

**SVEUČILIŠTE U SPLITU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, STROJARSTVA I
BRODOGRADNJE**

DIPLOMSKI RAD

**ANALIZA DEFORMACIJA I NAPREZANJA
ELEMENTA IZRAĐENIH OD
HIPERELASTIČNIH MATERIJALA**

Domagoj Samardžić

Split, ožujak 2021.



Diplomski studij: **Strojarstvo**
Smjer/Usmjerenje: **Računalno projektiranje i inženjerstvo**
Oznaka programa: 262
Akademska godina: 2020./2021.

Ime i prezime: **Domagoj Samardžić**
Broj indeksa: 624-2018

ZADATAK DIPLOMSKOG RADA

Naslov: **Analiza deformacija i naprezanja elemenata izrađenih od hiperelastičnih materijala**

Zadatak: Oslanjajući se na dobivenu literaturu prikazati osnove teorije elastičnosti velikih pomaka i deformacija hiperelastičnih materijala. Riješiti odabrane primjere koji uključuju hiperelastične materijale koristeći slobodno dostupne programe. Na kraju, riješiti konkretni praktični primjer objekta od hiperelastičnog materijala izloženog velikim deformacijama.

Prijava rada: 02.11.2020.

Rok za predaju rada: 02.03.2021.

Rad predan:

Predsjednik
Odbora za diplomski rad:

Prof. dr.sc. Sandro Nižetić

Mentor:

Prof. dr.sc. Željko Lozina

IZJAVA

Ovom izjavom potvrđujem da sam diplomski rad s naslovom ANALIZA DEFORMACIJA I NAPREZANJA ELEMENATA IZRAĐENIH OD HIPERELASTIČNIH MATERIJALA pod mentorstvom prof. dr. sc. ŽELJAN LOZINA pisao samostalno, primijenivši znanja i vještine stečene tijekom studiranja na Fakultetu elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, kao i metodologiju znanstveno-istraživačkog rada, te uz korištenje literature koja je navedena u radu. Spoznaje, stavove, zaključke, teorije i zakonitosti drugih autora koje sam izravno ili parafrazirajući naveo/la u diplomskom radu citirao/la sam i povezo/la s korištenim bibliografskim jedinicama.

A photograph of a handwritten signature in black ink on a light-colored background. The signature is written in a cursive style and appears to read 'D Samardzic'.

Domagoj Samardžić

Želim se zahvaliti svojoj obitelji na bezuvjetnoj podršci tijekom mojeg studiranja.

Posebno hvala prof. dr. sc. Željenu Lozini na pomoći, prijedlozima i podršci ne samo pri izradi rada, nego i tijekom višegodišnjeg mentorstva.

Domagoj Samardžić

Sadržaj

| | |
|-------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1. UVOD | 1 |
| 2. KINEMATIKA | 2 |
| 2.1. Gibanje tijela | 2 |
| 2.2. Materijalni i prostorni opis | 3 |
| 2.3. Gradijent deformacije | 3 |
| 2.4. Deformacija | 4 |
| 2.5. Polarna dekompozicija | 5 |
| 2.6. Promjena volumena | 6 |
| 2.7. Distorzijski član gradijenta deformacije | 7 |
| 2.8. Promjena površine | 8 |
| 2.9. Linearizacija kinematike | 9 |
| 2.9.1. Linearizacija gradijenta deformacije F | 9 |
| 2.9.2. Linearizacija deformacije | 10 |
| 2.9.3. Linearizacija promjene volumena | 10 |
| 2.10. Gradijent brzine | 11 |
| 2.11. Intenzitet promjene deformacije | 12 |
| 2.12. Intenzitet promjene volumena | 13 |
| 3. NAPREZANJE I STANJE RAVNOTEŽE | 14 |
| 3.1. Cauchy-ev tenzor naprezanja | 14 |
| 3.2. Translacijsko stanje ravnoteže | 16 |
| 3.3. Rotacijsko stanje ravnoteže | 17 |
| 3.4. Princip virtualnog rada | 17 |
| 3.5. Konjugacija rada i alternativni prikazi naprezanja | 18 |
| 4. HIPERELASTIČNOST | 20 |
| 4.1. Tenzor elastičnosti | 21 |
| 4.2. Izotropna hiperelastičnost | 21 |
| 4.3. Nestlačivi i približno nestlačivi materijali | 22 |
| 4.3.1. Elastično nestlačivi materijali | 22 |
| 4.3.2. Približno nestlačiv hiperelastičan materijal | 23 |
| 4.4. Modeli hiperelastičnih materijala | 24 |
| 4.4.1. St. Venant-Kirchhoff-ov model | 24 |
| 4.4.2. Stlačivi neo-Hook-ov model | 25 |
| 4.4.3. Nestlačivi neo-Hook-ov model | 25 |
| 4.4.4. Mooney-Rivlin-ov model | 26 |
| 5. LINEARIZACIJA JEDNADŽBI RAVNOTEŽE | 28 |
| 5.1. Linearizacija i Newton-Raphson postupak | 28 |
| 5.2. Lagrange-ov linearizirani unutarnji virtualni rad | 28 |
| 5.3. Euler-ov linearizirani unutarnji virtualni rad | 29 |
| 5.4. Linearizirani vanjski virtualni rad | 30 |

