0	0	2.381165	.131E-08	-.376E-07	.06
14	2	1	6	364	0	0	.2708000	.000	.850E-02	.71
15	0	24	178	220	0	0	.6060026E-01	.367E-06	.616E-07	.71
16	0	18	185	2716	0	0	1227.226	.842E-15	523.	.33
17	0	332	768	11520	332	1789	-4430.088	.363E-13	.792	3.30
18	0	74	319	957	74	163	3.168889	.194E-07	.299E-03	1.32
19	0	108	5400	16488	0	0	.8633802	.588E-07	.255E-06	99.64

3.4.3. Primjena postupka za slučaj lošega smjera pretraživanja

Rezultati proračuna za slučaj kada se temeljni postupak dopuni postupkom za slučaj lošega smjera pretraživanja pregledno su dani u tablici VI, dok je potpun ispis rezultata dan u prilogu (Prilog D). Od ukupno 19 zadataka uspješno je riješeno njih 18, dok je samo zadatak br. 14 ostao neriješen zbog nemogućnosti programa da pronade povoljniju točku napredovanja (uzrok je obrazložen u poglavlju 3.4.1.).

Od 18 uspješno riješenih zadataka njih 17, u okvirima tražene točnosti, bilježi najbolja poznata rješenja, dok je samo jedan zadatak, zadatak br. 16, riješen s točkom lokalnoga optimuma.

Kod 13 zadataka je rješenje postignuto za manje od 100 iteracija, uz vrlo malen broj izračunavanja funkcija i njihovih gradijenata. Preostalih pet zadataka (3, 6, 7, 17 i 19) je riješeno uz znatniji računski napor, što je posebno izraženo kod zadataka br. 3, 6 i 7, kada je do rješenja utrošeno više tisuća iteracija.

Predloženi postupak je kod dva ranije riješena zadatka, br. 10 i 19, polučio napredak, promatrano kroz manji broj izračunavanja funkcija cilja i ograničenja. Međutim glavno postignuće predloženoga postupka je uspješno rješavanje pet od šest ranije neriješenih zadataka. Pri tomu su tri zadatka, zadaci br. 11, 16 i 18, riješena vrlo lako (29, 18 i 74 iteracije), dok su preostala dva, zadaci br. 3 i 6, riješena uz znatan računski napor (10413 i 3049 iteracija).

Ukupno promatrano, predloženom izmjenom se značajno poboljšavaju svojstva temeljnoga postupka, kako kroz smanjenje izračunavanja funkcija i gradijenata, tako i kroz povećanje uspješnosti u rješavanju zadataka optimiranja.

4. RASPRAVA

U radu je predložen i razrađen postupak za optimiranje strojarskih konstrukcija utemeljen na rekurzivnom kvadratnom programiranju, postupku koji je označio posljednje desetljeće razvoja teorije i prakse optimiranja. Za polazište je odabran postupak optimiranja kako je opisan u radovima Pšeničnoga, Lima, Belegundua i Arore [39-43]. Izvorni postupak je obogaćen dvjema dopunama: postupkom usmjerenoga pretraživanja koji se koristi kubnom i kvadratnom interpolacijom i postupkom zlatnoga reza radi ubrzavanja konvergencije postupka k rješenju, i postupkom svladavanja poteškoća koje nastaju u slučaju lošega smjera pretraživanja.

4.1. POSTIGNUĆA PREDLOŽENIH IZMJENA POSTUPKA OPTIMIRANJA

Primjena postupka interpolacije tijekom usmjerenoga pretraživanja je poznato i često korišteno sredstvo poboljšavanja svojstava postupaka optimiranja [4, 6, 14-15]. Za razliku od klasičnih determinističkih postupaka optimiranja koji se koriste "egzaktnim" usmjerenim pretraživanjem, suvremeni postupci optimiranja se često služe "neegzaktnim" usmjerenim pretraživanjem, kod kojega je postupak interpolacije rjeđe zastupljen [4, 51]. Namjera prijedloga objedinjavanja postupka interpolacije s neegzaktnim usmjerenim pretraživanjem, kakvo je primijenjeno u radu Pšeničnoga, bila je iskorištavanje dobrih svojstava svakoga od ovih postupaka. Takav pristup primijenjen je, na primjer, u radovima Schittkowskoga [35-38]. Postignuti rezultati (Tablica V), međutim, nisu opravdali očekivanja. Ostvarena poboljšanja, kod pojedinih zadataka, zasjenjena su značajnim pogoršanjima, uočenima pri rješavanju nekih drugih zadataka. Zanimljivo je da je sličnu pojavu, ali u blažem obliku, uočio i Arora sa suradnicima [44]. Za daljnji rad je, stoga, zadržana izvorna izvedba usmjerenoga pretraživanja, bez primjene postupka predviđanja podobne točke usmjerenoga pretraživanja.

Pojava lošega smjera pretraživanja obilježena je nemogućnošću pronalaženja, u zadanom smjeru, točke napredovanja postupka optimiranja. Smjer pretraživanja određen je kvadratnim podzadatkom, pa je njegova neprikladna vrijednost izravna posljedica neodgovarajućega kvadratnoga podzadatka. Neodgovarajući kvadratni podzadatak može biti određen netočnom ili slabo uvjetovanom Hesseovom matricom Lagrangeove funkcije, kao i lineariziranim ograničenjima. S obzirom da kvadratni podzadatak po postupku Pšeničnoga uključuje samo podskup svih ograničenja, za očekivati je veću mogućnost pojava loših smjerova pretraživanja. Arora i suradnici [42] su predložili svoj postupak za svladavanje poteškoća u slučaju pojave lošega smjera (poglavlje 2.5.2.). Međutim, i pored primjene ovoga postupka, čak šest zadataka, od ukupno 19, je ostalo neriješeno zbog nemogućnosti pronalaženja povoljnije točke napredovanja (Tablica IV). Zanimljivo je da takva pojava nije izvješćena u radovima Arore i suradnika. Štoviše, na temelju nekih pokazatelja [44] dalo bi se zaključiti da takvih pojava nije ni bilo.

Postupak svladavanja poteškoća u slučaju pojave lošega smjera pretraživanja, predložen u ovomu radu (poglavlje 2.5.4.), polučio je vrlo dobre rezultate - čak pet od šest zadataka je uspješno riješeno (Tablica VI). Osim toga, dva ranije uspješno riješena zadatka (10 i 19) sada su riješena s manje izračunavanja funkcija cilja i ograničenja. Međutim, pri rješavanju zadatka br. 7, predloženi postupak je zahtijevao povećani broj iteracija u usporedbi s postupkom Arore i suradnika.

Nepovoljna posljedica predloženoga postupka je mogućnost pojave značajnoga usporenja brzine konvergencije, što je naročito došlo do izražaja pri rješavanju zadataka br. 3 i 6, kada je do rješenja utrošeno više tisuća iteracija. Međutim, držim kako je povećanje pouzdanosti postupka vrijedno troška izražena kroz veći broj izračunavanja funkcija i njihovih gradijenata. Ovo stajalište zastupa i Arora sa suradnicima [13].

Zadatak br. 14 nije riješen ni s jednom izvedbom postupka optimiranja. Uzrok, detaljnije opisan u poglavlju 3.4.1., su neprikladna početna točka i numerička diferencijacija sa zadanom prirastom argumenta u iznosu od 10^{-6} . U slučaju povećanja prirasta argumenta pri numeričkoj diferencijaciji na 10^{-1} , konačna izvedba potprograma *RQPOPT* svladava početne poteškoće i nakon 12 iteracija, u neposrednoj blizini točnoga rješenja ($F = 0.2628$, $DGX = 0.0$, $DFX = 0.5E-03$, $NFE = 158$, $NGE = 442$, $CPUT = 71.02$), prekida izvođenje zbog nemogućnosti pronalaženja povoljnije točke

napredovanja. S obzirom da se trenutna točka nalazila u izvedivu području, predloženi postupak nije ni mogao djelovati, pa je za svladavanje ove poteškoće primijenjen isključivo izvorni postupak Arore i suradnika. Ostvareni rezultat se zbog blizine točnoga rješenja, iako nisu zadovoljeni uvjeti zaustavljanja, sa inženjerskoga stajališta može smatrati uspješnim rješenjem postavljena zadatka.

Ovaj primjer zorno pokazuje kako se ugađanjem parametara postupka optimiranja mogu poboljšati njegova obilježja. Međutim početna postavka prilikom izvođenja računskih pokusa bila je nepromjenljivost parametara optimiranja, kako bi u potpunosti došla do izražaja pouzdanost i općenitost promatrana postupka. Činjenicu da je u takvim okolnostima postupak uspješno riješio 18, od ukupno 19, zadataka držim jednom od najvažnijih obilježja i postignuća predloženoga postupka.

4.2. USPOREDBA OSTVARENIH REZULTATA S REZULTATIMA DRUGIH AUTORA

Radi stjecanja predodžbe o računskim obilježjima predložena postupka, u ovom poglavlju su dane usporedbe dijela rezultata ostvarenih potprogramom *RQPOPT* i programa drugih autora. Za usporedbu su odabrani svojstveni primjeri iz skupine raspoloživih podataka. Tablice VII-IX daju usporedbu rezultata programa *RQPOPT* i programa *VFO2AD*, *OPRQP*, *GRGA*, *VFO1A*, *FUNMIN* i *FMIN* [56], dok tablice X-XII daju usporedbu programa *RQPOPT* i programa *NLPQL* [57].

VFO2AD je poznati program M.J.D. Powella, utemeljen na Hanovoj postavci postupka optimiranja rekurzivnim kvadratnim programiranjem. Drugačiju postavku postupka rekurzivnoga kvadratnoga programiranja zastupa program *OPRQP* autora Bartholomew-Biggsa. Program *GRGA* je poznati program profesora Abadieja, utemeljen na postupku poopćenih reduciranih gradijenata. Postupak Lagrangeovih množitelja izvorište je Fletcherova programa *VFO1A* i Kraftova programa *FUNMIN*, dok je *FMIN* program utemeljen na postupku popravniha funkcija. Više podataka o ovim programima dano je u [56].

U priloženim tablicama dojavnik vrste rezultata (INFO) ima slijedeća značenja:

- INFO = 0 - uspješno riješen zadatak
- INFO = 4 - neuspjeh rješavanja (divergencija)
- INFO = 8 - prekid izvođenja zbog greške računanja

Prilikom uspoređivanja rezultata nužno je imati u vidu činjenicu o različitim načinima određivanja prekoračenja ograničenja VC. Kod *RQPOPT* je to, po uzoru na [43], najveće prekoračenje ograničenja, dok je kod svih ostalih to zbroj prekoračenja po svim ograničenjima. Osim toga, kod programa *RQPOPT* su ograničenja, ako je to bilo moguće, normirana svojim graničnim iznosom. Najveće postignuto prekoračenje je uvijek manje, ili jednako, zbroju svih prekoračenja. Davanje prednosti graničnom prekoračenju ograničenja, u odnosu na njihov zbroj, može se lako potkrijepiti činjenicom kako je nepovoljnije jedno prekoračenje ograničenja u iznosu od 10%, nego deset pojedinačnih prekoračenja iznosa 1%, iako je u oba slučaja zbroj prekoračenja jednak.

Tablica VII objedinjuje postignute rezultate pri rješavanju zadatka br. 2 (Optimalna konstrukcija reaktora). Svi programi su uspješno riješili postavljeni zadatak, pri čemu se svojom djelotvornošću ističu programi *RQPOPT*, *VF02AD* i *OPRQP*, svi zastupnici postupka rekurzivnoga kvadratnoga programiranja. *RQPOPT* je, pritom, najbrže stigao do cilja.

Tablica VII. Usporedba rezultata pri rješavanju zadatka br. 2 (Optimalna konstrukcija reaktora)

PROGRAM	NFE	NGE	NFGE	NGGE	FUNCT	VC	INFO
RQPOPT	18	108	16	63	0.39512E+01	0.26E-08	0
VF02AD	19	114	19	114	0.39512E+01	0.47E-09	0
OPRQP	32	192	28	168	0.39512E+01	0.17E-05	0
GRGA	383	5010	160	372	0.39512E+01	0.0	0
VF01A	81	486	81	298	0.39512E+01	0.12E-05	0
FUNMIN	363	2178	84	504	0.39512E+01	0.23E-09	0
FMIN	1109	7019	203	1213	0.39512E+01	0.11E-06	0

Tablica VIII daje rezultate ostvarene pri rješavanju zadatka br. 5 (Kemijska ravnoteža). I ovaj zadatak su uspješno riješili svi programi, pri čemu nešto manju točnost rezultata bilježe programi *VF01A* i *VF02AD*. Najbrži je *VF02AD*, a nešto sporiji *RQPOPT*. Zanimljivo je različito držanje programa *VF02AD*, *RQPOPT* i *OPRQP*, pogotovo stoga što su utemeljeni na, načelno, jednakim temeljima.

Tablica VIII. Usporedba rezultata pri rješavanju zadatka br. 5 (Kemijska ravnoteža)

PROGRAM	NFE	NGE	NFGE	NGGE	FUNCT	VC	INFO
RQPOPT	38	114	26	78	-.47761E+02	0.56E-16	0
VF02AD	11	33	11	33	-.47597E+02	0.30E-09	0
OPRGQ	2249	6747	201	603	-.47712E+02	0.72E-05	0
GRGA	868	204	168	321	-.47725E+02	0.58E-10	0
VF01A	201	603	201	603	-.49380E+02	0.12E+00	0
FUNMIN	270	810	58	174	-.47712E+02	0.87E-09	0
FMIN	1994	5982	171	513	-.47715E+02	0.77E-07	0

Rezultati rješavanja jednoga, očito teškoga, zadatka dani su u tablici IX. Radi se o zadatku br. 6 (Postupak alkilacije). Od sedam programa samo su tri uspjela doći do rješenja. Brzinom postizanja rezultata izaziva pozor *VF02AD*, dok je *RQPOPT* do istoga rezultata stigao uz neusporedivo veći računski napor. Još jednom *RQPOPT*, *VF02AD* i *OPRQP*

Tablica IX. Usporedba rezultata pri rješavanju zadatka br. 6 (Postupak alkilacije)

PROGRAM	NFE	NGE	NFGE	NGGE	FUNCT	VC	INFO
RQPOPT	24442	268862	3049	33502	-.17688E+04	0.15E-12	0
VF02AD	33	363	33	363	-.17688E+04	0.59E-06	0
OPRQP	379	4169	201	2211	-.15605E+04	0.54E-05	4
GRGA	133	3795	62	297	-.17685E+04	0.16E-07	0
VF01A	*****	*****	*****	*****	*****	*****	8
FUNMIN	*****	*****	*****	*****	*****	*****	8
FMIN	1430	16484	205	2255	-.21802E+04	0.27E+01	4

iskazuju značajno različita obilježja. Programi *OPRQP* i *FMIN* nisu stigli do rješenja, dok je izvođenje programa *VF01A* i *FUNMIN* prekinuto zbog greške računanja.

Na temelju raspoloživih podataka o rezultatima rješavanja zadataka br. 1 do 7 [56] vidljivo je kako su samo *RQPOPT* i *GRGA* uspješno riješili svih sedam zadataka. *VF02AD* je divergirao kod zadatka br. 7, dok je *OPRQP* postigao neuspjeh kod tri zadatka (1, 3 i 7). Četiri neuspjeha bilježi *VF01A* (zadaci br. 3, 4, 6 i 7), od čega jedan, zadatak br. 6, zbog greške računanja. Program *FUNMIN* nije riješio tri zadatka (3, 6 i 7), pri čemu jedan, zadatak br. 7, zbog greške računanja. Konačno, program *FMIN* je divergirao pri rješavanju tri zadatka (3, 4 i 6). U ovaj prikaz nisu uključeni slučajevi nedovoljno točnih rezultata s gledišta postignutih iznosa funkcija cilja ili prekoračenja ograničenja u točkama optimuma.

Potprogram *NLPQL* [38] je poznati program profesora Schittkowskoga, utemeljen na Han-Powellovoj postavci postupka optimiranja rekurzivnim kvadratnim programiranjem [35-37]. Rezultati rješavanja zadataka 8 do 19 su dani u [57].

Tablica X daje usporedbu rezultata programa *RQPOPT* i *NLPQL* pri rješavanju zadatka br. 9 (Konstrukcija kliznoga ležaja). Oba programa su zadatak riješili točno i djelotvorno, pri čemu je nešto uspješniji bio *RQPOPT*.

Tablica X. Usporedba rezultata pri rješavanju zadatka br. 9 (Konstrukcija kliznoga ležaja)

PROGRAM	NFE	NGE	NFGE	NGGE	FUNCT	VC	INFO
RQPOPT	7	11	6	10	0.16206E+01	0.5E-08	0
NLPQL	10	10	10	10	0.16206E+01	0.3E-09	0

Usporedba ostvarenih rezultata pri rješavanju zadatka br. 12 (Konstrukcijski zadatak tvrtke Whirlpool) dana je tebelom XI. I ovaj put su oba programa uspješno riješila zadatak, s tim da je znatno djelotvorniji bio *NLPQL*.

