

Utjecaj malog prigušenja na vibracije grede

Skejo, R.¹, Skoblar, A.² i Braut, S.³

Sažetak

Vibriranje malo prigušenih konstrukcija može se opisati koristeći metodu superponiranja oblika vibriranja. Prednost takvog pristupa je u tome što se uz korištenje Rayleigh-ovog proporcionalnog prigušenja mogu dobiti realne vlastite frekvencije i oblici vibriranja bez obzira na iznos prigušenja. Navedeni pristup olakšava izračun i shvaćanje cijele prirode vibracija. U radu je analizirano kako iznos prigušenja utječe na funkcije modalnih koordinata i time na ukupne vibracije. Zaključeno je da malo prigušenje uzrokuje zanemarive pomake u fazi funkcija modalnih koordinata kod stacionarnih vibracija što omogućuje jednostavniji analitički izračun drugih fizikalnih pojava koje nastaju kao posljedica vibriranja konstrukcije kao npr. širenje zvuka.

Ključne riječi: vibracije, malo prigušenje, funkcije modalnih koordinata, Bernoulli-Euler teorija

¹ **Roko Skejo, Bacc. ing. mech.**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: rskejo@riteh.hr

² **Doc. Ante Skoblar, dr. sc.**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: askoblar@riteh.hr

³ **Prof. Sanjin Braut, dr. sc.**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: sbraut@riteh.hr

1 Uvod

Mnogi inženjerski sustavi okarakterizirani su malim prigušenjem. U takvim slučajevima disipacijski mehanizmi (prigušenje u materijalu, trenje u osloncima i spojevima, prijenos vibracijske energije na okolni fluid, ...) su relativno slabi (bez obzira radi li se o otvorenom ili zatvorenom sustavu) što upućuje na male gubitke energije tijekom jednog titraja.

Vibriranje malo prigušenih konstrukcija (omjer prigušenja < 0.01) može se opisati koristeći metodu superponiranja oblika vibriranja. Prednost takvog pristupa je u tome što su kod malo prigušenih konstrukcija vlastite frekvencije i oblici vibriranja matematički približno realni što olakšava izračun i shvaćanje cijele prirode vibracija. Međutim, uvjet malog prigušenja uzrokuje i zanemarive pomake u fazi funkcija modalnih koordinata što omogućuje jednostavniji analitički izračun drugih fizikalnih pojava koje nastaju kao posljedica vibriranja konstrukcije.

Pa je tako, radijaciju zvuka oko malo prigušenih ravninskih izvora zvuka (Rayleigh-ov integral) moguće odrediti iz vibracijskog polja izvora zvuka za bilo koju prisilnu frekvenciju ω , bez obzira vibrira li u rezonanciji ili ne, a iz pojednostavljenih analitičkih izraza koji u prirodi upućuju da površina konstrukcije u tom slučaju vibrira u fazi ili protufazi sa frekvencijom prisile [1].

Nadalje, metoda superponiranja oblika vibriranja pogodna je za analizu vibracija konstrukcija na niskim frekvencijama gdje se odziv određuje iz superpozicije nekolicine nisko frekventnih oblika vibriranja čije su vlastite frekvencije bliske pobudnoj frekvenciji. Na visokim frekvencijama dolazi do bliskih vrijednosti vlastitih frekvencija što može voditi do većih pogrešaka u procjeni odziva pa se za njih koriste druge statističke metode.

Ako se prigušenje u sustavu izrazi kao linearna kombinacija mase i krutosti (Rayleigh-ovo proporcionalno prigušenje), oblici vibriranja su matematički realni, neovisni i ortogonalni i utjecaj disipativnih mehanizama može se uključiti u izračun pomoću modalnog koeficijenta prigušenja koji je karakterističan za svaki pojedini oblik vibriranja. Međutim, Rayleigh-ovo proporcionalno prigušenje za više frekvencije može imati nerealno visoke veličine i time uzrokovati pogreške u izračunu što je dodatni razlog za korištenje metode superponiranja oblika vibriranja samo na niskim frekvencijama.