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 6. DISKRETIZACIJA | 32 |
| 6.1. Diskretizacija kinematike | 32 |
| 6.2. Diskretizacija jednadžbi ravnoteže | 33 |
| 6.2.1. Općeniti izvod jednadžbi | 33 |
| 6.2.2. Diskretizirane jednadžbe ravnoteže u matričnom obliku | 34 |
| 6.3. Diskretizacija lineariziranih jednadžbi ravnoteže | 35 |
| 6.3.1. Konstitutivni član linearizirane jednadžbe ravnoteže | 36 |
| 6.3.2. Član inicijalnog naprezanja linearizirane jednadžbe ravnoteže | 37 |
| 6.3.3. Član vanjske sile linearizirane jednadžbe ravnoteže | 37 |
| 6.4. Tangentna matrica krutosti | 38 |
| 6.5. Primjer diskretiziranog trokutastog konačnog elementa | 39 |
| 6.5.1. Diskretizacija i diskretizirane kinematičke veličine | 39 |
| 6.5.2. Ekvivalente čvorne sile | 41 |
| 6.5.3. Komponente tangentne matrice krutosti \mathbf{K} | 42 |
| 7. RJEŠAVANJE HIPERELASTIČNIH PRIMJERA | 49 |
| 7.1. Upute za korištenje <i>FLagSHyP</i> programa | 49 |
| 7.2. Inicijalni jednostavni zadatak | 53 |
| 7.2.1. Rješenje teorijom elastičnosti | 54 |
| 7.2.2. Rješenje <i>FLagSHyP</i> programom | 56 |
| 7.3. Hiperelastični štap | 59 |
| 7.3.1. <i>FLagSHyP</i> proračun 1D štapa | 59 |
| 7.3.2. <i>FLagSHyP</i> proračun 2D štapa | 62 |
| 7.3.3. <i>FLagSHyP</i> proračun 3D štapa | 64 |
| 7.3.4. Usporedba rezultata 3D, 2D i 1D štapa | 67 |
| 7.4. Hiperelastična konzola | 68 |
| 7.4.1. <i>FLagSHyP</i> proračun 2D konzole | 69 |
| 7.4.2. <i>FLagSHyP</i> proračun 3D konzole | 70 |
| 7.4.3. Usporedba rezultata 2D i 3D konzole | 72 |
| 7.5. Ploča s rupom | 73 |
| 7.5.1. <i>FLagSHyP</i> proračun 2D ploče s rupom | 73 |
| 7.5.2. <i>FLagSHyP</i> proračun 3D ploče s rupom | 78 |
| 7.5.3. Usporedba rezultata 2D i 3D ploče | 83 |
| 7.6. Utjecaj svojstva materijala | 84 |
| 8. ZAKLJUČAK | 86 |
| LITERATURA | 88 |
| POPIS MATEMATIČKIH OPERATORA, OZNAKA I KRATICA | 89 |
| SAŽETAK | 90 |
| SUMMARY | 91 |
| A. PRILOZI | 92 |