Tablica XI. Usporedba rezultata pri rješavanju zadatka br. 12 (Konstrukcijski zadatak tvrtke Whirlpool)

PROGRAM	NFE	NGE	NFGE	NGGE	FUNCT	VC	INFO
RQPOPT	371	375	0	0	0.36971E+02	0.0	0
NLPQL	76	76	0	0	0.36971E+02	0.2E-10	0

Tablica XII daje usporedbu rezultata programa *RQPOPT* i *NLPQL* pri rješavanju zadatka br. 19 (Zadatak proizvodnje zemnoga plina). Zadatak 19 je najveći zadatak optimiranja u ovom radu - 48 varijabli, 3 implicitna i 72 rubna ograničenja. Oba programa su zadatak uspješno riješili, pri čemu je ponovno djelotvorniji bio *NLPQL*.

Tablica XII. Usporedba rezultata pri rješavanju zadatka br. 19 (Zadatak proizvodnje zemnoga plina)

PROGRAM	NFE	NGE	NFGE	NGGE	FUNCT	VC	INFO
RQPOPT	5400	16488	0	0	0.86338E+00	0.6E-07	0
NLPQL	4362	13086	0	0	0.86338E+00	0.1E-06	0

S gledišta uspješnosti rješavanja zadataka br. 8 do 19, programi *RQPOPT* i *NLPQL* bilježe slične rezultate. Kao i *RQPOPT*, ni *NLPQL* nije pri rješavanju zadatka br. 14 (Optimalni prijenosni omjeri mjenjača) uspio svladati poteškoće početne točke. Isto tako, pri rješavanju zadatka br. 16 (Optimiranje procesa alkilacije), i *NLPQL* konvergira k lokalnom optimumu $FUNCT = 1227.23$ ($NFE = 209$, $NGE = 1162$, $VC = 0.8E-13$). Jedinu iznimku čini rješavanje zadatka br. 10 (Zadatak konstrukcije grebena) koje je, prema [57], *NLPQL* uspješno priveo kraju nakon četiri neuspjela pokušaja. S gledišta djelotvornosti, program *NLPQL* je u većini slučajeva bio uspješniji od programa *RQPOPT*.

Usporedba programa *RQPOPT* s programima *PLBA* i *RQOPT*, oba utemeljena na postupku Pšeničnoga, zbog nedostatka podataka ili različitih načina mjerenja pokazatelja uspješnosti nije, osim u rijetkim slučajevima, moguća. Program *PLBA* plod je dugogodišnja razvoja Arore i suradnika [41-43], dok je *RQOPT* djelo Beltracchia i Gabrielea [52].

Prema [42], zadatak br. 7 (3-stupno membransko separiranje) je rješavan s različitim parametrima optimiranja i različitim izvedbama programa *PLBA*. Najdjelotvornija kombinacija je polučila rezultat nakon 202 iteracije ($C_{PUT} = 72$ na PRIME 750 radnoj stanici), dok je za najnepovoljniju rješenje uslijedilo nakon 7203 iteracije ($C_{PUT} = 3356$). Usporedbe radi, *RQOPT* je postigao rješenje s 4789 iteracija. Nakon više tisuća izvršenih proračuna, prema [43] i [44], dadu se naslutiti, s gledišta pouzdanosti, općenitosti i djelotvornosti rješavanja zadataka, izvanredne mogućnosti programa *PLBA*.

U [52] su dani rezultati ispitivanja programa *RQOPT*. Deset zadataka, od ukupno 23, je riješeno i u ovom radu (zadaci br. 2, 3, 8, 9, 11, 13, 15, 16, 18 i 19). Osam zadataka je riješeno uspješno, dok je rješavanje dvaju zadataka (18 i 19) završeno neuspjehom. S gledišta broja iteracija, program *RQOPT* je uspješniji pri rješavanju triju zadataka (13, 15 i 16), dok je kod preostalih pet (2, 3, 8, 9 i 11) bio uspješniji *RQOPT*. Posebnu pozornost izaziva lakoća kojom je *RQOPT* riješio zadatak br. 3, kada je do rješenja utrošeno svega 76 iteracija, dok je program *RQOPT* utrošio 10413 iteracija. Program *RQOPT* je rješavanje zadatka br. 18, u neposrednoj blizini rješenja ($FUNCTION = 3.17951$), prekinuo zbog nemogućnosti rješavanja kvadratnoga podzadatka, dok je rješavanje zadatka br. 19, pri $FUNCTION = 1.130$, prekinuto zbog "neprihvatljivih računskih napora" [52]. Usporedbe radi, ovaj zadatak je program *RQOPT* uspješno riješio nakon 108 iteracija.

Zaključujući ovaj pregled držim kako prikazani podaci ukazuju na visoku pouzdanost, općenitost i točnost programa *RQOPT*, nešto nižu djelotvornost i laku uporabivost.

4.3. PRIJEDLOZI ZA BUDUĆI RAD

Ostvareni rezultati predloženoga postupka ukazuju na moguća buduća poboljšanja:

- *Slučajevi lošega smjera pretraživanja*. U slučajevima lošega smjera pretraživanja predloženi postupak svladava nastale poteškoće, ali često uz vrlo velike računске napore. Prikladnijim postupkom trebalo bi postići jednake rezultate uz znatno manji broj iteracija. Štoviše, prikladnijom postavkom kvadratnoga podzadatka trebalo bi smanjiti mogućnost pojave ovakvih slučajeva.

- *Postupak usmjerenoga pretraživanja.* Predloženi postupak usmjerenoga pretraživanja nije ispunio očekivanja. S obzirom da se radi o računski najzahtjevnijem dijelu postupka optimiranja, trebalo bi istražiti druge mogućnosti njegova poboljšanja i ubrzavanja. Primjena tehnike aproksimacije ograničenja jedno je od mogućih poboljšanja.
- *Poboljšavanje uvjetovanosti zadatka.* Tehnike umjeravanja poznato su sredstvo poboljšavanja uvjetovanosti zadatka optimiranja kojim se olakšava i ubrzava konvergencija k rješenju. Razvojem odgovarajućega postupka umjeravanja mogle bi se izbjeći neke od uočenih poteškoća lošega smjera pretraživanja.
- *Faktorizacija Hesseove matrice.* Primijenjeni Jacobijev postupak određivanja svojstvenih vrijednosti Hesseove matrice je dobar, ali računski vrlo zahtjevan. **LDL^T** faktorizacijom ove matrice moguće je odrediti njen uvjetovni broj na djelotvorniji način, što bi se povoljno odrazilo na smanjenje vremena računanja.

5. ZAKLJUČAK

Optimiranje strojarskih konstrukcija, ili još šire, konstrukcijskih rješenja, svakim danom postaje sve važnijim čimbenikom uspješna konstrukcijska procesa. Nužan uvjet za uspješnu primjenu postupka optimiranja u konstrukcijskom procesu je raspolaganje odgovarajućim *alatom* koji će biti u stanju zadovoljiti potrebe projektanata i konstruktera. Projektanti i konstrukteri nisu, i ne trebaju biti, stručnjaci za teoriju optimiranja, već korisnici kojima alat za optimiranje mora omogućiti brži i kvalitetniji rad. Stoga alat za optimiranje mora biti pouzdan, točan, djelotvoran i jednostavan za uporabu, kako bi korisniku omogućio posvećivanje postavljenu zadatku i ostvarivanje boljega konstrukcijskoga rješenja.

U ovom radu razvijen je postupak optimiranja strojarskih konstrukcija utemeljen na rekuzivnom kvadratnom programiranju, kako su ga odredili Pšeničnij, Lim, Belegundu i Arora. Izvorni postupak je dopunjen dvjema izmjenama: postupkom usmjerenoga pretraživanja koji se koristi kubnom i kvadratnom interpolacijom i postupkom zlatnoga reza, i postupkom svladavanja poteškoća koje nastaju u slučaju lošega smjera pretraživanja.

Predloženi postupak usmjerena pretraživanja, poglavlje 2.3.2., nije polučio očekivani rezultat - rijetka poboljšanja zasjenjena su bitnim pogoršanjima kod značajnoga broja pokusnih zadataka. Suprotno očekivanjima, izvorna izvedba usmjerenoga pretraživanja je zadržana kao pouzdanija i djelotvornija.

Predloženi postupak svladavanja poteškoća u slučajevima lošega smjera pretraživanja, poglavlje 2.5.4., pokazao se uspješnim i korisnim. Osim u jednom slučaju, svi postavljene zadaci su uspješno riješeni, prevladavajući nedostatke uočene prilikom primjene izvornoga postupka.

Postignutim rezultatima, u prvom redu pokazanom pouzdanošću, točnošću, djelotvornošću i jednostavnošću uporabe, predloženi postupak se pokazao vrlo prikladnim za rješavanje suvremenih zadataka optimiranja strojarskih konstrukcija.

LITERATURA

- [1] A. KOSTELIĆ, "Razvoj proizvoda - znanost o konstruiranju", *Strojarstvo* 31(1989)2/3, 103-104.
- [2] A. KOSTELIĆ, "Teorija proizvoda - znanstvena osnova razvoja proizvoda", *Strojarstvo* 31(1989)2/3, 105-111.
- [3] S. NIŠEVIĆ, "Vrijednosti i odluke - model kauzalne veze u procesu konstruiranja", *Strojarstvo* 26(1984)6, 349-353.
- [4] R. FLETCHER, "Practical Methods of Optimization", John Wiley and Sons, Chichester 1987.
- [5] J.S. ARORA, "Computational Design Optimization: A Review and Future Directions", *Structural Safety* 7(1990), 131-148.
- [6] J.S. ARORA, "Introduction to Optimum Design", McGraw-Hill, New York 1989.
- [7] P.B. THANEDAR, et al., "Performance of Some SQP Algorithms on Structural Design Problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 23(1986), 2187-2203.
- [8] P.B. THANEDAR, J.S. ARORA, C.H. TSENG, "A Hybrid Optimization Method and Its Role in Computer-Aided Design", *Computers and Structures* 23(1986)3, 305-314.
- [9] J.S. ARORA, P.B. THANEDAR, "Computational Methods for Optimum Design of Large Complex Structures", *Computational Mechanics* (1986)1, 221-242.
- [10] O.K. LIM, J.S. ARORA, "An Active Set RQP Algorithm for Engineering Design Optimization", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 57(1986), 51-65.
- [11] A.D. BELEGUNDU, J.S. ARORA, "A Study of Mathematical Programming Methods for Structural Optimization. Part I: Theory", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 21(1985), 1583-1599.
- [12] A.D. BELEGUNDU, J.S. ARORA, "A Study of Mathematical Programming Methods for Structural Optimization. Part II: Numerical Results", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 21(1985), 1601-1623.
- [13] P.B. THANEDAR, et al., "Robustness, Generality and Efficiency of Optimization Algorithms for Practical Applications", *Structural Optimization* 2(1990), 203-212.
- [14] G.V. REKLAITIS, A. RAVINDRAN, K.M. RAGSDALL, "Engineering Optimization: Methods and Applications", John Wiley and Sons, New York 1983.
- [15] G.N. VANDERPLAATS, "Numerical Optimization Techniques for Engineering Design: With Applications", McGraw-Hill, New York 1984.

- [16] R.H. GALLAGHER, O.C. ZIENKIEWICZ (Eds.), "Optimum Structural Design: Theory and Applications", John Wiley and Sons, London 1973.
- [17] E. ATREK, et al. (Eds.), "New Directions in Optimum Structural Design", John Wiley and Sons, Chichester 1984.
- [18] L.A. SCHMIT, "Structural Synthesis - Its Genesis and Development", AIAA Journal 19(1981)10, 1249-1263.
- [19] A.D. WARREN, L.S. LASDON, "The Status of Nonlinear Programming Software", Operations Research 27(1979)3, 431-456.
- [20] E.D. EASON, R.G. FENTON, "A Comparison of Numerical Optimization Methods for Engineering Design", ASME Journal for Engineering for Industry 96(1974)1, 196-200.
- [21] E. SANDGREN, K.M. RAGSDELL, "The Utility of Nonlinear Programming Algorithms: A Comparative Study - Part I", ASME Journal of Mechanical Design 102(1980)3, 540-546.
- [22] E. SANDGREN, K.M. RAGSDELL, "The Utility of Nonlinear Programming Algorithms: A Comparative Study - Part II", ASME Journal of Mechanical Design 102(1980)3, 547-551.
- [23] K. SCHITTKOWSKI, "Nonlinear Programming Codes: Information, Tests, Performance", Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 183, Springer-Verlag, Berlin 1980.
- [24] W. HOCK, K. SCHITTKOWSKI, "A Comparative Performance Evaluation of 27 Nonlinear Programming Codes", Computing 30(1983), 335-358.
- [25] K. SCHITTKOWSKI, C. ZILLOBER, R. ZOTEMANTEL, "Numerical Comparison of Nonlinear Programming Algorithms for Structural Optimization", Report No. 453, Mathematisches Institut, Universität Bayreuth, Bayreuth 1993.
- [26] P.E. GILL, W. MURRAY, (Eds.), "Numerical Methods for Constrained Optimization", Academic Press, London 1974.
- [27] U.M. GARCIA-PALOMARES, "Superlinearly Convergent Algorithms for Linearly Constrained Optimization", p. 101-119, Nonlinear Programming 2, Edited by O.L. Mangasarian, R.R. Meyer, S.M. Robinson, Academic Press, New York 1975.
- [28] U.M. GARCIA-PALOMARES, O.L. MANGASARIAN, "Superlinearly Convergent Quasi-Newton Algorithms for Nonlinearly Constrained Optimization Problems", Mathematical Programming 11(1976), 1-13.
- [29] M.C. BARTHOLOMEW-BIGGS, "A Numerical Comparison Between Two Approaches to the Nonlinear Programming Problem", Technical Report No. 77, Numerical Optimisation Centre, The Hatfield Polytechnic, June 1976.
- [30] M.C. BARTHOLOMEW-BIGGS, "On the Convergence of Some Constrained Minimization Algorithms Based on Recursive Quadratic Programming", Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications 21(1978), 67-81.
- [31] S.P. HAN, "Superlinearly Convergent Variable Metric Algorithms for General Nonlinear Programming Problems", Mathematical Programming 11(1976), 263-282.

- [32] S.P. HAN, "A Globally Convergent Method for Nonlinear Programming", *Journal of Optimization Theory and Applications* 22(1977)3, 297-309.
- [33] M.J.D. POWELL, "Algorithms for Nonlinear Constraints That Use Lagrangian Functions", *Mathematical Programming* 14(1978), 224-248.
- [34] M.J.D. POWELL, "The Convergence of Variable Metric Methods for Nonlinearly Constrained Optimization Calculations", p. 27-63, *Nonlinear Programming 3*, Edited by O.L. Mangasarian, R.R. Meyer, S.M. Robinson, Academic Press, New York 1978.
- [35] K. SCHITTKOWSKI, "The Nonlinear Programming Method of Wilson, Han, and Powell With an Augmented Lagrangian Type Line Search Function. Part 1: Convergence Analysis", *Numerische Mathematik* 38(1981), 83-114.
- [36] K. SCHITTKOWSKI, "The Nonlinear Programming Method of Wilson, Han, and Powell With an Augmented Lagrangian Type Line Search Function. Part 2: An Efficient Implementation With Linear Least Squares Subproblems", *Numerische Mathematik* 38(1981), 115-127.
- [37] K. SCHITTKOWSKI, "On the Convergence of a Sequential Quadratic Programming Method With an Augmented Lagrangian Line Search Function", *Math. Operationsforsch. u. Statist., Ser. Optimization* 14(1983)2, 197-216.
- [38] K. SCHITTKOWSKI, "NLPQL: A FORTRAN Subroutine Solving Constrained Nonlinear Programming Problems", *Annals of Operations Research* 5(1985), 485-500.
- [39] Б.Н. ПШЕНИЧЫЙ, "Алгоритмы для общей задачи математического программирования", *Кибернетика* (1970)5, 120-125.
- [40] B.N. PSHENICHNY, Yu.M. DANILIN, "Numerical Methods in Extremal Problems", Mir Publishers, Moscow 1982.
- [41] A.D. BELEGUNDU, J.S. ARORA, "A Recursive Quadratic Programming Method With Active Set Strategy for Optimal Design", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 20(1984), 803-816.
- [42] C.H. TSENG, J.S. ARORA, "On Implementation of Computational Algorithms for Optimal Design 1: Preliminary Investigation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 26(1988), 1365-1382.
- [43] C.H. TSENG, J.S. ARORA, "On Implementation of Computational Algorithms for Optimal Design 2: Extensive Numerical Investigation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 26(1988), 1383-1402.
- [44] J.S. ARORA, C.H. TSENG, Discussion on "An Investigation of Pshenichnyi's Recursive Quadratic Programming Method for Engineering Optimization (86-DET-26)", *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design* 109(1987)2, 254-256.
- [45] M.Z. COHN, "Theory and Practice of Structural Optimization", *Structural Optimization* 7(1994), 20-31.
- [46] M. FRANK, P. WOLFE, "An Algorithm for Quadratic Programming", *Naval Research Logistics Quarterly* 3(1956), 95-110.