U radu će se analizirati kako iznos Rayleigh-ovog proporcionalnog prigušenja utječe na funkcije modalnih koordinata i time na ukupne vibracije. Za primjer je odabrana Bernoulli-Euler greda [2].

2 Odziv grede na harmonijsku pobudu

Harmonijske poprečne vibracije grede definiraju se umnoškom oblika vibriranja i funkcije modalne koordinate koja se smatra odzivom oblika vibriranja na modalnu pobudu [1]

$$w(x, t) = Re \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x) \tilde{q}_i(\omega) e^{j\omega t} \right\} \quad (1)$$

gdje $\psi_i(x)$ predstavlja realni oblik vibriranja i -tog oblika vibriranja grede a \tilde{q}_i predstavlja odgovarajući kompleksnu modalnu amplitudu. Kako bi primjenili ovu metodu potrebno je definirati oblike vibriranja konstrukcije, $\psi_i(x)$.

2.1 Određivanje vlastitih frekvencija i oblika vibriranja

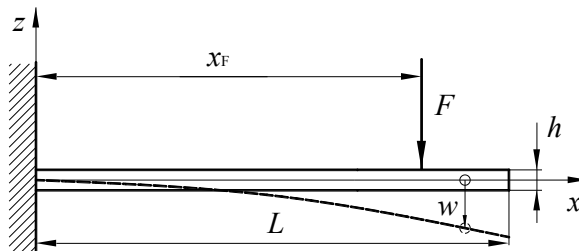
Za tankoj gredi konstantnog poprečnog presjeka može se koristiti BE teorija koja zadovoljava valnu jednadžbu savijanja [2]

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

i rubne uvjete na njegovim vlastitim frekvencijama. U izrazu (2) E je Young's modulus, I aksijalni moment tromosti poprečnog presjeka grede, ρ gustoća grede, A poprečni presjek grede, w poprečni pomak, x koordinata promatrane točke grede i t je vrijeme. Rubni uvjeti za gredu na slici 1, uklještenu s jedne i slobodnu s druge strane, glase:

$$w(0, t) = w'(0, t) = w''(L, t) = w'''(L, t) = 0 \quad (3)$$

gdje je ' derivacija po x -u. Uvjet $w'''(L, t) = 0$ vrijedi ako slobodni kraj grede nije opterećen transverzalom silom.



Slika 1. Skica harmonijski pobuđene grede

Diferencijalna jednadžba (2) rješava se metodom separacije varijabli po kojoj se pomak definira s umnoškom funkcija položaja i vremena:

$$w(x, t) = \psi(x) \sin(\omega t) \quad (4)$$

gdje je $\psi(x)$ funkcija vlastitog oblika vibriranja a $\sin(\omega t)$ predstavlja harmonijske vibracije s kružnom vlastitom frekvencijom ω .

Vlastite kružne frekvencije izračunaju se izrazom

$$\omega_i = (\beta_i L)^2 \left(\frac{EI}{\rho A L^4} \right)^{1/2}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5)$$

gdje su konstante β_i nulte točke funkcije

$$\cos(\beta L) \cosh(\beta L) + 1 = 0 \quad (6)$$

a L je duljina grede.

Iz vlastitih frekvencija izračunavaju se oblici vibriranja

$$\psi_i(x) = (\cos(\beta_i x) - \cosh(\beta_i x)) - \frac{\cos(\beta_i L) + \cosh(\beta_i L)}{\sin(\beta_i L) + \sinh(\beta_i L)} (\sin(\beta_i x) - \sinh(\beta_i x)) \quad (7)$$

2.2 Određivanje funkcija modalnih koordinata

Jednadžbu prisilnih vibracija grede pri djelovanju sile u točki x_F je

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + EI \frac{c_d}{\omega^2} \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} + c \frac{\partial w}{\partial t} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \hat{F} \sin(\Omega t) \delta(x - x_F) \quad (8)$$

gdje je c_d koeficijent Rayleigh-ov koeficijent prigušenja proporcionalan sa krutošću i c sa masom, \hat{F} amplituda vanjske sile, x_F je položaj djelovanja i Ω kružna frekvencija harmonijske prisile.