1. UVOD

Jedan od ključnih dijelova inženjerskog rada odnosi se na dizajn elemenata ili konstrukcija čija će eksploatacija težiti maksimumu u izvedbi i efikasnosti. Svaki budući inženjer pri modeliranju i analizi problema mora pristupiti s određenom količinom znanja i vještina. Ta znanja i vještine podrazumijevaju poznavanje kako se određeni modeli ponašaju u različitim uvjetima rada. Iako se inženjeri najčešće susreću s linearnim problemima ili aproksimacijama, nelinearni slučajevi čest su slučaj kako u inženjerskoj praksi tako i u samoj prirodi. [1]

Inicijalni korak u modeliranju nekog konstrukcijskog objekta jest odabir materijala. Što se tiče korištenih materijala, najčešće upotrijebljeni u praksi jesu metali i njihove legure, čije se deformacije žele zadržati u željenom elastičnom području zbog čega su i izračuni čvrstoće relativno laki. Unatoč tome, sve više na važnosti dobivaju i hiperelastični materijali. Za mnoge od njih (npr. guma), linearna elastična analiza ne daje precizne podatke o njihovom ponašanju. S obzirom na to, teorija hiperelastičnosti nudi potrebna sredstva za opisivanje ponašanja takvih materijala, posebno kod uspostave dijagrama *naprezanje-deformacija*. [3]

Različite vrste hiperelastičnih materijala kategorizirane su u dvije osnovne skupine modela: *mikromehanički* i *fenomenološki* modeli. Fenomenološki modeli imaju najveću primjenu u praksi, a neki od najpoznatijih su: Mooney-Rivlin-ov, neo-Hook-ov, polinomski, Yeoh-ov, Ogden-ov i drugi modeli. [9]

Svaki hiperelastični model ima svoja karakteristična svojstva, a ovisno o opterećenju i deformaciji svaki model ima svoju posebnu upotrebu. Ovisno o deformacijama koje dosežu do 700 %, potrebno je odabrati model materijala koji će najbolje opisati zadani materijal s obzirom na njegove deformacije i svojstva. [10]

Najvažnija karakteristika hiperelastičnih materijala jest pojava relativno velikih deformacija zbog čega je veza s naprezanjem nelinearna. Sukladno tome, hiperelastični materijal može se definirati kao nelinearni sustav. Nelinearni sustavi ili modeli opisuju promjene varijabli u vremenu te stoga mogu biti kaotični i nepredvidljivi u odnosu na linearne sustave. [11] Analiza nelinearnih sustava najčešće uključuje računalnu simulaciju, što je omogućeno razvojem komercijalnih softvera koji primjenjuju numeričke metode kao što su *metoda konačnih elemenata* i metode za rješavanje nelinearnih problema (npr. Newton-Raphson). Zahvaljujući tome, velike su mogućnosti primjene nelinearne analize.

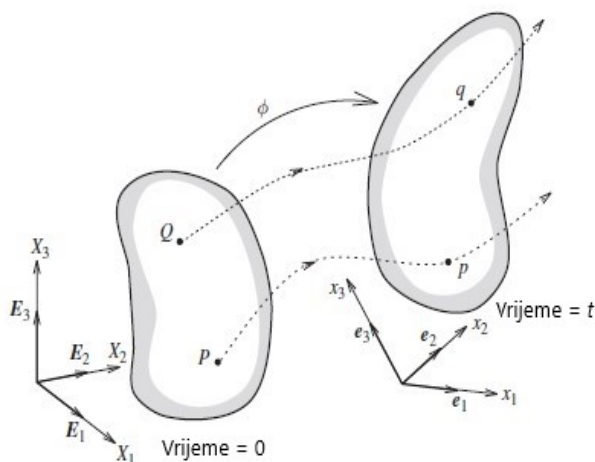
U ovom radu bit će obrađeni bitni pojmovi vezani za hiperelastične materijale kao što su teorijske osnove nelinearne mehanike kontinuuma i nelinearne formulacije metode konačnih elemenata. Važno je usredotočiti se i na primjenu softvera za rješavanje nelinearnih sustava, s ciljem razumijevanja nelinearnih problema i načina njihova rješavanja. Na taj način učinit će se korak unaprijed u mehanici kontinuuma, gdje će se napustiti "jednostavni" linearni sustavi, razraditi koncept hiperelastičnosti i nelinearnosti te analizirati postupci za rješavanje nelinearnih sustava. Pri tome, jednadžbe i postupci rješavanja bit će upotrijebljeni u kontekstu stanja ravnoteže, tj. statike.