- [47] M.J.D. POWELL, "On the Quadratic Programming Algorithm of Goldfarb and Idnani", *Mathematical Programming* 25(1985), 46-61.
- [48] M.J.D. POWELL, "ZQPCVX - A FORTRAN Subroutine for Convex Quadratic Programming", Report DAMTP/1983/NA17, Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge, Cambridge 1983.
- [49] M.J.D. POWELL, "Updating Conjugate Directions by the BFGS Formula", *Mathematical Programming* 38(1987), 29-46.
- [50] B. CARNAHAN, H.A. LUTHER, J.O. WILKES, "Applied Numerical Methods", John Wiley and Sons, New York 1969.
- [51] L. ARMIJO, "Minimization of Functions Having Lipschitz Continuous Partial Derivatives", *Pacific Journal of Mathematics* 16(1966)1, 1-3.
- [52] T.J. BELTRACCHI, G.A. GABRIELE, "An Investigation of Pshenichny's Recursive Quadratic Programming Method for Engineering Optimization", *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design* 109(1987), 248-253.
- [53] H. CROWDER, R.S. DEMBO, J.M. MULVEY, "On Reporting Computational Experiments With Mathematical Software", *ACM Transactions on Mathematical Software* 5(1979)2, 193-203.
- [54] M. MINKOFF, "Methods for Evaluating Nonlinear Programming Software", p. 519-548, *Nonlinear Programming 4*, Edited by O.L. Mangasarian, R.R. Meyer, S.M. Robinson, Academic Press, New York 1981.
- [55] A. MIELE, S. GONZALES, "On the Comparative Evaluation of Algorithms for Mathematical Programming Problems", p. 337-359, *Nonlinear Programming 3*, Edited by O.L. Mangasarian, R.R. Meyer, S.M. Robinson, Academic Press, New York 1981.
- [56] W. HOCK, K. SCHITTKOWSKI, "Test Examples for Nonlinear Programming Codes", *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, No. 187, Springer-Verlag, Berlin 1981.
- [57] K. SCHITTKOWSKI, "More Test Examples for Nonlinear Programming Codes", *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, No. 282, Springer-Verlag, Berlin 1987.
- [58] R.P. BRENT, "Algorithms for Minimization Without Derivatives", Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1973.
- [59] S.M. ROBINSON, "Quadratic Interpolation Is Risky", *SIAM Journal of Numerical Analysis* 16(1979)3, 377-379.

ŽIVOTOPIS

Rođen sam u Splitu, 13. svibnja 1956. godine. Osnovnu i srednju školu (Tehnička škola, strojarški smjer) završio sam u Splitu. Godine 1975. upisujem studij strojarstva na Fakultetu elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Splitu. Nakon četvrtoga semestra sam privremeno prekinuo studij i zaposlio se u Jadranskoj slobodnoj plovidbi kao vježbenik stroja. Nakon jednogodišnjega pomorskoga iskustva nastavljam studij strojarstva, koji završavam 1982. godine završnim radom pod naslovom "Računsko određivanje faktora realnosti". Po odsluženju vojnoga roka, 1983. godine., zapošljam se u Brodograđevnoj industriji Split kao organizator-programer u OOURu Konstrukcije. Pored drugih radova, razvio sam programski sustav za projektiranje brodskih ventilacijskih instalacija, kao i programski sustav za projektiranje cjevovoda za grijanje tankova tereta. Godine 1985. postajem članom Američkoga udruženja strojarskih inženjera, ASME. Slijedeće godine prelazim u Institut Brodograđevne industrije Split na mjesto asistenta za istraživanje i razvoj novih plovnih objekata. Glavna područja djelovanja su mi računalom podržano konstruiranje i vibracijska analiza brodskih porivnih sustava, gdje sam za više projekata izradio analize torzijskih i aksijalnih vibracija. Postdiplomski studij iz teorije konstrukcija, na Fakultetu strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, upisujem 1987. godine. Od 1994. godine u Institutu obavljam dužnosti rukovoditelja razvoja plovnih objekata. Istodobno, polovičnim radnim vremenom, zapošljam se na Fakultetu elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Splitu, gdje pri Zavodu za strojarstvo i brodogradnju obavljam dužnosti mlađega asistenta iz kolegija Primjena elektroničkih računala i Metode optimalizacije. Objavio sam šest znanstvenih i stručnih radova iz područja primjene elektroničkih računala. Oženjen sam i imam troje djece.

PRILOZI

PRILOG A:

ALGORITAM PROCJENE PODOBNE TOČKE USMJERENOGA PRETRAŽIVANJA OBJEDINJAVANJEM KUBNE I KVADRATNE INTERPOLACIJE S POSTUPKOM ZLATNOGA REZA

Richard Brent je u svojoj poznatoj knjizi "Algorithms for Minimization Without Derivatives" [58] predložio postupak određivanja minimuma funkcije jedne varijable objedinjavanjem kvadratne interpolacije i postupka zlatnoga reza. Ovaj postupak se odlikuje zajamčenim pronalaženjem rješenja, zahvaljujući postupku zlatnoga reza, uz superlinearnu brzinu konvergencije, ostvarene primjenom kvadratne interpolacije. Time Brentov postupak izbjegava opasnosti polinomske interpolacije [59], uz zadržavanje njenih dobrih osobina, iskazanih kroz povećanu brzinu konvergencije. Osim toga, za izvođenje postupka potrebno je poznavanje samo funkcija spuštanja, a ne i njihovih derivacija.

Postupak procjene podobne točke usmjerenoga pretraživanja, predložen u ovomu radu, temelji se na poboljšanju Brentova postupka dodavanjem kubne interpolacije kroz četiri točke. Time je zadržano svojstvo zajamčene konvergencije Brentova postupka, uz mogućnost povećanja brzine konvergencije kubnom interpolacijom. U slučajevima kada ne postoje uvjeti za kubnu interpolaciju nova točka se određuje uobičajenim Brentovim postupkom - kvadratnom interpolacijom, odnosno zlatnim rezom.

S obzirom da se usmjerenim pretraživanjem u postupku rekurzivnoga kvadratnoga programiranja ne traži točka minimuma funkcije spuštanja, već samo prikladna točka napredovanja k rješenju (poglavlje 2.3.), predloženi postupak se isključivo rabi za procjenu veličine pokusnoga koraka α .

Predloženim postupkom se procjena veličine pokusnoga koraka α vrši na slijedeći način:

- a) Prvi pokušaj ($q = 0$)
(poznata samo trenutna točka rješenja i iznos pripadne funkcije spuštanja)

$$\alpha = 1. \tag{A.1}$$

- b) Drugi pokušaj ($q = 1$)
(poznate dvije točke i pripadni iznosi funkcija spuštanja)

$$\alpha = 0.618034, \tag{A.2}$$

gdje je 0.618034 faktor postupka zlatnoga reza [6].

- c) Treći pokušaj ($q = 2$)
(poznate tri točke s pripadnim iznosima funkcije spuštanja)

$$\alpha = -a_1 / 2a_2, \tag{A.3}$$

gdje su a_i koeficijenti kvadratnoga interpolacionog polinoma [15]:

$$F = a_0 + a_1x + a_2x^2, \tag{A.4}$$

$$a_0 = F_1 - a_1x_1 - a_2x_1^2, \tag{A.5}$$

$$a_1 = \frac{F_2 - F_1}{x_2 - x_1} - a_2 \cdot (x_1 + x_2), \tag{A.6}$$

$$a_2 = \frac{(F_3 - F_1)/(x_3 - x_1) - (F_2 - F_1)/(x_2 - x_1)}{x_3 - x_2}, \quad (\text{A.7})$$

a x_i i F_i pojedine točke i pripadni iznosi funkcije spuštanja. Nužan i dovoljan uvjet postojanja minimuma polinoma (A.4) je određen s $a_2 > 0$.

- d) Četvrti i svaki daljnji pokušaj ($q > 2$)
(poznate četiri točke s pripadnim iznosima funkcije spuštanja)

$$\alpha = \frac{-a_2 + \sqrt{b}}{3a_3}, \quad (\text{A.8})$$

gdje su a_i koeficijenti kubnoga interpolacionog polinoma [15]:

$$F = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, \quad (\text{A.9})$$

$$a_0 = F_1 - a_1x_1 - a_2x_1^2 + a_3x_1^3, \quad (\text{A.10})$$

$$a_1 = \frac{F_2 - F_1}{x_2 - x_1} - a_3 \cdot \frac{x_2^3 - x_1^3}{x_2 - x_1} - a_2 \cdot (x_1 + x_2), \quad (\text{A.11})$$

$$a_2 = \frac{Q_5 - a_3Q_1}{Q_3}, \quad (\text{A.12})$$

$$a_3 = \frac{Q_3Q_6 - Q_4Q_5}{Q_2Q_3 - Q_1Q_4}, \quad (\text{A.13})$$

a b i Q_i pomoćne veličine:

$$b = a_2^2 - 3a_1a_3, \quad (\text{A.14})$$

$$Q_1 = x_3^3(x_2 - x_1) - x_2^3(x_3 - x_1) + x_1^3(x_3 - x_2) , \quad (\text{A.15})$$

$$Q_2 = x_4^3(x_2 - x_1) - x_2^3(x_4 - x_1) + x_1^3(x_4 - x_2) , \quad (\text{A.16})$$

$$Q_3 = (x_3 - x_2)(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) , \quad (\text{A.17})$$

$$Q_4 = (x_4 - x_2)(x_2 - x_1)(x_4 - x_1) , \quad (\text{A.18})$$

$$Q_5 = F_3(x_2 - x_1) - F_2(x_3 - x_1) + F_1(x_3 - x_2) , \quad (\text{A.19})$$

$$Q_6 = F_4(x_2 - x_1) - F_2(x_4 - x_1) + F_1(x_4 - x_2) . \quad (\text{A.20})$$

Kao i u slučaju trećega pokušaja, x_i i F_i označuju pojedine točke i pripadne iznose funkcije spuštanja. Nužan i dovoljan uvjet postojanja minimuma polinoma (A.9) je određen s $b > 0$.

PRILOG B:**POZIV POTPROGRAMA *RQPOPT***

Potprogram *RQPOPT* se poziva s:

```
CALL RQPOPT ( N, M, MI, ME, NITMAX, DELTA0, R, VMAXI,
*           EPS, EPSCV, EPSD, CONDNM, GRADEX,
*           IPRINT, XL, XU, X, FUNCT, VMAX, FLGN,
*           DN, G, NACT, IACT, U, NIT, NFE, NGE,
*           NFGE, NGGE, INFO )
```

gdje su argumenti:

N	-	Broj varijabli
M	-	Broj ograničenja (ukupno)
MI	-	Broj nejednakosnih ograničenja
ME	-	Broj jednakosnih ograničenja
NITMAX	-	Granični broj iteracija
DELTA0	-	Parametar prekoračenja ograničenja δ
R	-	Početni iznos popravnooga parametra r
VMAXI	-	Granični iznos početnoga prekoračenja ograničenja $V(\mathbf{x})$
EPS	-	Prirast argumenta pri numeričkoj diferencijaciji
EPSCV	-	Uvjet zaustavljanja ε_v
EPSD	-	Uvjet zaustavljanja ε_d
CONDNM	-	Granični iznos uvjetovnoga broja Hesseove matrice c_0
GRADEX	-	Dojavnik načina određivanja gradijenata funkcija
		GRADEX = .TRUE. - analitičko
		GRADEX = .FALSE. - numeričko

- IPRINT - Dojavnik ispisa međurezultata
 - IPRINT = 0 - Bez ispisa međurezultata
 - IPRINT = 1 - Ispis samo najvažnijih međurezultata
 - IPRINT = 2 - Temeljit ispis svih međurezultata
- XL - Vektor donjih granica varijabli
- XU - Vektor gornjih granica varijabli
- X - Vektor rješenja (pri pozivu potprograma sadrži pretpostavljeno početno rješenje)
- FUNCT - Iznos funkcije cilja u točki rješenja
- VMAX - Najveće prekoračenje ograničenja u točki rješenja
- FLGN - Norma vektora gradijenta Lagrangeove funkcije u točki rješenja
- DN - Norma vektora pomaka u smjeru pretraživanja iz točke rješenja
- G - Vektor iznosa funkcija ograničenja u točki rješenja
- NACT - Broj djelatnih ograničenja u točki rješenja
- IACT - Vektor indeksa djelatnih ograničenja u točki rješenja
- U - Vektor Lagrangeovih množitelja djelatnih ograničenja u točki rješenja
- NIT - Broj izvršenih iteracija
- NFE - Broj izračunavanja funkcije cilja
- NGE - Broj izračunavanja funkcija ograničenja (svako ograničenje se broji posebno)
- NFGE - Broj izračunavanja gradijenata funkcije cilja (ako se gradijent određuje numerički, broj izračunavanja funkcije cilja je pribrojen NFE)
- NGGE - Broj izračunavanja gradijenata funkcija ograničenja (gradijent svake funkcije ograničenja se posebno broji; ako se gradijenti određuju numerički, broj izračunavanja funkcija ograničenja je pribrojen NGE)
- INFO - Dojavnik stanja obrade
 - INFO = 0 - Zadovoljeni uvjeti zaustavljanja
 - INFO = 2 - Prekid proračuna zbog nemogućnosti pronalaženja povoljnijega rješenja (slučaj lošega smjera pretraživanja)
 - INFO = 4 - Prekid proračuna zbog postignuća NITMAX iteracija

PRILOG C:

PRIKAZ ZADATAKA OPTIMIRANJA

Ovaj prilog sadrži djelomični prikaz zadataka optimiranja koji su uporabljeni za procjenu valjanosti predloženoga postupka optimiranja strojarskih konstrukcija rekursivnim kvadratnim programiranjem. Svi zadaci su preuzeti iz literature [56, 57], pri čemu ovaj prikaz predstavlja prijepis odabranih ulomaka. Ovaj prikaz ne sadrži zadatke br. 12, 14, 15 i 19, pošto njihova tvorba uključuju složene implicitne funkcije. Ti zadaci su u izvoru [57] dani u obliku FORTRAN-skih potprograma.

Prikaz zadataka uključuje:

- funkciju cilja $f(\mathbf{x})$,
- funkcije ograničenja $g_j(\mathbf{x})$, ako ih ima,
- rubna ograničenja \mathbf{x}_L i \mathbf{x}_U , ako ih ima,
- početno rješenje $\mathbf{x}^{(0)}, f(\mathbf{x}^{(0)})$,
- konačno rješenje $\mathbf{x}^*, f(\mathbf{x}^*)$,
- dopunske podatke, ako ih ima,

dok je više potankosti dano u izvornicima [56, 57].