Nakon uvrštavanja pretpostavljenog oblika rješenja (1) u diferencijalnu jednadžbu (8) te definiranja konstanti Rayleigh-ovog prigušenja, $c_d = \beta \omega^2$ koja je proporcionalna krutosti i $c = \alpha \varepsilon(x)$ koja je proporcionalna masi i gdje su α i β konstante, dobija se niz nespregnutih izraza za funkcije modalnih koordinata [3]

$$\omega_i^2 q_i(t) + (\alpha + \beta \omega_i^2) \dot{q}_i(t) + \ddot{q}_i(t) = \hat{F} \sin(\Omega t) \frac{\bar{\psi}_i(x_F)}{\sqrt{M_i}} \quad (9)$$

S obzirom da se radi o harmonijskoj prisili, funkcije modalnih koordinata su harmonijske čiji period, amplituda i faza ovise o prigušenju u sustavu. Nadalje, modalni omjer prigušenja ζ_i od i -tog oblika vibriranja po Rayleigh-u definira se izrazom

$$\zeta = \frac{\alpha}{2\omega} + \frac{\beta\omega}{2} \quad (10)$$

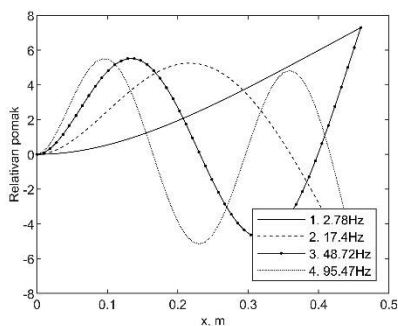
pa rješenje izraza (9) za nultu modalnu brzinu i pomak glasi

$$q_i(t) = e^{-\zeta_i \omega_i t} \left[\frac{\bar{\psi}_i(x_F) \hat{F}}{\omega_i' \sqrt{M_i}} \int_0^t \sin(\Omega \tau) e^{\zeta_i \omega_i \tau} \sin(\omega_i'(t - \tau)) d\tau \right] \quad (11)$$

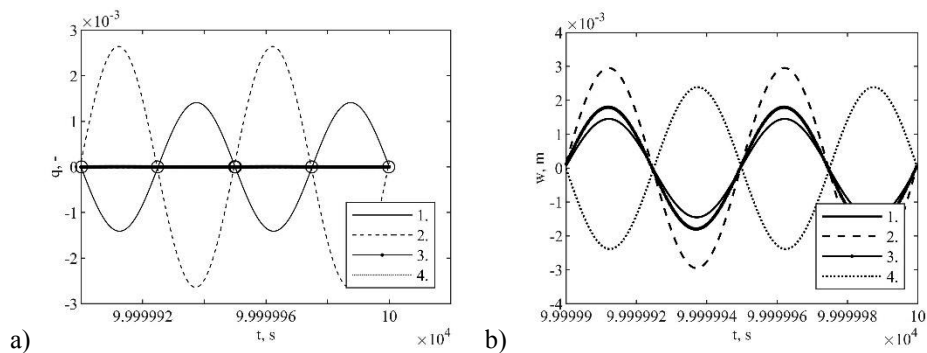
gdje je $\omega'_i = \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}$ prigušena vlastita frekvencija i -tog oblika vibriranja.