2. KINEMATIKA

Ispravan opis gibanja tijela je temeljan kod analize konačnih deformacija tijela, ali isticanje toga je nužno zbog toga što se u infinitezimalnoj analizi deformacije primjenjuje mnogo pretpostavki koje se uzimaju zdravo za gotovo i koje su rijetko pravilno formulirane. Kinematika je proučavanje gibanja i deformiranosti tijela bez obzira na uzrok. Kasnije će se vidjeti da je u analizi deformacije omogućena primjena alternativnih koordinantnih sustava, tj. materijalnih i prostornih prikaza. Iako se u ovom području ne proučava utjecaj inercijskih sila, pokazati će se vremenske derivacije raznih kinematičkih veličina koje će pojačati razumijevanje gibanja deformabilnog tijela i pružiti osnove za formulaciju virtualnog rada za ravnotežno stanje koje koristi notaciju virtualne brzine i odgovarajućih kinematičkih veličina. [1]

2.1. Gibanje tijela

Na slici 2.1 može se vidjeti gibanje deformabilnog tijela. Tijelo je zamišljeno kao da je sastavljeno od materijalnih čestica koje su definirane s koordinatama \mathbf{X} , s obzirom na jedinične vektore Kartezijskog koordinantnog sustava u inicijalnom položaju za vrijeme t_0 .



Slika 2.1: Gibanje deformabilnog tijela [1]

Tablica 2.1: Prikaz geometrijskih i fizikalnih veličina prije i nakon deformacije [1]

| Vrijeme | Dužina | Površina | Volumen | Gustoća |
|---------|--------|----------|---------|----------|
| 0 | L | A | V | ρ_0 |
| t | l | a | v | ρ |

Nakon deformacije, za neki novi vremenski trenutak t , tijelo se nalazi u novom položaju s novim koordinatama \mathbf{x} i novim jediničnim Kartezijskim vektorima. Za ovo poglavlje će se pretpostaviti da ne postoji nikakva veza između početnih i konačnih jediničnih vektora za Kartezijev koordinantni sustav. Gibanje se matematički može opisati kao preslikavanje funkcije Φ između početnog i trenutnog položaja čestice tijela kao

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}, t) \quad (2.1)$$

Za fiksiranu vrijednost t , gornja jednačba predstavlja preslikavanje između deformiranog i nedeformiranog tijela. Dodatno, za fiksirani početni položaj \mathbf{X} , jednačba predstavlja putanju čestice kao funkciju

vremena $\Phi(t)$. Kod analize konačnih deformacije, ne postavljaju se nikakve pretpostavke vezane za red veličine pomaka $\mathbf{x} - \mathbf{X}$. Kad se radi o analizi infinitezimalnih deformacija, pomak $\mathbf{x} - \mathbf{X}$ se usvaja da je jako mali u usporedbi s dimenzijama tijela te se geometrijske promjene tijela također zanemaruju.

2.2. Materijalni i prostorni opis

Kod analize konačnih deformacija mora se odrediti razlika između koordinantnih sustava koji se koriste za opisivanje ponašanja razmatranog tijela u gibanju. Grubo rečeno, neke važne fizikalne veličine kao što je gustoća, mogu se opisati u uvjetima u kojima je tijelo bilo prije deformacije ili tijekom deformacije. *Materijalni* ili *Lagrange-ov* opis se odnosi na ponašanje materijalne čestice a *prostorni* ili *Euler-ov* opis se odnosi na ponašanje u prostornom položaju. Bez obzira o kojem se opisu radi, izvedene jednadžbe se moraju odnositi na trenutni položaj tijela i stoga se moraju formulirati pomoću prostornog opisa. Da se bolje razumije razlika između materijalnog i prostornog opisa, razmatrati će se neka jednostavna skalarna veličina, kao što je gustoća materijala ρ :