C.1. Zadatak br. 1 Konstrukcija transformatora

Funkcija cilja:

$$f(\mathbf{x}) = .0204 x_1 x_4 (x_1 + x_2 + x_3) + .0187 x_2 x_3 (x_1 + 1.57 x_2 + x_4) \\ + .0607 x_1 x_4 x_5^2 (x_1 + x_2 + x_3) + .0437 x_2 x_3 x_6^2 (x_1 + 1.57 x_2 + x_4)$$

Funkcije ograničenja:

$$.001 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 - 2.07 \geq 0 \\ 1 - .00062 x_1 x_4 x_5^2 (x_1 + x_2 + x_3) - .00058 x_2 x_3 x_6^2 (x_1 + 1.57 x_2 + x_4) \geq 0$$

Rubna ograničenja:

$$0 \leq x_i, \quad i = 1, \dots, 6$$

Početno rješenje:

$$\mathbf{x}^{(0)} = (5.54, 4.4, 12.02, 11.82, .702, .852) \\ f(\mathbf{x}^{(0)}) = 137.066$$

Konačno rješenje:

$$\mathbf{x}^* = (5.332666, 4.656744, 10.43299, 12.08230, .7526074, .87865084) \\ f(\mathbf{x}^*) = 135.075961$$

C.2. Zadatak br. 2 Optimalna konstrukcija reaktora

Funkcija cilja:

$$f(\mathbf{x}) = .4 x_1 .67 x_7^{-.67} + .4 x_2 .67 x_8^{-.67} + 10 - x_1 - x_2$$

Funkcije ograničenja:

$$1 - .0588 x_5 x_7 - .1 x_1 \geq 0$$

$$1 - .0588 x_6 x_8 - .1 x_1 - .1 x_2 \geq 0$$

$$1 - 4 x_3 x_5^{-1} - 2 x_3^{-.71} x_5^{-1} - .0588 x_3^{-1.3} x_7 \geq 0$$

$$1 - 4 x_4 x_6^{-1} - 2 x_4^{-.71} x_6^{-1} - .0588 x_4^{-1.3} x_8 \geq 0$$

$$1 \leq f(\mathbf{x}) \leq 4.2$$

Rubna ograničenja:

$$0.1 \leq x_i \leq 10, \quad i = 1, \dots, 8$$

Početno rješenje:

$$\mathbf{x}^{(0)} = (6, 3, .4, .2, 6, 6, 1, .5)$$

$$f(\mathbf{x}^{(0)}) = 3.65$$

Konačno rješenje:

$$\mathbf{x}^* = (6.465114, 2.232709, .6673975, .5957564, 5.932676, 5.527235, \\ 1.013322, .4006682)$$

$$f(\mathbf{x}^*) = 3.9511634396$$

C.3. Zadatak br. 3 Konstrukcija izmjenjivača topline

Funkcija cilja:

$$f(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + x_3$$

Funkcije ograničenja:

$$1 - .0025 (x_4 + x_6) \geq 0$$

$$1 - .0025 (x_5 + x_7 - x_4) \geq 0$$

$$1 - .01 (x_8 - x_5) \geq 0$$

$$x_1 x_6 - 833.33252 x_4 - 100 x_1 + 83333.333 \geq 0$$

$$x_2 x_7 - 1250 x_5 - x_2 x_4 + 1250 x_4 \geq 0$$

$$x_3 x_8 - 1250000 - x_3 x_5 + 2500 x_5 \geq 0$$

Rubna ograničenja:

$$100 \leq x_1 \leq 10000,$$

$$1000 \leq x_i \leq 10000, \quad i = 2,3$$

$$10 \leq x_i \leq 1000, \quad i = 4, \dots, 8$$

Početno rješenje:

$$\mathbf{x}^{(0)} = (5000, 5000, 5000, 200, 350, 150, 225, 425)$$

$$f(\mathbf{x}^{(0)}) = 15000$$

Konačno rješenje:

$$\mathbf{x}^* = (579.3167, 1359.943, 5110.071, 182.0174, 295.5985, 217.9799, \\ 286.4162, 395.5979)$$

$$f(\mathbf{x}^*) = 7049.330923$$

C.4. Zadatak br. 4 Raspored statičke snage

Funkcija cilja:

$$f(\mathbf{x}) = 3000 x_1 + 1000 x_1^3 + 2000 x_2 + 666.667 x_2^3$$

Funkcije ograničenja:

$$.4 - x_1 + 2 c x_5^2 - x_5 x_6 (d y_1 + c y_2) - x_5 x_7 (d y_3 + c y_4) = 0$$

$$.4 - x_2 + 2 c x_6^2 + x_5 x_6 (d y_1 - c y_2) + x_6 x_7 (d y_5 - c y_6) = 0$$

$$.8 + 2 c x_7^2 + x_5 x_7 (d y_3 - c y_4) - x_6 x_7 (d y_5 + c y_6) = 0$$

$$.2 - x_3 + 2 d x_5^2 + x_5 x_6 (c y_1 - d y_2) + x_5 x_7 (c y_3 - d y_4) = 0$$

$$.2 - x_4 + 2 d x_6^2 - x_5 x_6 (c y_1 + d y_2) - x_6 x_7 (c y_5 + d y_6) = 0$$

$$-.337 + 2 d x_7^2 - x_5 x_7 (c y_3 + d y_4) + x_6 x_7 (c y_5 - d y_6) = 0$$

gdje su:

$$y_1 = \sin x_8$$

$$y_2 = \cos x_8$$

$$y_3 = \sin x_9$$

$$y_4 = \cos x_9$$

$$y_5 = \sin (x_8 - x_9)$$

$$y_6 = \cos (x_8 - x_9)$$

$$c = (48.4/50.176) \sin .25$$

$$d = (48.4/50.176) \cos .25$$

Rubna ograničenja:

$$0 \leq x_i, \quad i = 1, 2$$

$$.90909 \leq x_i \leq 1.0909, \quad i = 5, 6, 7$$

Početno rješenje:

$$\mathbf{x}^{(0)} = (.8, .8, .2, .2, 1.0454, 1.0454, 0, 0)$$

$$f(\mathbf{x}^{(0)}) = 4853.3335$$

Konačno rješenje:

$$\mathbf{x}^* = (.6670095, 1.022388, .2282879, .1848217, 1.090900, 1.090900, \\ 1.069036, .1066126, -.3387867)$$

$$f(\mathbf{x}^*) = 5055.011803$$

C.5. Zadatak br. 5 Kemijska ravnoteža

Funkcija cilja:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{10} x_j \left(c_j + \ln \frac{x_j}{x_1 + \dots + x_{10}} \right)$$

gdje su:

j	c_j	j	c_j
1	-6.089	6	-14.986
2	-17.164	7	-24.100
3	-34.054	8	-10.708
4	-5.914	9	-26.662
5	-24.721	10	-22.179

Funkcije ograničenja:

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_6 + x_{10} - 2 = 0$$

$$x_4 + 2x_5 + x_6 + x_7 - 1 = 0$$

$$x_3 + x_7 + x_8 + 2x_9 + x_{10} = 0$$

Rubna ograničenja:

$$10^{-6} \leq x_i, \quad i = 1, \dots, 10$$

Početno rješenje:

$$\mathbf{x}^{(0)} = (.1, \dots, .1)$$

$$f(\mathbf{x}^{(0)}) = -20.961$$

Konačno rješenje:

$$\mathbf{x}^* = (.01773548, .08200180, .8825646, .7233256E-3, .4907851, \\ .4335469E-3, .01727298, .007765639, .01984929, .05269826)$$

$$f(\mathbf{x}^*) = -47.707579$$

C.6. Zadatak br. 6 Proces alkilacije

Funkcija cilja:

$$f(\mathbf{x}) = 5.04 x_1 + .035 x_2 + 10 x_3 + 3.36 x_5 - .063 x_4 x_7$$

Funkcije ograničenja:

$$35.82 - .222 x_{10} - b x_9 \geq 0$$

$$-133 + 3 x_7 - a x_{10} \geq 0$$

$$-35.82 + .222 x_{10} + b x_9 + x_9 (1/b - b) \geq 0$$

$$133 - 3 x_7 + a x_{10} + (1/a - a) x_{10} \geq 0$$

$$1.12 x_1 + .13167 x_1 x_8 - .00667 x_1 x_8^2 - a x_4 \geq 0$$

$$57.425 + 1.098 x_8 - .038 x_8^2 + .325 x_6 - a x_7 \geq 0$$

$$-1.12 x_1 - .13167 x_1 x_8 + .00667 x_1 x_8^2 + a x_4 + (1/a - a) x_4 \geq 0$$

$$-57.425 - 1.098 x_8 + .038 x_8^2 - .325 x_6 + a x_7 + (1/a - a) x_7 \geq 0$$

$$1.22 x_4 - x_1 - x_5 = 0$$

$$98000 x_3 / (x_4 x_9 + 1000 x_3) - x_6 = 0$$

$$(x_2 + x_5) / x_1 - x_8 = 0$$

gdje su:

$$a = .99$$

$$b = .9$$

Rubna ograničenja:

$$.00001 \leq x_1 \leq 2000$$

$$.00001 \leq x_2 \leq 16000$$

$$.00001 \leq x_3 \leq 120$$

$$.00001 \leq x_4 \leq 5000$$

$$.00001 \leq x_5 \leq 2000$$

$$85 \leq x_6 \leq 93$$

$$90 \leq x_7 \leq 95$$

$$3 \leq x_8 \leq 12$$

$$1.2 \leq x_9 \leq 4$$

$$145 \leq x_{10} \leq 162$$

Početno rješenje:

$$\mathbf{x}^{(0)} = (1745, 12000, 110, 3048, 1974, 89.2, 92.8, 8, 3.6, 145)$$

$$f(\mathbf{x}^{(0)}) = -872.3872$$

Konačno rješenje:

$$\mathbf{x}^* = (1698.096, 15818.73, 54.10228, 3031.226, 2000, 90.11537, \\ 10.49336, 1.561636, 153.53535)$$

$$f(\mathbf{x}^*) = -1768.80696$$

C.7. Zadatak br. 7 3-stupno membransko separiranje

Funkcija cilja:

$$f(\mathbf{x}) = x_{11} + x_{12} + x_{13}$$

Funkcije ograničenja:

$$x_3 - x_2 \geq 0$$

$$x_2 - x_1 \geq 0$$

$$1 - .002 x_7 + .002 x_8 \geq 0$$

$$50 \leq f(\mathbf{x}) \leq 250$$

$$x_{13} - 1.262626 x_{10} + 1.231059 x_3 x_{10} \geq 0$$

$$x_5 - .03475 x_2 - .975 x_2 x_5 + .00975 x_2^2 \geq 0$$

$$x_6 - .03475 x_3 - .975 x_3 x_6 + .00975 x_3^2 \geq 0$$

$$x_5 x_7 - x_1 x_8 - x_4 x_7 + x_4 x_8 \geq 0$$

$$1 - .002 (x_2 x_9 + x_5 x_8 - x_1 x_8 - x_6 x_9) - x_5 - x_6 \geq 0$$

$$x_2 x_9 - x_3 x_{10} - x_6 x_9 - 500 x_2 + 500 x_6 + x_2 x_{10} \geq 0$$

$$x_2 - .9 - .002 (x_2 x_{10} - x_3 x_{10}) \geq 0$$

$$x_4 - .03475 x_1 - .975 x_1 x_4 + .00975 x_1^2 \geq 0$$

$$x_{11} - 1.262626 x_8 + 1.231059 x_1 x_8 \geq 0$$

$$x_{12} - 1.262626 x_9 + 1.231059 x_2 x_9 \geq 0$$

Rubna ograničenja:

$$.1 \leq x_1 \leq 1$$

$$.1 \leq x_2 \leq 1$$

$$.1 \leq x_3 \leq 1$$

$$.0001 \leq x_4 \leq .1$$

$$.1 \leq x_5 \leq .9$$

$$.1 \leq x_6 \leq .9$$

$$.1 \leq x_7 \leq 1000$$

$$.1 \leq x_8 \leq 1000$$

$$500 \leq x_9 \leq 1000$$

$$.1 \leq x_{10} \leq 500$$

$$1 \leq x_{11} \leq 150$$

$$.0001 \leq x_{12} \leq 150$$

$$.0001 \leq x_{13} \leq 150$$

Početno rješenje:

$$\mathbf{x}^{(0)} = (.5, .8, .9, .1, .14, .5, 489, 80, 650, 45, 150, 150, 150)$$

$$f(\mathbf{x}^{(0)}) = 450$$

Konačno rješenje:

$$\mathbf{x}^* = (.8037703, .8999860, .9709724, .09999952, .1908154, .4605717, \\ 574.0803, 74.08043, 500.0162, .1, 20.23413, 77.34755, .00673039)$$

$$f(\mathbf{x}^*) = 97.588409$$

C.8. Zadatak br. 8 Zupčasti prijenosnik najmanje tromosti

Funkcija cilja:

$$f(\mathbf{x}) = 0.1 [12 + x_1^2 + (1 + x_2^2)/x_1^2 + (x_1^2 x_2^2 + 100)/x_1^4 x_2^4]$$

Funkcije ograničenja:

(zadatak nema ograničenja)

Rubna ograničenja:

$$1 \leq x_1 \leq 3$$

$$1 \leq x_2 \leq 3$$

Početno rješenje:

$$\mathbf{x}^{(0)} = (.5, .5)$$

$$f(\mathbf{x}^{(0)}) = 2563.32$$

Konačno rješenje:

$$\mathbf{x}^* = (1.743, 2.030)$$

$$f(\mathbf{x}^*) = 1.74415$$

C.9. Zadatak br. 9 Konstrukcija kliznoga ležaja

Funkcija cilja:

$$f(\mathbf{x}) = 0.1 [.44 (x_1^3/x_2^2 + 10/x_1 + 0.592 (x_1/x_2^3)]$$

Funkcije ograničenja:

$$1 - 8.62 (x_2^3/x_1) \geq 0$$

Rubna ograničenja:

$$0 \leq x_i \leq 5, i = 1, 2$$

Početno rješenje:

$$\mathbf{x}^{(0)} = (2.5, 2.5)$$

$$f(\mathbf{x}^{(0)}) = 0.519472$$

Konačno rješenje:

$$\mathbf{x}^* = (1.287, 0.5305)$$

$$f(\mathbf{x}^*) = 1.62058$$

C.10. Zadatak br. 10 Zadatak konstrukcije grebena

Funkcija cilja:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\pi}{3.6} \sum_{i=1}^{100} \{ [\log(t_i) + x_2 \sin(t_i) + x_1 \cos(t_i)]^2 + [\log(t_i) + x_2 \cos(t_i) - x_1 \sin(t_i)]^2 \}$$

gdje je:

$$t_i = \pi [1/3 + (i-1)/180], \quad i = 1, \dots, 100$$

Funkcije ograničenja:

$$30 - p_{\max} \geq 0$$

$$p_{\max} + 30 \geq 0$$

gdje je:

$$p_{\max} = \max_{1 \leq i \leq 100} \left(\frac{180}{\pi} \arctan \left| \frac{1/t_i - x_1}{\log(t_i) + x_2} \right| \right)$$

Rubna ograničenja:

$$0 \leq x_i \leq 1.5, \quad i = 1, 2$$

Početno rješenje:

$$\mathbf{x}^{(0)} = (0.75, 0.75)$$

$$f(\mathbf{x}^{(0)}) = 217.361$$

Konačno rješenje:

$$\mathbf{x}^* = (0.9114, 0.02928)$$

$$f(\mathbf{x}^*) = 114.95$$

C.11. Zadatak br. 11 Konstrukcija zamašnjaka

Funkcija cilja:

$$f(\mathbf{x}) = (-0.0201 x_1^4 x_2 x_3^2) \cdot 10^{-7}$$

Funkcije ograničenja:

$$\begin{aligned} 675 - x_1^2 x_2 &\geq 0 \\ 0.419 - 10^{-7} x_1^2 x_3^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Rubna ograničenja:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_1 \leq 36 \\ 0 &\leq x_2 \leq 5 \\ 0 &\leq x_3 \leq 125 \end{aligned}$$

Početno rješenje:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(0)} &= (22.3, 0.5, 125) \\ f(\mathbf{x}^{(0)}) &= -3.88334 \end{aligned}$$

Konačno rješenje:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= (16.51, 2.477, 124) \\ f(\mathbf{x}^*) &= -5.68478 \end{aligned}$$

C.12. Zadatak br. 13 Zadatak zavarene grede

Funkcija cilja:

$$f(\mathbf{x}) = 1.10471 x_1^2 x_2 + .04811 x_3 x_4 (14 + x_2)$$

Funkcije ograničenja:

$$\begin{aligned}
 x_4 - x_1 &\geq 0 \\
 10^{-6} \{ 13600 - [t_1^2 + 2 t_1 t_2 x_2 / (x_2^2 + (x_1 + x_3)^2)^{1/2} + t_2^2]^{1/2} \} &\geq 0 \\
 3 - 5.04 / (x_4 x_3^2) &\geq 0 \\
 10^{-6} [4.013 (E G)^{1/2} (1 - x_3 (E/G)^{1/2} / 28) / 196 - 6000] &\geq 0 \\
 .25 - 2.1952 / (x_4 x_3^3) &\geq 0
 \end{aligned}$$

gdje su:

$$\begin{aligned}
 t_1 &= 6000 / (1.414 x_1 x_2) \\
 t_2 &= 3000 (14 + x_2 / 2) [x_2^2 + (x_1 + x_3)^2]^{1/2} / J \\
 J &= .707 x_1 x_2 [x_2^2 / 6 + (x_1 + x_3)^2 / 2] \\
 E &= x_3 x_4^3 \cdot 10^7 / 4 \\
 G &= 4 x_3 x_4^3 \cdot 10^6
 \end{aligned}$$

Rubna ograničenja:

$$\begin{aligned}
 0.125 &\leq x_1 \\
 0 &\leq x_2 \\
 0 &\leq x_3
 \end{aligned}$$

Početno rješenje:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}^{(0)} &= (1, 7, 8, 1) \\
 f(\mathbf{x}^{(0)}) &= 15.8154
 \end{aligned}$$

Konačno rješenje:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}^* &= (0.2444, 6.219, 8.291, 0.2444) \\
 f(\mathbf{x}^*) &= 2.38116
 \end{aligned}$$

C.13. Zadatak br. 16 Optimiranje procesa alkilacije

Funkcija cilja:

$$f(\mathbf{x}) = 1.715 x_1 + .035 x_1 x_6 + 4.0565 x_3 + 10 x_2 - .063 x_3 x_5 + 3000$$

Funkcije ograničenja:

$$\begin{aligned} 1 - .0059553571 x_6^2 - .88392857 x_3/x_1 + .1175625 x_6 &\geq 0 \\ 1 - 1.1088 x_1/x_3 - .1303533 x_1 x_6/x_3 + .0066033 x_1 x_6^2/x_3 &\geq 0 \\ 1 - .00066173269 x_6^2 - .017239878 x_5 + .0056595559 x_4 + .019120592 x_6 &\geq 0 \\ 1 - 56.85075/x_5 - 1.08702 x_6/x_5 - .32175 x_4/x_5 + .03762 x_6^2/x_5 &\geq 0 \\ 1 - .006198 x_7 - 2462.3121 x_2/(x_3 x_4) + 25.125634 x_2/x_3 &\geq 0 \\ 1 - 161.18996/x_7 - 5000 x_2/(x_3 x_7) + 489510 x_2/(x_3 x_4 x_7) &\geq 0 \\ 1 - 44.333333/x_5 - .33 x_7/x_5 &\geq 0 \\ 1 - .022556 x_5 + .007595 x_7 &\geq 0 \\ 1 - .00061 x_3 + .0005 x_1 &\geq 0 \\ 1 - .819672 x_1/x_3 - .819672/x_3 &\geq 0 \\ 1 - 24500 x_2/(x_3 x_4) + 250 x_2/x_3 &\geq 0 \\ 1 - .010204082 x_4 - .000012244898 x_3 x_4/x_2 &\geq 0 \\ 1 - .0000625 x_1 x_6 - .0000625 x_1 + .00007625 x_3 &\geq 0 \\ 1 - 1.22 x_3/x_1 - 1/x_1 + x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