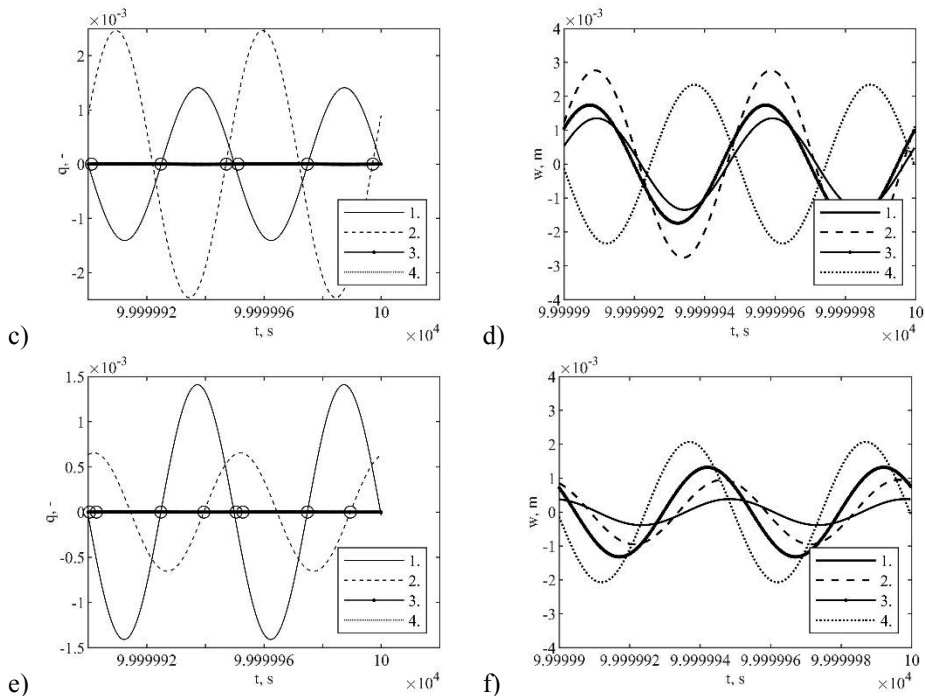
3 Primjer

Cilj primjera je za definirane dimenzije grede, koja se može modelirati s BE teorijom, izračunati vlastite frekvencije i oblike vibriranja. Greda je s jedne strane ukleještena a s druge slobodna. Odabrana je greda dimenzija $0.46\text{m} \times 0.03\text{m} \times 0.0007\text{m}$ od pocinčanog lima s Young-ovim modulom elastičnosti $E=2.1 \times 10^{11}$ Pa i gustoćom $\rho=7780$ kg/m³. Nadalje, za amplitudu prisile 1N, frekvenciju 20Hz i položaj 0.4 m izračunati funkcije modalnih koordinata i odziv u 4 referentne točke (1/5, 2/5, 3/5 i 4/5L) za različite vrijednosti koeficijenta β .



Slika 2. Oblici vibriranja i odgovarajuće vlastite frekvencije





Slika 3. Stacionarne funkcije modalnih koordinata i odziv u 4. referentne točke, a) i b) $\beta=0.0001$, c) i d) $\beta=0.001$, e) i f) $\beta=0.01$

4 Zaključak

U radu je analiziran utjecaj prigušenja na vibracije greda. Kako bi se koristile prednosti metode superponiranja oblika vibriranja (realne vlastite frekvencije i oblici vibriranja) odabrano je Rayleigh-ovo proporcionalno prigušenje. Korištena je BE teorija grede i opisano je kako se odrede vlastite frekvencije, oblici vibriranja, funkcije modalnih koordinata i krajnji odziv grede. Iz prikazanog primjera je vidljivo da za malo prigušenje dolazi do zanemarivih relativnih razlika u fazi funkcija modalnih koordinata tj. da će dijelovi grede vibrirati u fazi i protufazi što pojednostavljuje analitičke izraze za širenje zvuka oko grede.

Zahvale

Autori se zahvaljuju financijskoj potpori Hrvatske zaklade za znanost (projekt broj IP-2019-04-4703) i Sveučilišta u Rijeci (projekt broj uniri-tehnic-18-37 i projekt broj uniri-tehnic-18-225).

Literatura

- [1] Fahy, F. i Gardonio, P.; Sound and Structural Vibration: Radiation, Transmission and Response; 2007; Second edition; 1-665.
- [2] Rao, S.S.; Vibration of Continuous Systems; 2007; 1-737.
- [3] Skoblar, A., Žigulić, R., Braut, S. i Blažević, S.; Dynamic Response to Harmonic Transverse Excitation of Cantilever Euler-Bernoulli Beam Carrying a Point Mass; FME Transactions; 2017; 45; 367-373.