- a) *Materijalni opis*: promjena gustoće ρ po tijelu je opisana s obzirom na početne koordinate \mathbf{X} koje definiraju položaj materijalne čestice u kontinuumu za vrijeme

$$\rho = \rho(\mathbf{X}, t) \quad (2.2)$$

- b) *Prostorni opis*: gustoća ρ je opisana s obzirom na položaj u prostoru \mathbf{x} , koji materijalna čestica trenutno zauzima u kontinuumu u vremenu t

$$\rho = \rho(\mathbf{x}, t) \quad (2.3)$$

U jednadžbi 2.2 promjena u vremenu t indicira da ista materijalna čestica s koordinatama \mathbf{X} ima drugačiju gustoću ρ . Posljedično, interes je fokusiran na materijalnu česticu \mathbf{X} . Jednadžba 2.3 pokazuje da promjena u vremenu t indicira da su različite gustoće promatrane u istom prostornom položaju \mathbf{x} , koji je u drugom trenutku okupiran drugačijom česticom. Posljedično, interes je fokusiran na prostorni položaj \mathbf{x} . Često je nužno da postoji transformacija iz materijalnog opisa u prostorni i obratno za neke važne fizikalne veličine. Npr. neka skalarna veličina kao što je gustoća se može opisati

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\Phi(\mathbf{X}, t), t) \quad (2.4)$$

Iz jednadžbi 2.2 - 2.4 se može jasno vidjeti da se prostorne veličine mogu opisati kao funkcije inicijalnih koordinata.

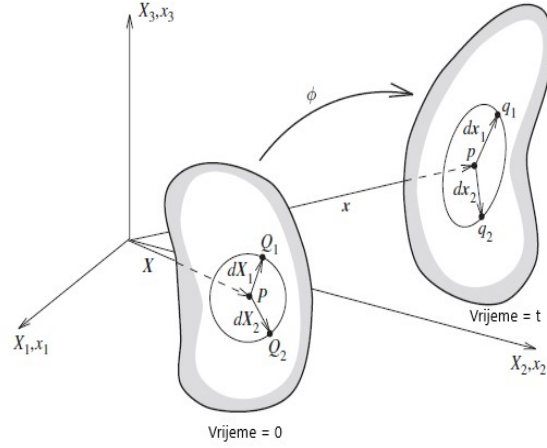
2.3. Gradijent deformacije

Važna veličina u analizi konačnih deformacije je gradijent deformacije \mathbf{F} , koji je bitan parametar svih jednadžbi koje povezuju veličine prije deformacije s njima odgovarajućim veličinama nakon (ili tijekom) deformacije. Tenzor gradijenta deformacije omogućuje da se relativni prostorni položaj dviju susjednih čestica nakon deformacije opiše preko njihovog relativnog materijalnog (inicijalnog) položaja, te je stoga nužan za opis produljenja i relativne deformacije.

Razmatrati će se dvije materijalne čestice Q_1 i Q_2 u blizini materijalne čestice P (slika 2.2). Položaji točaka Q_1 i Q_2 u odnosu na P su dani preko vektora $d\mathbf{X}_1$ i $d\mathbf{X}_2$

$$d\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_{Q_1} - \mathbf{X}_P \quad (2.5)$$

$$d\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_{Q_2} - \mathbf{X}_P \quad (2.6)$$



Slika 2.2: Gibanje susjednih točaka uslijed deformacije [1]

Nakon deformacije, materijalne čestice Q_1 , Q_2 i P su prešle u novi položaj koji se dobije preslikavanjem funkcije Φ iz jednadžbe 2.1

$$\mathbf{x}_p = \Phi(\mathbf{X}_P, t) \quad (2.7)$$

$$\mathbf{x}_{q_1} = \Phi(\mathbf{X}_{Q_1}, t) \quad (2.8)$$

$$\mathbf{x}_{q_2} = \Phi(\mathbf{X}_{Q_2}, t) \quad (2.9)$$

Odgovarajući vektori koji opisuju nove položaje točaka Q_1 i Q_2 su

$$d\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_{q_1} - \mathbf{x}_p = \Phi(\mathbf{X}_P + d\mathbf{X}_1, t) - \Phi(\mathbf{X}_P, t) \quad (2.10)$$

$$d\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_{q_2} - \mathbf{x}_p = \Phi(\mathbf{X}_P + d\mathbf{X}_2, t) - \Phi(\mathbf{X}_P, t) \quad (2.11)$$

Sada se *tenzor gradijenta deformacije* \mathbf{F} može definirati kao

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} = \nabla_0 \Phi \quad (2.12)$$

gdje ∇_0 označava gradijent po materijalnoj konfiguraciji, tj. po inicijalnim koordinatama.