Rubna ograničenja:

$$\begin{aligned} 1 &\leq x_1 \leq 2000 \\ 1 &\leq x_2 \leq 120 \\ 1 &\leq x_3 \leq 5000 \\ 85 &\leq x_4 \leq 93 \\ 90 &\leq x_5 \leq 95 \\ 3 &\leq x_6 \leq 12 \\ 145 &\leq x_7 \leq 162 \end{aligned}$$

Početno rješenje:

$$\mathbf{x}^{(0)} = (1745, 110, 3048, 89, 92.8, 8, 145)$$

$$f(\mathbf{x}^{(0)}) = 2125.66$$

Konačno rješenje:

$$\mathbf{x}^* = (905.4, 36.39, 2381.48, 88.99, 95, 12, 153.54)$$

$$f(\mathbf{x}^*) = 704.306$$

C.14. Zadatak br. 17 Optimiranje tokarilice

Funkcija cilja:

$$f(\mathbf{x}) = -20000 (.15 x_1 + 14 x_2 - .06) / (.002 + x_1 + 60 x_2)$$

Funkcije ograničenja:

$$x_1 - .75/(x_3 x_4) \geq 0$$

$$x_1 - x_9/(x_5 x_4) \geq 0$$

$$x_1 - x_{10}/(x_6 x_4) - 10/x_4 \geq 0$$

$$x_1 - .19/(x_4 x_7) - 10/x_4 \geq 0$$

$$x_1 - .125/(x_4 x_8) \geq 0$$

$$10000 x_2 - .00131 x_9 x_5^{.666} x_4^{1.5} \geq 0$$

$$10000 x_2 - .001038 x_{10} x_6^{1.6} x_4^3 \geq 0$$

$$10000 x_2 - .000223 x_7^{.666} x_4^{1.5} \geq 0$$

$$10000 x_2 - .000076 x_8^{3.55} x_4^{5.66} \geq 0$$

$$10000 x_2 - .000698 x_3^{1.2} x_4^2 \geq 0$$

$$10000 x_2 - .00005 x_3^{1.6} x_4^3 \geq 0$$

$$10000 x_2 - .00000654 x_3^{2.42} x_4^{4.17} \geq 0$$

$$10000 x_2 - .000257 x_3^{.666} x_4^{1.5} \geq 0$$

$$30 - 2.003 x_4 x_5 - 1.885 x_6 x_4 - .184 x_8 x_4 - 2 x_3^{.803} x_4 \geq 0$$

$$x_9 + x_{10} - .255 = 0$$

Rubna ograničenja:

$$0 \leq x_1 \leq 10$$

$$0 \leq x_2 \leq 0.1$$

$$0.00005 \leq x_3 \leq 0.0081$$

$$10 \leq x_4 \leq 1000$$

$$0.00005 \leq x_5 \leq 0.0017$$

$$0.00005 \leq x_6 \leq 0.0013$$

$$0.00005 \leq x_7 \leq 0.0027$$

$$0.00005 \leq x_8 \leq 0.002$$

$$0.00005 \leq x_9 \leq 1$$

$$0.00005 \leq x_{10} \leq 1$$

Početno rješenje:

$$\mathbf{x}^{(0)} = (10, 0.005, 0.0081, 100, 0.0017, 0.0013, 0.0027, 0.002, 0.15, 0.105)$$

$$f(\mathbf{x}^{(0)}) = -2931.47$$

Konačno rješenje:

$$\mathbf{x}^* = (.14727, .1, .0081, 628.72, .0017, .001182, .0027, .00135, .15741, .097593)$$

$$f(\mathbf{x}^*) = -4430.88$$

C.15. Zadatak br. 18 Proračun kemijske ravnoteže

Funkcija cilja:

$$f(\mathbf{x}) = 100000 \prod_{i=1}^{11} x_i^{a_i}$$

gdje su:

i	a_i	i	a_i
1	-0.00133172	7	-0.008092
2	-0.002270927	8	-0.005
3	-0.00248546	9	-0.000909
4	-4.67	10	-0.00088
5	-4.671973	11	-0.00119
6	-0.00814		

Funkcije ograničenja:

$$\begin{aligned}
& 1 - .05367373 x_1 - .021863746 x_2 - .097733533 x_3 - .0066940803 x_4 x_5 \geq 0 \\
& 1 - 10^{-6} x_1 - 10^{-5} x_2 - 10^{-6} x_3 - 10^{-10} x_4 x_{12} - 10^{-8} x_5/x_{12} - 10^{-2} x_6/x_{12} - \\
& \quad 10^{-4} x_7 x_{12} - .10898645 x_4 x_5 - 1.6108052 \cdot 10^{-4} x_2 x_5/x_{12} - \\
& \quad 10^{-23} x_2 x_4 x_5 - 1.9304541 \cdot 10^{-6} x_2 x_5/(x_4 x_{12}^2) - 10^{-3} x_{10}/x_{12} \geq 0 \\
& 1 - 10^{-6} x_1 - 10^{-5} x_2 - 10^{-6} x_3 - 10^{-9} x_4 - 10^{-9} x_5 - 10^{-3} x_6 - 10^{-3} x_8 - \\
& \quad .10898645 x_4 x_5 - 1.6108052 x_2 x_5 - 10^{-23} x_2 x_4 x_5 - 1.9304541 \cdot 10^{-8} x_2 x_5/x_4 \\
& \quad - 10^{-5} x_9 - 1.1184059 \cdot 10^{-4} x_1 x_9 - 10^{-4} x_{11} \geq 0
\end{aligned}$$

Rubna ograničenja:

$$0.1 \leq x_i \leq 100, \quad i = 1, \dots, 12$$

Početno rješenje:

$$\begin{aligned}
x_i^{(0)} &= 4, \quad i = 1, \dots, 12 \\
f(\mathbf{x}^{(0)}) &= 0.227683
\end{aligned}$$

Konačno rješenje:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^* &= (2.6632, 4.5173, 7.1338, 2.2373, 4.0784, 1.3183, 4.1252, 2.8562, \\
& \quad 1.6766, 2.1789, 5.1234, 6.6593) \\
f(\mathbf{x}^*) &= 3.16859
\end{aligned}$$

PRILOG D:

PRIKAZ REZULTATA PO ZADACIMA

Ovaj prilog sadrži cjelovit računalni ispis rezultata proračuna programom *RQPOPT* u izvedbi s ugrađenim postupkom prevladavanja poteškoća izazvanih lošim smjerom pretraživanja. Odgovarajući sažeti prikaz rezultata dan je u tablici VI.

Primjedbe:

1. Ispis iznosa ograničenja u točki optimuma (G^*) ne sadrži rubna ograničenja.
2. Rezultat za najveće prekoračenje ograničenja u točki optimuma (V) uključuje sva rubna ograničenja.
3. Rezultati za pomak u smjeru pretraživanja (DN) i gradijent Lagrangeove funkcije (LGN) prikazani su u obliku kvadratnih normi odgovarajućih vektora.
4. U ispisu Lagrangeovih množitelja djelatnih ograničenja u točki optimuma (U^*) se rubna ograničenja broje s indeksima od $m+1$ do $m+2n$, gdje je m ukupni broj ograničenja, a n broj varijabli, pri čemu se za svako rubno ograničenje prvo broji donja, pa gornja vrijednost.
5. U ispisu broja izračunavanja ograničenja (NGE) i broja izračunavanja gradijenata ograničenja ($NGGE$) se izračunavanje svake funkcije ograničenja, ili njena gradijenta, broji posebno.

ZADATAK BR. 1 KONSTRUKCIJA TRANSFORMATORA

BROJ VARIJABLI N = 6
 BROJ OGRANICENJA M = 2
 BROJ RUBNIH OGRANICENJA MB = 6
 IZRACUNAVANJE GRADIJENATA ANALITICKO
 POCETNO RJESENJE IZVEDIVO

POCETNI VEKTOR RJESENJA:

X0(1) = 5.540 X0(2) = 4.400 X0(3) = 12.020
 X0(4) = 11.820 X0(5) = .702 X0(6) = .852

POCETNA FUNKCIJA TROSKOVA F0 = 137.066
 NAJVECE POCETNO PREKORACENJE OGRANICENJA ... V0 = .000D+00

REZULTATI

DOJAVNIK STANJA OBRADJE INFO = 0

VEKTOR RJESENJA:

X*(1) = 5.333 X*(2) = 4.657 X*(3) = 10.433
 X*(4) = 12.082 X*(5) = .753 X*(6) = .879

IZNOSI OGRANICENJA:

G*(1) = .000 G*(2) = .000

FUNKCIJA TROSKOVA F* = 135.076
 NAJVECE PREKORACENJE OGRANICENJA V = .258D-08
 POMAK U SMJERU PRETRAZIVANJA DN = .767D-03
 GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE LGN = .617D-02

BROJ DJELATNIH OGRANICENJA U OPTIMUMU NAC = 2

LAGRANGEOVI MNOZITELJI DJELATNIH OGRANICENJA:

U*(1) = 262.868 U*(2) = 108.774

BROJ ITERACIJA NIT = 10
 BROJ IZRACUNAVANJA FUNKCIJE TROSKOVA NFE = 19
 BROJ IZRACUNAVANJA OGRANICENJA NGE = 38
 BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROSKOVA NFGE = 10
 BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENATA OGRANICENJA NGGE = 20

VRIJEME IZRACUNAVANJA CPUT = .00

ZADATAK BR. 2 OPTIMALNA KONSTRUKCIJA REAKTORA

BROJ VARIJABLI N = 8
 BROJ OGRANICENJA M = 6
 BROJ RUBNIH OGRANICENJA MB = 16
 IZRACUNAVANJE GRADIJENATA ANALITICKO
 POCETNO RJESENJE NEIZVEDIVO

POCETNI VEKTOR RJESENJA:

X0(1) = 6.000 X0(2) = 3.000 X0(3) = .400
 X0(4) = .200 X0(5) = 6.000 X0(6) = 6.000
 X0(7) = 1.000 X0(8) = .500

POCETNA FUNKCIJA TROSKOVA F0 = 3.657
 NAJVECE POCETNO PREKORACENJE OGRANICENJA ... V0 = .417D+00

REZULTATI

DOJAVNIK STANJA OBRADJE INFO = 0

VEKTOR RJESENJA:

X*(1) = 6.465 X*(2) = 2.233 X*(3) = .667
 X*(4) = .596 X*(5) = 5.933 X*(6) = 5.527
 X*(7) = 1.013 X*(8) = .401

IZNOSI OGRANICENJA:

G*(1) = .000 G*(2) = .000 G*(3) = .000
 G*(4) = .000 G*(5) = -2.951 G*(6) = -.249

FUNKCIJA TROSKOVA F* = 3.951
 NAJVECE PREKORACENJE OGRANICENJA V = .117D-07
 POMAK U SMJERU PRETRAZIVANJA DN = .719D-03
 GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE LGN = .422D-03

BROJ DJELATNIH OGRANICENJA U OPTIMUMU NAC = 4

LAGRANGEOVI MNOZITELJI DJELATNIH OGRANICENJA:

U*(1) = .868 U*(2) = 2.204 U*(3) = .168
 U*(4) = .176

BROJ ITERACIJA NIT = 16
 BROJ IZRACUNAVANJA FUNKCIJE TROSKOVA NFE = 18
 BROJ IZRACUNAVANJA OGRANICENJA NGE = 108
 BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROSKOVA NFGE = 16
 BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENATA OGRANICENJA NGGE = 63

VRIJEME IZRACUNAVANJA CPUT = .11

ZADATAK BR. 3 KONSTRUKCIJA IZMJENJIVACA TOPLINE

BROJ VARIJABLI N = 8
 BROJ OGRANICENJA M = 6
 BROJ RUBNIH OGRANICENJA MB = 16
 IZRACUNAVANJE GRADIJENATA ANALITICKO
 POCETNO RJESENJE NEIZVEDIVO

POCETNI VEKTOR RJESENJA:

X0(1) = 5000.000 X0(2) = 5000.000 X0(3) = 5000.000
 X0(4) = 200.000 X0(5) = 350.000 X0(6) = 150.000
 X0(7) = 225.000 X0(8) = 425.000

POCETNA FUNKCIJA TROSKOVA F0 = 15000.000
 NAJVECE POCETNO PREKORACENJE OGRANICENJA ... V0 = .625D+05

REZULTATI

DOJAVNIK STANJA OBRADJE INFO = 0

VEKTOR RJESENJA:

X*(1) = 579.270 X*(2) = 1361.826 X*(3) = 5108.153
 X*(4) = 182.015 X*(5) = 295.674 X*(6) = 217.985
 X*(7) = 286.341 X*(8) = 395.674

IZNOSI OGRANICENJA:

G*(1) = .000 G*(2) = .000 G*(3) = .000
 G*(4) = .000 G*(5) = .000 G*(6) = .000

FUNKCIJA TROSKOVA F* = 7049.249
 NAJVECE PREKORACENJE OGRANICENJA V = .117D-12
 POMAK U SMJERU PRETRAZIVANJA DN = .995D-03
 GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE LGN = .995D-03

BROJ DJELATNIH OGRANICENJA U OPTIMUMU NAC = 6

LAGRANGEOVI MNOZITELJI DJELATNIH OGRANICENJA:

U*(1) = 6.944 U*(2) = 22.593 U*(3) = 72.290
 U*(4) = 8.660 U*(5) = 17.767 U*(6) = 57.403

BROJ ITERACIJA NIT = 10413
 BROJ IZRACUNAVANJA FUNKCIJE TROSKOVA NFE = 117206
 BROJ IZRACUNAVANJA OGRANICENJA NGE = 703242
 BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROSKOVA NFGE = 10412
 BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENATA OGRANICENJA NGGE = 62013

VRIJEME IZRACUNAVANJA CPUT = 96.33

ZADATAK BR. 4 RASPORED STATICKE SNAGE

BROJ VARIJABLI N = 9
 BROJ OGRANICENJA M = 6
 BROJ RUBNIH OGRANICENJA MB = 8
 IZRACUNAVANJE GRADIJENATA ANALITICKO
 POCETNO RJESENJE NEIZVEDIVO

POCETNI VEKTOR RJESENJA:

X0(1) = .800 X0(2) = .800 X0(3) = .200
 X0(4) = .200 X0(5) = 1.045 X0(6) = 1.045
 X0(7) = 1.045 X0(8) = .000 X0(9) = .000

POCETNA FUNKCIJA TROSKOVA F0 = 4853.334
 NAJVECE POCETNO PREKORACENJE OGRANICENJA ... V0 = .100D+01

REZULTATI

DOJAVNIK STANJA OBRADJE INFO = 0

VEKTOR RJESENJA:

X*(1) = .667 X*(2) = 1.022 X*(3) = .228
 X*(4) = .185 X*(5) = 1.091 X*(6) = 1.091
 X*(7) = 1.069 X*(8) = .107 X*(9) = -.339

IZNOSI OGRANICENJA:

G*(1) = .000 G*(2) = .000 G*(3) = .000
 G*(4) = .000 G*(5) = .000 G*(6) = .000

FUNKCIJA TROSKOVA F* = 5055.012
 NAJVECE PREKORACENJE OGRANICENJA V = .131D-06
 POMAK U SMJERU PRETRAZIVANJA DN = .502D-03
 GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE LGN = .120D+05

BROJ DJELATNIH OGRANICENJA U OPTIMUMU NAC = 8

LAGRANGEOVI MNOZITELJI DJELATNIH OGRANICENJA:

U*(1) = -8822.366 U*(2) = -11918.627 U*(3) = -11416.455
 U*(4) = .000 U*(5) = .000 U*(6) = .308
 U*(16) = 280.060 U*(18) = 569.146

BROJ ITERACIJA NIT = 23
 BROJ IZRACUNAVANJA FUNKCIJE TROSKOVA NFE = 74
 BROJ IZRACUNAVANJA OGRANICENJA NGE = 444
 BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROSKOVA NFGE = 23
 BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENATA OGRANICENJA NGGE = 138

VRIJEME IZRACUNAVANJA CPUT = .28

ZADATAK BR. 5 KEMIJSKA RAVNOTEZA

BROJ VARIJABLI N = 10
 BROJ OGRANICENJA M = 3
 BROJ RUBNIH OGRANICENJA MB = 10
 IZRACUNAVANJE GRADIJENATA ANALITICKO
 POCKETNO RJESENJE NEIZVEDIVO

POCETNI VEKTOR RJESENJA:

X0(1) = .100 X0(2) = .100 X0(3) = .100
 X0(4) = .100 X0(5) = .100 X0(6) = .100
 X0(7) = .100 X0(8) = .100 X0(9) = .100
 X0(10) = .100

POCETNA FUNKCIJA TROSKOVA F0 = -20.960
 NAJVECE POCKETNO PREKORACENJE OGRANICENJA ... V0 = .650D+00

REZULTATI

DOJAVNIK STANJA OBRADJE INFO = 0

VEKTOR RJESENJA:

X*(1) = .040 X*(2) = .148 X*(3) = .783
 X*(4) = .001 X*(5) = .486 X*(6) = .001
 X*(7) = .027 X*(8) = .018 X*(9) = .038
 X*(10) = .097

IZNOSI OGRANICENJA:

G*(1) = .000 G*(2) = .000 G*(3) = .000

FUNKCIJA TROSKOVA F* = -47.761
 NAJVECE PREKORACENJE OGRANICENJA V = .564D-16
 POMAK U SMJERU PRETRAZIVANJA DN = .885D-03
 GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE LGN = .150D+03

BROJ DJELATNIH OGRANICENJA U OPTIMUMU NAC = 3

LAGRANGEOVI MNOZITELJI DJELATNIH OGRANICENJA:

U*(1) = -32.457 U*(2) = -34.311 U*(3) = -43.049

BROJ ITERACIJA NIT = 26
 BROJ IZRACUNAVANJA FUNKCIJE TROSKOVA NFE = 38
 BROJ IZRACUNAVANJA OGRANICENJA NGE = 114
 BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROSKOVA NFGE = 26
 BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENATA OGRANICENJA NGGE = 78

VRIJEME IZRACUNAVANJA CPUT = .28

ZADATAK BR. 6 PROCES ALKILACIJE

BROJ VARIJABLI N = 10
 BROJ OGRANICENJA M = 11
 BROJ RUBNIH OGRANICENJA MB = 20
 IZRACUNAVANJE GRADIJENATA ANALITICKO
 POCETNO RJESENJE NEIZVEDIVO

POCETNI VEKTOR RJESENJA:

X0(1) = 1745.000 X0(2) = 12000.000 X0(3) = 110.000
 X0(4) = 3048.000 X0(5) = 1974.000 X0(6) = 89.200
 X0(7) = 92.800 X0(8) = 8.000 X0(9) = 3.600
 X0(10) = 145.000

POCETNA FUNKCIJA TROSKOVA F0 = -872.387
 NAJVECE POCETNO PREKORACENJE OGRANICENJA ... V0 = .440D+00

REZULTATI

DOJAVNIK STANJA OBRADJE INFO = 0

VEKTOR RJESENJA:

X*(1) = 1697.857 X*(2) = 15788.431 X*(3) = 54.212
 X*(4) = 3031.030 X*(5) = 2000.000 X*(6) = 90.131
 X*(7) = 95.000 X*(8) = 10.477 X*(9) = 1.562
 X*(10) = 153.535

IZNOSI OGRANICENJA:

G*(1) = .000 G*(2) = .000 G*(3) = .000
 G*(4) = -.009 G*(5) = .000 G*(6) = .000
 G*(7) = -.023 G*(8) = .000 G*(9) = .000
 G*(10) = -60.927 G*(11) = -.033

FUNKCIJA TROSKOVA F* = -1768.800
 NAJVECE PREKORACENJE OGRANICENJA V = .153D-12
 POMAK U SMJERU PRETRAZIVANJA DN = .442D-03
 GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE LGN = .721D+03

BROJ DJELATNIH OGRANICENJA U OPTIMUMU NAC = 9

LAGRANGEOVI MNOZITELJI DJELATNIH OGRANICENJA:

U*(1) = -7.855 U*(2) = 355.280 U*(3) = 60.171
 U*(5) = 221.332 U*(6) = 354.011 U*(8) = 9.477
 U*(9) = 250.017 U*(21) = .881 U*(25) = 172.969

BROJ ITERACIJA NIT = 3049
 BROJ IZRACUNAVANJA FUNKCIJE TROSKOVA NFE = 24442
 BROJ IZRACUNAVANJA OGRANICENJA NGE = 268862
 BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROSKOVA NFGE = 3049
 BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENATA OGRANICENJA NGGE = 33502
 VRIJEME IZRACUNAVANJA CPUT = 79.37

ZADATAK BR. 7 3-STUPNO MEMBRANSKO SEPARIRANJE

BROJ VARIJABLI N = 13
 BROJ OGRANICENJA M = 15
 BROJ RUBNIH OGRANICENJA MB = 26
 IZRACUNAVANJE GRADIJENATA ANALITICKO
 POCETNO RJESENJE NEIZVEDIVO
 POCETNI VEKTOR RJESENJA:
 X0(1) = .500 X0(2) = .800 X0(3) = .900
 X0(4) = .100 X0(5) = .140 X0(6) = .500
 X0(7) = 489.000 X0(8) = 80.000 X0(9) = 650.000
 X0(10) = 450.000 X0(11) = 150.000 X0(12) = 150.000
 X0(13) = 150.000
 POCETNA FUNKCIJA TROSKOVA F0 = 450.000
 NAJVECE POCETNO PREKORACENJE OGRANICENJA ... V0 = .306D+02

REZULTATI

DOJAVNIK STANJA OBRADJE INFO = 0
 VEKTOR RJESENJA:
 X*(1) = .804 X*(2) = .900 X*(3) = .974
 X*(4) = .100 X*(5) = .191 X*(6) = .486
 X*(7) = 574.077 X*(8) = 74.077 X*(9) = 500.018
 X*(10) = .100 X*(11) = 20.233 X*(12) = 77.348
 X*(13) = .006
 IZNOSI OGRANICENJA:
 G*(1) = -.074 G*(2) = -.096 G*(3) = .000
 G*(4) = -.952 G*(5) = -.610 G*(6) = .000
 G*(7) = .000 G*(8) = .000 G*(9) = .000
 G*(10) = .000 G*(11) = .000 G*(12) = .000
 G*(13) = .000 G*(14) = .000 G*(15) = .000
 FUNKCIJA TROSKOVA F* = 97.588
 NAJVECE PREKORACENJE OGRANICENJA V = .842D-08
 POMAK U SMJERU PRETRAZIVANJA DN = .620D-03
 GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE LGN = .620D-03
 BROJ DJELATNIH OGRANICENJA U OPTIMUMU NAC = 13
 LAGRANGEOVI MNOZITELJI DJELATNIH OGRANICENJA:
 U*(3) = .059 U*(6) = 1.010 U*(7) = 495.437
 U*(8) = .052 U*(9) = 352.552 U*(10) = 693.348
 U*(11) = .555 U*(12) = 261.859 U*(13) = 261.795
 U*(14) = 91.198 U*(15) = 615.549 U*(32) = .017
 U*(34) = .117
 BROJ ITERACIJA NIT = 4789
 BROJ IZRACUNAVANJA FUNKCIJE TROSKOVA NFE = 36195
 BROJ IZRACUNAVANJA OGRANICENJA NGE = 542940
 BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROSKOVA NFGE = 4788
 BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENATA OGRANICENJA NGGE = 63386
 VRIJEME IZRACUNAVANJA CPUT = 163.40

ZADATAK BR. 8 ZUPCASTI PRIJENOSNIK NAJMANJE TROMOSTI

BROJ VARIJABLI N = 2
 BROJ OGRANICENJA M = 0
 BROJ RUBNIH OGRANICENJA MB = 4
 IZRACUNAVANJE GRADIJENATA ANALITICKO
 POCETNO RJESENJE IZVEDIVO

POCETNI VEKTOR RJESENJA:

X0 (1) = .500 X0 (2) = .500

POCETNA FUNKCIJA TROSKOVA F0 = 2563.325
 NAJVECE POCETNO PREKORACENJE OGRANICENJA ... V0 = .000D+00

REZULTATI

DOJAVNIK STANJA OBRADJE INFO = 0

VEKTOR RJESENJA:

X* (1) = 1.743 X* (2) = 2.030

FUNKCIJA TROSKOVA F* = 1.744
 NAJVECE PREKORACENJE OGRANICENJA V = .000D+00
 POMAK U SMJERU PRETRAZIVANJA DN = .861D-04
 GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE LGN = .417D-04

BROJ DJELATNIH OGRANICENJA U OPTIMUMU NAC = 0

BROJ ITERACIJA NIT = 16
 BROJ IZRACUNAVANJA FUNKCIJE TROSKOVA NFE = 25
 BROJ IZRACUNAVANJA OGRANICENJA NGE = 0
 BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROSKOVA NFGE = 16
 BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENATA OGRANICENJA NGGE = 0
 VRIJEME IZRACUNAVANJA CPUT = .00

ZADATAK BR. 9 KONSTRUKCIJA KLIZNOGA LEZAJA

BROJ VARIJABLI N = 2
 BROJ OGRANICENJA M = 1
 BROJ RUBNIH OGRANICENJA MB = 4
 IZRACUNAVANJE GRADIJENATA ANALITICKO
 POCETNO RJESENJE NEIZVEDIVO

POCETNI VEKTOR RJESENJA:

X0(1) = 2.500 X0(2) = 2.500

POCETNA FUNKCIJA TROSKOVA F0 = .519
 NAJVECE POCETNO PREKORACENJE OGRANICENJA ... V0 = .529D+02

REZULTATI

DOJAVNIK STANJA OBRADE INFO = 0

VEKTOR RJESENJA:

X*(1) = 1.287 X*(2) = .530

IZNOSI OGRANICENJA:

G*(1) = .000

FUNKCIJA TROSKOVA F* = 1.621
 NAJVECE PREKORACENJE OGRANICENJA V = .460D-08
 POMAK U SMJERU PRETRAZIVANJA DN = .151D-03
 GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE LGN = .285D-03

BROJ DJELATNIH OGRANICENJA U OPTIMUMU NAC = 1

LAGRANGEOVI MNOZITELJI DJELATNIH OGRANICENJA:

U*(1) = 4.181

BROJ ITERACIJA NIT = 10
 BROJ IZRACUNAVANJA FUNKCIJE TROSKOVA NFE = 7
 BROJ IZRACUNAVANJA OGRANICENJA NGE = 11
 BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROSKOVA NFGE = 6
 BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENATA OGRANICENJA NGGE = 10
 VRIJEME IZRACUNAVANJA CPUT = .00

ZADATAK BR. 10 ZADATAK KONSTRUKCIJE GREBENA

BROJ VARIJABLI N = 2
 BROJ OGRANICENJA M = 2
 BROJ RUBNIH OGRANICENJA MB = 4
 IZRACUNAVANJE GRADIJENATA NUMERICCKO
 POCETNO RJESENJE IZVEDIVO

POCETNI VEKTOR RJESENJA:

X0(1) = .750 X0(2) = .750

POCETNA FUNKCIJA TROSKOVA F0 = 217.361
 NAJVECE POCETNO PREKORACENJE OGRANICENJA ... V0 = .000D+00

REZULTATI

DOJAVNIK STANJA OBRADJE INFO = 0

VEKTOR RJESENJA:

X*(1) = .911 X*(2) = .029

IZNOSI OGRANICENJA:

G*(1) = .000 G*(2) = -2.000

FUNKCIJA TROSKOVA F* = 114.951
 NAJVECE PREKORACENJE OGRANICENJA V = .000D+00
 POMAK U SMJERU PRETRAZIVANJA DN = .892D-04
 GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE LGN = .334D+02

BROJ DJELATNIH OGRANICENJA U OPTIMUMU NAC = 1

LAGRANGEOVI MNOZITELJI DJELATNIH OGRANICENJA:

U*(1) = 195.840

BROJ ITERACIJA NIT = 52
 BROJ IZRACUNAVANJA FUNKCIJE TROSKOVA NFE = 199
 BROJ IZRACUNAVANJA OGRANICENJA NGE = 278
 BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROSKOVA NFGE = 0
 BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENATA OGRANICENJA NGGE = 0

VRIJEME IZRACUNAVANJA CPUT = 1.82

ZADATAK BR. 11 KONSTRUKCIJA ZAMASNJAKA

BROJ VARIJABLI N = 3
 BROJ OGRANICENJA M = 2
 BROJ RUBNIH OGRANICENJA MB = 6
 IZRACUNAVANJE GRADIJENATA ANALITICKO
 POCETNO RJESENJE NEIZVEDIVO

POCETNI VEKTOR RJESENJA:

X0(1) = 22.300 X0(2) = .500 X0(3) = 125.000

POCETNA FUNKCIJA TROSKOVA F0 = -3.883

NAJVECE POCETNO PREKORACENJE OGRANICENJA ... V0 = .854D+00

REZULTATI

DOJAVNIK STANJA OBRADJE INFO = 0

VEKTOR RJESENJA:

X*(1) = 16.501 X*(2) = 2.479 X*(3) = 124.101

IZNOSI OGRANICENJA:

G*(1) = .000 G*(2) = .001

FUNKCIJA TROSKOVA F* = -5.690

NAJVECE PREKORACENJE OGRANICENJA V = .837D-03

POMAK U SMJERU PRETRAZIVANJA DN = .995D-03

GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE LGN = .995D-03

BROJ DJELATNIH OGRANICENJA U OPTIMUMU NAC = 2

LAGRANGEOVI MNOZITELJI DJELATNIH OGRANICENJA:

U*(1) = 2.397 U*(2) = .697

BROJ ITERACIJA NIT = 29

BROJ IZRACUNAVANJA FUNKCIJE TROSKOVA NFE = 200

BROJ IZRACUNAVANJA OGRANICENJA NGE = 400

BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROSKOVA NFGE = 29

BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENATA OGRANICENJA NGGE = 57

VRIJEME IZRACUNAVANJA CPUT = .06

ZADATAK BR. 12 KONSTRUKCIJSKI ZADATAK TVRTKE WHIRLPOOL

BROJ VARIJABLI N = 3
 BROJ OGRANICENJA M = 1
 BROJ RUBNIH OGRANICENJA MB = 4
 IZRACUNAVANJE GRADIJENATA NUMERICKO
 POCETNO RJESENJE NEIZVEDIVO

POCETNI VEKTOR RJESENJA:

X0(1) = .100 X0(2) = 18.000 X0(3) = 144.000

POCETNA FUNKCIJA TROSKOVA F0 = 30.986
 NAJVECE POCETNO PREKORACENJE OGRANICENJA ... V0 = .352D-01

REZULTATI

DOJAVNIK STANJA OBRADJE INFO = 0

VEKTOR RJESENJA:

X*(1) = .044 X*(2) = 24.000 X*(3) = 85.608

IZNOSI OGRANICENJA:

G*(1) = .000

FUNKCIJA TROSKOVA F* = 36.971
 NAJVECE PREKORACENJE OGRANICENJA V = .000D+00
 POMAK U SMJERU PRETRAZIVANJA DN = .150D-08
 GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE LGN = .506D+02

BROJ DJELATNIH OGRANICENJA U OPTIMUMU NAC = 3

LAGRANGEOVI MNOZITELJI DJELATNIH OGRANICENJA:

U*(1) = -25.292 U*(3) = 488.760 U*(5) = .120

BROJ ITERACIJA NIT = 79
 BROJ IZRACUNAVANJA FUNKCIJE TROSKOVA NFE = 371
 BROJ IZRACUNAVANJA OGRANICENJA NGE = 375
 BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROSKOVA NFGE = 0
 BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENATA OGRANICENJA NGGE = 0

VRIJEME IZRACUNAVANJA CPUT = .22

ZADATAK BR. 13 ZADATAK ZAVARENE GREDE

BROJ VARIJABLI N = 4
 BROJ OGRANICENJA M = 5
 BROJ RUBNIH OGRANICENJA MB = 3
 IZRACUNAVANJE GRADIJENATA NUMERICKO
 POCETNO RJESENJE IZVEDIVO

POCETNI VEKTOR RJESENJA:

X0(1) = 1.000 X0(2) = 7.000 X0(3) = 8.000
 X0(4) = 1.000

POCETNA FUNKCIJA TROSKOVA F0 = 15.815
 NAJVECE POCETNO PREKORACENJE OGRANICENJA ... V0 = .000D+00

REZULTATI

DOJAVNIK STANJA OBRADJE INFO = 0

VEKTOR RJESENJA:

X*(1) = .244 X*(2) = 6.219 X*(3) = 8.291
 X*(4) = .244

IZNOSI OGRANICENJA:

G*(1) = .000 G*(2) = .000 G*(3) = .000
 G*(4) = .000 G*(5) = -.937

FUNKCIJA TROSKOVA F* = 2.381
 NAJVECE PREKORACENJE OGRANICENJA V = .131D-08
 POMAK U SMJERU PRETRAZIVANJA DN = .276D-03
 GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE LGN = .116D-03

BROJ DJELATNIH OGRANICENJA U OPTIMUMU NAC = 4
 LAGRANGEOVI MNOZITELJI DJELATNIH OGRANICENJA:
 U*(1) = 3.450 U*(2) = 5.801 U*(3) = .848
 U*(4) = 4.779