Tada vektore $d\mathbf{x}_1$ i $d\mathbf{x}_2$ koji opisuju trenutni položaj se može izraziti preko inicijalnih vektora $d\mathbf{X}_1$ i $d\mathbf{X}_2$

$$d\mathbf{x}_1 = \mathbf{F} d\mathbf{X}_1 \quad (2.13)$$

$$d\mathbf{x}_2 = \mathbf{F} d\mathbf{X}_2 \quad (2.14)$$

Može se primijetiti da tenzor gradijenta deformacije \mathbf{F} transformira vektore opisane preko inicijalnih koordinata u vektore s trenutnim koordinatama, te se stoga još naziva tenzor dviju točaka (eng. *two point sensor*).

2.4. Deformacija

Kao općenitu mjeru deformacije, razmatrati će se promjena u skalarnom produktu vektora $d\mathbf{X}_1$ i $d\mathbf{X}_2$ dok se deformiraju do položaja vektora $d\mathbf{x}_1$ i $d\mathbf{x}_2$, kako je pokazano na slici 2.2. Ova promjena uključuje i rastezanje i promjenu kuta između ova dva vektora. Iz jednadžbi 2.13-2.14 prostorni skalarni produkt se može izraziti preko materijalnih vektora $d\mathbf{X}_1$ i $d\mathbf{X}_2$

$$d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2 = d\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{C} d\mathbf{X}_2 \quad (2.15)$$

gdje je \mathbf{C} *Cauchy-Green-ov desni tenzor deformacije*, koji je izražen preko gradijenta deformacije \mathbf{F} kao

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (2.16)$$

Tenzor \mathbf{C} djeluje na materijalne vektore $d\mathbf{X}_1$ i $d\mathbf{X}_2$, te se stoga naziva tenzor materijalnih veličina. Analogno, skalarni produkt inicijalnih materijalnih vektora $d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2$ se može dobiti iz prostornih vektora $d\mathbf{x}_1$ i $d\mathbf{x}_2$ preko *Cauchy-Green-ovog lijevog tenzora deformacije* ili „Finger“ tenzora \mathbf{b}

$$d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2 = d\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{b}^{-1} d\mathbf{x}_2 \quad (2.17)$$

gdje je

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T \quad (2.18)$$

Može se primijetiti da u jednadžbi 2.18, \mathbf{b}^{-1} djeluje na prostorne vektore $d\mathbf{x}_1$ i $d\mathbf{x}_2$, pa je stoga \mathbf{b}^{-1} , tj. \mathbf{b} tenzor prostornih veličina.

Promjena u skalarnom produktu se sad može izraziti preko materijalnih vektora $d\mathbf{X}_1$ i $d\mathbf{X}_2$ i *Lagrange-ovog* ili *Green-ova tenzora deformacije* \mathbf{E} kao

$$\frac{1}{2}(d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2 - d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2) = d\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{E} d\mathbf{X}_2 \quad (2.19)$$

gdje je materijalni tenzor \mathbf{E} jednak

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (2.20)$$

Analogno, ista promjena u skalarnom produktu se može izraziti preko prostornih vektora $d\mathbf{x}_1$ i $d\mathbf{x}_2$ i *Euler-ovog* ili *Almansi-jevog tenzora deformacije* \mathbf{e} kao

$$\frac{1}{2}(d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2 - d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2) = d\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{e} d\mathbf{x}_2 \quad (2.21)$$

gdje je prostorni tenzor \mathbf{e}

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1}) \quad (2.22)$$

Materijalnim tenzorom \mathbf{E} se opisuje razlika u kvadratima duljine u odnosu na kvadrat početne duljine

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dl^2 - dL^2}{dL^2} \right) = d\mathbf{N} \cdot \mathbf{E} \mathbf{N} \quad (2.23)$$

gdje je $\mathbf{N} = d\mathbf{X}/dL$ jedinični vektor u smjeru $d\mathbf{X}$. Analogno, prostornim tenzorom \mathbf{e} se opisuje razlika kvadrata duljina u odnosu na kvadrat konačne duljine

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dl^2 - dL^2}{dl^2} \right) = d\mathbf{n} \cdot \mathbf{e} \mathbf{n} \quad (2.24)$$

gdje je $\mathbf{n} = d\mathbf{x}/dl$ jedinični vektor u smjeru $d\mathbf{x}$.