BROJ ITERACIJA NIT = 8
 BROJ IZRACUNAVANJA FUNKCIJE TROSKOVA NFE = 42
 BROJ IZRACUNAVANJA OGRANICENJA NGE = 138
 BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROSKOVA NFGE = 0
 BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENATA OGRANICENJA NGGE = 0

VRIJEME IZRACUNAVANJA CPUT = .06

ZADATAK BR. 14 OPTIMALNI PRIJENOSNI OMJERI MJENJACA

BROJ VARIJABLI N = 5
 BROJ OGRANICENJA M = 4
 BROJ RUBNIH OGRANICENJA MB = 3
 IZRACUNAVANJE GRADIJENATA NUMERICKO
 POCETNO RJESENJE IZVEDIVO

POCETNI VEKTOR RJESENJA:

X0(1) = 15.000 X0(2) = 9.050 X0(3) = 6.140
 X0(4) = 4.550 X0(5) = 3.610

POCETNA FUNKCIJA TROSKOVA F0 = .271
 NAJVECE POCETNO PREKORACENJE OGRANICENJA ... V0 = .000D+00

REZULTATI

DOJAVNIK STANJA OBRADJE INFO = 2

VEKTOR RJESENJA:

X*(1) = 15.000 X*(2) = 9.050 X*(3) = 6.140
 X*(4) = 4.550 X*(5) = 3.610

IZNOSI OGRANICENJA:

G*(1) = -5.950 G*(2) = -2.910 G*(3) = -1.590
 G*(4) = -.940

FUNKCIJA TROSKOVA F* = .271
 NAJVECE PREKORACENJE OGRANICENJA V = .000D+00
 POMAK U SMJERU PRETRAZIVANJA DN = .000D+00
 GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE LGN = .116D-03

BROJ DJELATNIH OGRANICENJA U OPTIMUMU NAC = 0

BROJ ITERACIJA NIT = 1
 BROJ IZRACUNAVANJA FUNKCIJE TROSKOVA NFE = 6
 BROJ IZRACUNAVANJA OGRANICENJA NGE = 364
 BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROSKOVA NFGE = 0
 BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENATA OGRANICENJA NGGE = 0

VRIJEME IZRACUNAVANJA CPUT = .71

ZADATAK BR. 15 SINTEZA MEHANIZMA

BROJ VARIJABLI N = 6
 BROJ OGRANICENJA M = 4
 BROJ RUBNIH OGRANICENJA MB = 6
 IZRACUNAVANJE GRADIJENATA NUMERICCKO
 POCETNO RJESENJE IZVEDIVO

POCETNI VEKTOR RJESENJA:

X0(1) = 1.000 X0(2) = 4.500 X0(3) = 4.000
 X0(4) = 5.000 X0(5) = 3.000 X0(6) = 3.000

POCETNA FUNKCIJA TROSKOVA F0 = 2.309
 NAJVECE POCETNO PREKORACENJE OGRANICENJA ... V0 = .000D+00

REZULTATI

DOJAVNIK STANJA OBRADJE INFO = 0

VEKTOR RJESENJA:

X*(1) = .997 X*(2) = 4.197 X*(3) = 2.980
 X*(4) = 3.964 X*(5) = 1.654 X*(6) = 1.253

IZNOSI OGRANICENJA:

G*(1) = -2.216 G*(2) = -1.751 G*(3) = .000
 G*(4) = -19.568

FUNKCIJA TROSKOVA F* = .061
 NAJVECE PREKORACENJE OGRANICENJA V = .367D-06
 POMAK U SMJERU PRETRAZIVANJA DN = .648D-03
 GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE LGN = .178D-02

BROJ DJELATNIH OGRANICENJA U OPTIMUMU NAC = 1
 LAGRANGEОВI MNOZITELJI DJELATNIH OGRANICENJA:
 U*(3) = .017

BROJ ITERACIJA NIT = 24
 BROJ IZRACUNAVANJA FUNKCIJE TROSKOVA NFE = 178
 BROJ IZRACUNAVANJA OGRANICENJA NGE = 220
 BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROSKOVA NFGE = 0
 BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENATA OGRANICENJA NGGE = 0

VRIJEME IZRACUNAVANJA CPUT = .71

ZADATAK BR. 16 OPTIMIRANJE PROCESA ALKILACIJE

BROJ VARIJABLI N = 7
 BROJ OGRANICENJA M = 14
 BROJ RUBNIH OGRANICENJA MB = 14
 IZRACUNAVANJE GRADIJENATA NUMERICKO
 POCETNO RJESENJE IZVEDIVO

POCETNI VEKTOR RJESENJA:

X0(1) = 1745.000 X0(2) = 110.000 X0(3) = 3048.000
 X0(4) = 89.000 X0(5) = 92.800 X0(6) = 8.000
 X0(7) = 145.000

POCETNA FUNKCIJA TROSKOVA F0 = 2125.660
 NAJVECE POCETNO PREKORACENJE OGRANICENJA ... V0 = .000D+00

REZULTATI

DOJAVNIK STANJA OBRADJE INFO = 0

VEKTOR RJESENJA:

X*(1) = 1698.185 X*(2) = 53.665 X*(3) = 3031.299
 X*(4) = 90.110 X*(5) = 95.000 X*(6) = 10.499
 X*(7) = 153.535

IZNOSI OGRANICENJA:

G*(1) = .000 G*(2) = -.020 G*(3) = .000
 G*(4) = -.020 G*(5) = -.009 G*(6) = .000
 G*(7) = .000 G*(8) = -.023 G*(9) = .000
 G*(10) = -.541 G*(11) = -.612 G*(12) = -.018
 G*(13) = -.011 G*(14) = -9.321

FUNKCIJA TROSKOVA F* = 1227.226
 NAJVECE PREKORACENJE OGRANICENJA V = .842D-15
 POMAK U SMJERU PRETRAZIVANJA DN = .163D-05
 GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE LGN = .163D-05

BROJ DJELATNIH OGRANICENJA U OPTIMUMU NAC = 6

LAGRANGEOVI MNOZITELJI DJELATNIH OGRANICENJA:

U*(1) = 9.742 U*(3) = 249.649 U*(6) = 103.025
 U*(7) = 223.720 U*(9) = 1.398 U*(24) = 175.490

BROJ ITERACIJA NIT = 18
 BROJ IZRACUNAVANJA FUNKCIJE TROSKOVA NFE = 185
 BROJ IZRACUNAVANJA OGRANICENJA NGE = 2716
 BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROSKOVA NFGE = 0
 BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENATA OGRANICENJA NGGE = 0

VRIJEME IZRACUNAVANJA CPUT = .33

ZADATAK BR. 17 OPTIMIRANJE TOKARILICE

BROJ VARIJABLI N = 10
 BROJ OGRANICENJA M = 15
 BROJ RUBNIH OGRANICENJA MB = 20
 IZRACUNAVANJE GRADIJENATA ANALITICKO
 POCETNO RJESENJE NEIZVEDIVO

POCETNI VEKTOR RJESENJA:

X0(1) = 10.000 X0(2) = .005 X0(3) = .008
 X0(4) = 100.000 X0(5) = .002 X0(6) = .001
 X0(7) = .003 X0(8) = .002 X0(9) = .150
 X0(10) = .105

POCETNA FUNKCIJA TROSKOVA F0 = -2931.470
 NAJVECE POCETNO PREKORACENJE OGRANICENJA ... V0 = .544D-16

REZULTATI

DOJAVNIK STANJA OBRADJE INFO = 0

VEKTOR RJESENJA:

X*(1) = .147 X*(2) = .100 X*(3) = .008
 X*(4) = 628.717 X*(5) = .002 X*(6) = .001
 X*(7) = .003 X*(8) = .001 X*(9) = .157
 X*(10) = .098

IZNOSI OGRANICENJA:

G*(1) = .000 G*(2) = .000 G*(3) = .000
 G*(4) = .000 G*(5) = -.019 G*(6) = .000
 G*(7) = -999.953 G*(8) = -999.479 G*(9) = -999.932
 G*(10) = -965.900 G*(11) = -999.147 G*(12) = -994.404
 G*(13) = -973.474 G*(14) = -999.836 G*(15) = .000

FUNKCIJA TROSKOVA F* = -4430.088
 NAJVECE PREKORACENJE OGRANICENJA V = .363D-13
 POMAK U SMJERU PRETRAZIVANJA DN = .147D-05
 GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE LGN = .463D+02

BROJ DJELATNIH OGRANICENJA U OPTIMUMU NAC = 9

LAGRANGEOVI MNOZITELJI DJELATNIH OGRANICENJA:

U*(1) = 23.168 U*(2) = 3672.294 U*(3) = 1517.032
 U*(4) = 1353.178 U*(6) = 132.078 U*(15) = 3574.528
 U*(19) = 2308.358 U*(21) = 689.826 U*(25) = 79.120

BROJ ITERACIJA NIT = 332
 BROJ IZRACUNAVANJA FUNKCIJE TROSKOVA NFE = 768
 BROJ IZRACUNAVANJA OGRANICENJA NGE = 11520
 BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROSKOVA NFGE = 332
 BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENATA OGRANICENJA NGGE = 1789

VRIJEME IZRACUNAVANJA CPUT = 3.30

ZADATAK BR. 18 PRORACUN KEMIJSKE RAVNOTEZE

BROJ VARIJABLI N = 12
 BROJ OGRANICENJA M = 3
 BROJ RUBNIH OGRANICENJA MB = 24
 IZRACUNAVANJE GRADIJENATA ANALITICKO
 POCETNO RJESENJE NEIZVEDIVO

POCETNI VEKTOR RJESENJA:

X0(1) = 4.000 X0(2) = 4.000 X0(3) = 4.000
 X0(4) = 4.000 X0(5) = 4.000 X0(6) = 4.000
 X0(7) = 4.000 X0(8) = 4.000 X0(9) = 4.000
 X0(10) = 4.000 X0(11) = 4.000 X0(12) = 4.000

POCETNA FUNKCIJA TROSKOVA F0 = .228
 NAJVECE POCETNO PREKORACENJE OGRANICENJA ... V0 = .757D+00

REZULTATI

DOJAVNIK STANJA OBRADJE INFO = 0

VEKTOR RJESENJA:

X*(1) = 2.625 X*(2) = 4.863 X*(3) = 7.077
 X*(4) = 2.711 X*(5) = 3.366 X*(6) = 1.266
 X*(7) = 4.315 X*(8) = 2.967 X*(9) = 1.824
 X*(10) = 2.377 X*(11) = 4.724 X*(12) = 6.356

IZNOSI OGRANICENJA:

G*(1) = .000 G*(2) = .000 G*(3) = .000

FUNKCIJA TROSKOVA F* = 3.169
 NAJVECE PREKORACENJE OGRANICENJA V = .194D-07
 POMAK U SMJERU PRETRAZIVANJA DN = .220D-01
 GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE LGN = .715D-03

BROJ DJELATNIH OGRANICENJA U OPTIMUMU NAC = 3

LAGRANGEOVI MNOZITELJI DJELATNIH OGRANICENJA:

U*(1) = .002 U*(2) = 4.485 U*(3) = 2.525

BROJ ITERACIJA NIT = 74
 BROJ IZRACUNAVANJA FUNKCIJE TROSKOVA NFE = 319
 BROJ IZRACUNAVANJA OGRANICENJA NGE = 957
 BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROSKOVA NFGE = 74
 BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENATA OGRANICENJA NGGE = 163

VRIJEME IZRACUNAVANJA CPUT = 1.32

ZADATAK BR. 19 ZADATAK PROIZVODNJE ZEMNOGA PLINA

BROJ VARIJABLI N = 48
 BROJ OGRANICENJA M = 3
 BROJ RUBNIH OGRANICENJA MB = 72
 IZRACUNAVANJE GRADIJENATA NUMERICKO
 POCETNO RJESENJE IZVEDIVO

POCETNI VEKTOR RJESENJA:

X0 (1) =	1.000	X0 (2) =	1.000	X0 (3) =	1.000
X0 (4) =	1.000	X0 (5) =	1.000	X0 (6) =	1.000
X0 (7) =	1.000	X0 (8) =	1.000	X0 (9) =	1.000
X0 (10) =	1.000	X0 (11) =	1.000	X0 (12) =	1.000
X0 (13) =	1.000	X0 (14) =	1.000	X0 (15) =	1.000
X0 (16) =	1.000	X0 (17) =	1.000	X0 (18) =	1.000
X0 (19) =	1.000	X0 (20) =	1.000	X0 (21) =	1.000
X0 (22) =	1.000	X0 (23) =	1.000	X0 (24) =	1.000
X0 (25) =	1.300	X0 (26) =	1.300	X0 (27) =	1.300
X0 (28) =	1.300	X0 (29) =	1.300	X0 (30) =	1.300
X0 (31) =	1.000	X0 (32) =	1.000	X0 (33) =	1.000
X0 (34) =	1.000	X0 (35) =	1.000	X0 (36) =	1.000
X0 (37) =	1.000	X0 (38) =	1.000	X0 (39) =	1.000
X0 (40) =	1.000	X0 (41) =	1.000	X0 (42) =	1.000
X0 (43) =	1.000	X0 (44) =	1.000	X0 (45) =	1.000
X0 (46) =	1.000	X0 (47) =	1.000	X0 (48) =	1.000

POCETNA FUNKCIJA TROSKOVA F0 = 1.862
 NAJVECE POCETNO PREKORACENJE OGRANICENJA ... V0 = .000D+00

REZULTATI

DOJAVNIK STANJA OBRADE INFO = 0

VEKTOR RJESENJA:

X*(1) =	2.000	X*(2) =	.002	X*(3) =	2.000
X*(4) =	.033	X*(5) =	.016	X*(6) =	2.000
X*(7) =	1.895	X*(8) =	.002	X*(9) =	2.000
X*(10) =	.035	X*(11) =	.016	X*(12) =	2.000
X*(13) =	2.000	X*(14) =	.002	X*(15) =	2.000
X*(16) =	.002	X*(17) =	.002	X*(18) =	1.988
X*(19) =	2.000	X*(20) =	.002	X*(21) =	2.000
X*(22) =	.002	X*(23) =	.002	X*(24) =	2.000
X*(25) =	1.016	X*(26) =	.002	X*(27) =	1.003
X*(28) =	.002	X*(29) =	.002	X*(30) =	1.000
X*(31) =	1.113	X*(32) =	.002	X*(33) =	1.103
X*(34) =	.002	X*(35) =	.002	X*(36) =	1.103
X*(37) =	.923	X*(38) =	.934	X*(39) =	.929
X*(40) =	.914	X*(41) =	.905	X*(42) =	.894
X*(43) =	1.175	X*(44) =	.002	X*(45) =	1.120
X*(46) =	.002	X*(47) =	.002	X*(48) =	1.115

IZNOSI OGRANICENJA:

G*(1) =	.000	G*(2) =	.000	G*(3) =	.000
----------	------	----------	------	----------	------

FUNKCIJA TROSKOVA	F* =	.863
NAJVECE PREKORACENJE OGRANICENJA	V =	.588D-07
POMAK U SMJERU PRETRAZIVANJA	DN =	.676D-03
GRADIJENT LAGRANGEOVE FUNKCIJE	LGN =	.138D+01

BROJ DJELATNIH OGRANICENJA U OPTIMUMU NAC = 30

LAGRANGEOVI MNOZITELJI DJELATNIH OGRANICENJA:

U*(1) =	-.677	U*(2) =	.137	U*(3) =	1.004
U*(5) =	.042	U*(6) =	.015	U*(9) =	.060
U*(15) =	.062	U*(18) =	.015	U*(21) =	.013
U*(27) =	.017	U*(29) =	.005	U*(30) =	.040
U*(33) =	.001	U*(34) =	.040	U*(36) =	.040
U*(41) =	.044	U*(42) =	.040	U*(45) =	.039
U*(46) =	.040	U*(48) =	.040	U*(51) =	.039
U*(54) =	.001	U*(58) =	.001	U*(60) =	.001
U*(66) =	.001	U*(70) =	.001	U*(72) =	.001
U*(90) =	.100	U*(94) =	.100	U*(96) =	.100

BROJ ITERACIJA	NIT =	108
BROJ IZRACUNAVANJA FUNKCIJE TROSKOVA	NFE =	5400
BROJ IZRACUNAVANJA OGRANICENJA	NGE =	16488
BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENTA FUNKCIJE TROSKOVA	NFGE =	0
BROJ IZRACUNAVANJA GRADIJENATA OGRANICENJA	NGGE =	0

VRIJEME IZRACUNAVANJA CPUT = 99.64

Ispravci

Str.	Redak	Stoji	Treba
14	17	cilja	spuštanja
23	9	toèke	toèke
23	14	toèke	toèke
36	(pri dnu)	troškova	cilja
91-110		troškova	cilja

Gojko Magazinović

PRIMJENA NORMIRANJA PROJEKTNIH VARIJABLI U OPTIMIRANJU STROJARSKIH KONSTRUKCIJA¹

SADRŽAJ

1. UVOD	2
2. NORMIRANJE VARIJABLI S OBLIKOM $(x_i - x_{Li})/(x_{Ui} - x_{Li})$	3
3. NORMIRANJE VARIJABLI S OBLIKOM $x_i/ x_i^{(0)} $	4
4. REZULTATI PRIMJENE POSTUPAKA NORMIRANJA ..	4
5. RASPRAVA	8
6. ZAKLJUČAK	9
7. LITERATURA	10

¹ Dodatak magistarskom radu Gojka Magazinovića “Prilog numeričkoj optimalizaciji strojarških konstrukcija”, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 1996. Ovaj dodatak izrađen je na poticaj i traženje mentora rada, profesora Dragutina Ščapa, i predsjednika povjerenstva za ocjenu rada, profesora Vedrana Žanića.

1. UVOD

Numerički postupci optimiranja su iterativni postupci poboljšavanja trenutnoga rješenja do zadovoljavanja unaprijed postavljena uvjeta zaustavljanja. Djelotvornost i pouzdanost takvih postupaka uvjetovana je oblikom promatranih funkcija cilja i ograničenja. Kako su pojedini oblici numerički prikladniji od drugih, jasno je nastojanje da se promatrane funkcije preoblikuju u što je moguće povoljniji oblik. Normiranje projektnih varijabli [1 - 4] predstavlja jedan od najčešće primijenjivanih postupaka poboljšavanja uvjetovanosti zadatka optimiranja.

Postupak normiranja projektnih varijabli temelji se na zamjeni izvornih varijabli \mathbf{x} s normiranim varijablama \mathbf{y} , pri čemu se izvorni projektni prostor zamjenjuje novim, normiranim projektnim prostorom. Ovim postupkom nastoji se ujednačiti upliv svih projektnih varijabli i time osigurati djelotvornije i pouzdanije pronalaženje rješenja zadatka optimiranja. Načelno, postupak normiranja projektnih varijabli određen je s jednadžbom [3]:

$$\mathbf{y} = \mathbf{D} \mathbf{x}, \quad (1)$$

gdje su:

- \mathbf{y} - vektor normiranih neovisnih varijabli,
- \mathbf{D} - matrica normiranja (matrica kojoj su dijagonalni članovi jednaki faktorima normiranja, a nedijagonalni članovi jednaki nuli),
- \mathbf{x} - vektor izvornih neovisnih varijabli.

Kada se projektne varijable zamijene normiranim, postupak optimiranja se nastavlja u normiranom projektnom prostoru. Međutim, iznosi funkcija cilja i ograničenja, kao i njihovi gradijenti, se i dalje izračunavaju u izvornom projektnom prostoru, pri čemu vrijedi [3]:

$$f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}), \quad (2)$$

$$\nabla f(\mathbf{y}) = \mathbf{D}^{-1} \nabla f(\mathbf{x}) . \quad (3)$$

Jednadžba (2) pokazuje jednakost iznosa funkcija u izvornomu i normiranomu prostoru, dok jednadžba (3) pokazuje ovisnost gradijenata funkcija u normiranomu prostoru od gradijenata funkcija u izvornomu prostoru.

Po završetku postupka optimiranja se optimalno rješenje \mathbf{y}^* ponovno zamjenjuje izvornim varijablama \mathbf{x}^* , kada je:

$$\mathbf{x} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{y} . \quad (4)$$

Do danas je razvijen čitav niz postupaka normiranja projektnih varijabli. U ovomu radu su primijenjena i ispitana dva postupka normiranja i to: normiranje s oblikom $y_i = (x_i - x_{Li}) / (x_{Ui} - x_{Li})$ i normiranje s oblikom $y_i = x_i / |x_i^{(0)}|$.

2. NORMIRANJE VARIJABLI S OBLIKOM $(x_i - x_{Li}) / (x_{Ui} - x_{Li})$

Prvi pokušaj normiranja projektnih varijabli izvršen je, na prijedlog profesora Ščapa i Žanića, s oblikom $y_i = (x_i - x_{Li}) / (x_{Ui} - x_{Li})$, kada je:

$$\mathbf{y} = \mathbf{D} \mathbf{x} - \mathbf{a} , \quad (5)$$

pri čemu su dijagonalni članovi matrice \mathbf{D} jednaki $1 / (x_{Ui} - x_{Li})$, a članovi vektora \mathbf{a} jednaki $x_{Li} / (x_{Ui} - x_{Li})$. Obilježje ovakva oblika normiranja je raspored svih normiranih projektnih varijabli u područje od 0 do 1.

3. NORMIRANJE VARIJABLI S OBLIKOM $x_i/|x_i^{(0)}|$

Drugi primijenjeni oblik normiranja projektnih varijabli je $y_i = x_i/|x_i^{(0)}|$ [3, 4], kada svaka projektna varijabla u početnoj točki ima iznos jednak jedinici.

Radi sprječavanja grešaka računala izazvanih dijeljenjem s nulom, u slučajevima kada je $x_i^{(0)} = 0$, dijagonalni članovi matrice **D** se određuju jednadžbom [3]:

$$d_{ii} = 1/\max(10^{-6}, |x_i^{(0)}|). \quad (6)$$

4. REZULTATI PRIMJENE POSTUPAKA NORMIRANJA

Svaki od postupaka normiranja je ugrađen u računalni program *RQPOPT*, nakon čega je riješen skup pokusnih zadataka [5].

Računski pokusi su izvedeni na IBM PC odgovarajućem računalu s procesorom 80486, koprocessorom i unutarnjim satom frekvencije 120 MHz, pod DOS 6.2 operativnim sustavom. Potprogram *RQPOPT*, zajedno s pripadnim glavnim programom, preveden je 16-bitnim prevodnikom Microsoft FORTRAN 5.1. Vremena izvođenja mjerena su ugrađenim DOS satom razlučivosti 1/18 (0.055) sekunde. Zbog različitih računala i prevodnika ostvarena vremena računanja nisu usporediva s vremenima računanja danim u [5].

Rezultati ostvareni primjenom postupka normiranja dani su u tablicama I i II. Tablica I sadrži rezultate postignute normiranjem projektnih varijabli s oblikom $y_i = (x_i - x_{Li})/(x_{Ui} - x_{Li})$, dok tablica II daje rezultate ostvarene normiranjem s oblikom $y_i = x_i/|x_i^{(0)}|$. Značenje pojedinih stupaca u tablicama I i II dano je u [5].

Tablica I. Rezultati ostvareni normiranjem projektnih varijabli s $y_i = (x_i - x_{Li}) / (x_{Ui} - x_{Li})$

BR	INFO	NIT	NFE	NGE	NFGE	NGGE	F	DGX	DFX	CPUT
1	2	2	17	34	2	6	136.6694	.000	1.88	.06
2	0	65	465	2790	65	255	3.951163	.889E-06	-.673E-06	.60
3	2	54	266	1608	52	280	6995.529	.118	-53.9	.55
4	0	1356	10555	63330	1356	8142	5052.524	.480E-02	-2.57	21.14
5	0	574	1773	5319	574	1725	-40.35109	.168E-15	7.36	5.33
6	0	38	189	2079	38	384	-782.8523	.152E-05	986.	.94
7	2	14	84	1275	13	186	97.59056	.118E-05	.217E-02	.60
8	0	2	3	0	2	0	2.213656	.000	.470	.00
9	2	2	23	24	1	3	.6303788	52.9	-.990	.00
10	2	33	312	564	0	0	114.8394	.000	.978E-04	.93
11	0	6	12	24	6	10	-5.684782	.355E-12	.216E-10	.00
12	0	194	2075	2075	0	0	36.97084	.172E-08	.399E-04	.65
13	0	2	16	48	0	0	5.764871	.000	3.38	.00
14	2	1	6	24	0	0	.2708000	.000	.850E-02	.27
15	2	8	172	604	0	0	19.39252	.000	.416E-01	.38
16	0	7	59	672	0	0	1227.226	.547E-08	523.	.11
17	0	8	15	225	8	49	-4430.088	.909E-07	.792	.17
18	2	270	1612	4836	270	805	3.188914	.000	.203E-01	6.86
19	2	4	226	678	0	0	1.756624	.616E-12	.904	1.93

Postupkom normiranja $y_i = (x_i - x_{Li})/(x_{Ui} - x_{Li})$, tablica I, promatrano kroz zadovoljavanje postavljenih uvjeta zaustavljanja, uspješno je riješeno 10 od 19 postavljenih zadataka. Svi neriješeni zadaci (zadaci br. 1, 3, 7, 9, 10, 14, 15, 18 i 19) nisu riješeni zbog nemogućnosti programa da pronađe povoljniju točku napredovanja. Rješavanje ni jednoga zadatka nije prekinuto zbog greške računanja.

Od 10 riješenih zadataka 4 zadataka je riješeno s najboljim poznatim rezultatima, dok je preostalih 6 zadataka riješeno približno, ukazujući na potrebu strožega uvjeta zaustavljanja.

Od 9 neriješenih zadataka kod 7 zadataka je do prekida došlo u neposrednoj blizini rješenja, dok je samo kod dva zadatka (9 i 19) do prekida došlo daleko od točnoga rješenja.

Postupkom normiranja $y_i = x_i/|x_i^{(0)}|$, tablica II, promatrano kroz zadovoljavanje postavljenih uvjeta zaustavljanja, uspješno je riješeno 17 od 19 postavljenih zadataka. Svi neriješeni zadaci (zadaci br. 12 i 14) nisu riješeni zbog nemogućnosti programa da pronađe povoljniju točku napredovanja. Rješavanje ni jednoga zadatka nije prekinuto zbog greške računanja.

Od 17 riješenih zadataka 15 zadataka je riješeno s najboljim poznatim rezultatima, dok su preostala 2 zadatka (4 i 10) riješena približno, ukazujući na potrebu strožega uvjeta zaustavljanja. U 12 zadataka je rješenje postignuto za manje od 100 iteracija, uz vrlo malen broj izračunavanja funkcija i njihovih gradijenata. Preostalih pet zadatka (3, 4, 7, 18 i 19) je riješeno uz znatniji računski napor.

Kod neriješenoga zadatka br. 12 je do prekida došlo daleko od točnoga rješenja, dok su kod zadatka br. 14 ponovljene poteškoće s početnom točkom [5].

Tablica II. Rezultati ostvareni normiranjem projektnih varijabli s $y_i = 1/|x_i^{(0)}|$

BR	INFO	NIT	NFE	NGE	NFGE	NGGE	F	DGX	DFX	CPUT
1	0	10	40	80	10	20	135.0760	.270E-08	.130E-05	.05
2	0	14	18	108	14	55	3.951163	.496E-07	-.523E-07	.11
3	0	323	3599	21606	321	1838	7049.248	.260E-06	-.829E-01	5.16
4	0	586	587	3522	586	3516	5076.930	.104E-14	21.9	5.71
5	0	24	27	81	24	72	-47.76109	.829E-16	-.535E-01	.22
6	0	76	401	4411	76	704	-1768.807	.103E-03	-.216E-03	1.37
7	0	495	2605	39090	494	6990	97.58754	.405E-08	-.870E-03	16.42
8	0	17	24	0	17	0	1.744152	.000	.573E-08	.00
9	0	13	37	38	12	15	1.620583	.195E-06	-.113E-06	.06
10	0	35	159	238	0	0	119.9799	.422E-07	5.03	.49
11	0	7	13	26	7	11	-5.684783	.285E-09	-.146E-08	.06
12	2	4	64	74	0	0	21.78331	1.00	-20.0	.00
13	0	17	107	375	0	0	2.381165	.420E-10	-.359E-07	.05
14	2	1	6	34	0	0	.2708000	.000	.850E-02	.33
15	0	23	176	224	0	0	.6060023E-01	.000	.295E-07	.44
16	0	5	44	504	0	0	1227.282	.755E-07	523.	.05
17	0	8	9	135	8	49	-4430.088	.913E-07	.792	.11
18	0	104	371	1113	104	281	3.168523	.000	-.672E-04	1.75
19	0	108	5325	15975	0	0	.8633801	.366E-07	.817E-07	121.50

5. RASPRAVA

U usporedbi s rezultatima izvornoga postupka [5], rezultati ostvareni normiranjem oblika $y_i = (x_i - x_{Li})/(x_{Ui} - x_{Li})$, tablica I, nisu potvrdili očekivanja. Ostvarena poboljšanja, kod pojedinih zadataka (11, 16 i 17), zasjenjena su značajnim pogoršanjima, uočenima pri rješavanju većine drugih zadataka. Nisam siguran jesu li ovako neočekivani rezultati posljedica stvarnoga djelovanja primijenjenoga postupka normiranja, ili su pak posljedica neodgovarajućega oživotvorenja postupka unutar programa *RQPOPT*.

Rezultati ostvareni normiranjem oblika $y_i = x_i / |x_i^{(0)}|$, tablica II, u usporedbi s rezultatima izvornoga postupka [5], ukupno pokazuju poboljšanje, ali i varljivu korisnost ovoga postupka. Značajno poboljšanje zabilježeno je pri rješavanju četiriju zadataka (3, 6, 7 i 17), pri čemu je posebno uočljiv napredak ostvaren kod prva tri, ranije rješavana s više tisuća iteracija [5]. Dodatna poboljšanja su ostvarena pri rješavanju još pet zadataka (2, 5, 11, 16 i 19). Nažalost, postupkom normiranja je narušena djelotvornost algoritma pri rješavanju pet zadataka (1, 9, 10, 13 i 18), dok je kod daljnja dva, zadaci br. 4 i 12, zabilježeno značajno pogoršanje. Rješenje zadatka br. 4 je određeno približno, dok je rješavanje zadatka br. 12 prekinuto, daleko od cilja, zbog nemogućnosti postupka da pronađe povoljniju točku napredovanja.

Približno rješenje zadatka br. 4, kao i zadatka br. 10, određeno je postavljenim uvjetom zaustavljanja ($\varepsilon_d = 10^{-3}$). Izabere li se stroži uvjet zaustavljanja, $\varepsilon_d = 10^{-5}$, dobiju se slijedeći rezultati:

Tablica III. Rezultati rješavanja zadataka br. 4 i 10 pri $\varepsilon_d = 10^{-5}$

BR	INFO	NIT	NFE	NGE	NFGE	NGGE	F	DGX	DFX
4	0	7012	7013	42078	7012	42072	5055.014	.190E-15	.228E-02
10	2	128	781	1310	0	0	114.9502	.248E-05	.719E-04

Pri $\varepsilon_d = 10^{-5}$ je zadatak br. 4 točno riješen, ali sada uz značajan računski napor, dok je rješavanje zadatka br. 10 prekinuto u neposrednoj blizini točnoga rezultata.

Prekid rješavanja zadatka br. 12, zbog nemogućnosti pronalaženja povoljnije točke napredovanja, uzrokovano je početnom točkom $x_1^{(0)} = 0.1$, smještenom izvan rubne granice $x_{L1} = 0.044$. Ako se početna točka smjesti unutar rubnih granica, $x_1^{(0)} = 0.01$, dobija se:

Tablica IV. Rješavanje zadatka br. 12 iz druge početne točke

POSTUPAK	BR	INFO	NIT	NFE	NGE	NFGE	NGGE	F	DGX	DFX
S NORM.	12	0	4	17	17	0	0	36.97084	.313E-09	.399E-04
IZVORNO	12	0	81	383	383	0	0	36.97084	.398E-12	.399E-04

6. ZAKLJUČAK

U ovom radu su u izvorni postupak optimiranja rekurzivnim kvadratnim programiranjem [5]

uključena i istražena dva postupka normiranja projektnih varijabli i to: normiranje s oblikom $y_i = (x_i - x_{Li})/(x_{Ui} - x_{Li})$ i normiranje s oblikom $y_i = x_i/|x_i^{(0)}|$.

Normiranje oblika $y_i = (x_i - x_{Li})/(x_{Ui} - x_{Li})$ nije polučilo očekivani rezultat - rijetka poboljšanja zasjenjena su bitnim pogoršanjima kod značajnoga broja pokusnih zadataka.

Normiranje se s oblikom $y_i = x_i/|x_i^{(0)}|$ pokazalo izuzetno korisnim pri rješavanju inače teško rješivih zadataka, ali i uzrokom poteškoća pri rješavanju nekih drugih zadataka. Na temelju ostvarenih rezultata moglo bi se zaključiti kako je normiranje projektnih varijabli najbolje primijeniti u slučajevima teže rješivih zadataka. Kao pokazatelj teže rješivih zadataka mogao bi poslužiti neuspjeh redovnoga postupka pretraživanja, iskazan dojavom lošega smjera pretraživanja.

7. LITERATURA

- [1] J.S. ARORA, "Introduction to Optimum Design", McGraw-Hill, New York 1989.
- [2] G.V. REKLAITIS, A. RAVINDRAN, K.M. RAGSDALL, "Engineering Optimization: Methods and Applications", John Wiley and Sons, New York 1983.
- [3] G.N. VANDERPLAATS, "Numerical Optimization Techniques for Engineering Design: With Applications", McGraw-Hill, New York 1984.
- [4] R.H. GALLAGHER, O.C. ZIENKIEWICZ (Eds.), "Optimum Structural Design: Theory and Applications", John Wiley and Sons, London 1973.
- [5] G. MAGAZINOVIĆ, "Prilog numeričkoj optimalizaciji strojarskih konstrukcija", magistarski rad, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 1996.