2.5. Polarna dekompozicija

Gradijent deformacije \mathbf{F} , razmatran u prijašnjem poglavlju, transformira materijalni vektor u odgovarajući prostorni vektor. Važna uloga \mathbf{F} je nadalje opisana preko njegove dekompozicije u komponente rastezanja i rotacije. Trenutno promatrano, s matematičkog gledišta tenzor \mathbf{F} se može izraziti kao *produkt tenzora rotacije* \mathbf{R} i *tenzora rastezanja* \mathbf{U} , pri čemu se polarna dekompozicija definira kao

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} \quad (2.25)$$

Da se bolje shvate ovi tenzori, treba se prisjetiti definicije desnog Cauchy-Green-ova tenzora \mathbf{C}

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U} \quad (2.26)$$

S obzirom da je \mathbf{R} ortogonalan tenzor rotacije, za koji vrijedi $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$, tenzor \mathbf{U} se odabire da bude simetričan tenzor koji daje jedinstvenu definiciju materijalnog tenzora rastezanja \mathbf{U} izraženog preko desnog Cauchy-Green-ova tenzora \mathbf{C}

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{U} \mathbf{U} = \mathbf{C} \quad (2.27)$$

Pod pojmom polarne dekompozicije, uobičajeni materijalni i prostorni elementarni vektori su povezani preko

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} = \mathbf{R} (\mathbf{U} d\mathbf{X}) \quad (2.28)$$

Gornja jednadžba pokazuje da je materijalni vektor $d\mathbf{X}$ prvo rastegnut, što pokazuje dio jednadžbe $\mathbf{U} d\mathbf{X}$, te zatim zarotiran do prostorne konfiguracije pomoću tenzora \mathbf{R} . Može se primijetiti da je \mathbf{U} materijalni tenzor, dok \mathbf{R} transformira materijalni vektor u prostorni, te je stoga poput \mathbf{F} , tenzor dviju točaka. Također je moguće rastaviti tenzor \mathbf{F} na komponente istog tenzora rotacije \mathbf{R} i komponentu koja definira rastezanje u prostornoj konfiguraciji

$$\mathbf{F} = \mathbf{V} \mathbf{R} \quad (2.29)$$

što se može protumačiti kao prvotno rotiranje materijalnog vektora $d\mathbf{X}$ do prostorne konfiguracije, odakle se zatim rasteže do položaja $d\mathbf{x}$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} = \mathbf{V} (\mathbf{R} d\mathbf{X}) \quad (2.30)$$

gdje se prostorni tenzor \mathbf{V} može izraziti preko tenzora \mathbf{U} kombinacijom jednadžbi 2.25 i 2.29

$$\mathbf{V} = \mathbf{R} \mathbf{U} \mathbf{R}^T \quad (2.31)$$

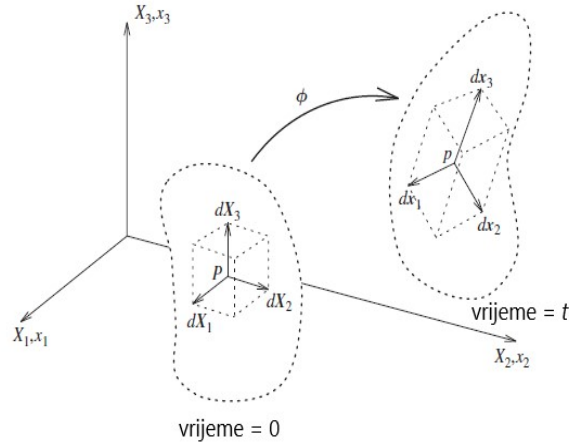
Dodatno, iz jednadžbe 2.18 za lijevi Cauchy-Green-ov tenzor \mathbf{b} se dobije

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = (\mathbf{V} \mathbf{R}) (\mathbf{R}^T \mathbf{V}) = \mathbf{V}^2 \quad (2.32)$$

2.6. Promjena volumena

Razmatrati će se infinitezimalni djelić volumena u materijalnoj konfiguraciji čiji su rubovi paralelni s Kartezijevim osima. Rubovi djelića volumena su dani vektorima $d\mathbf{X}_1 = dX_1 \mathbf{E}_1$, $d\mathbf{X}_2 = dX_2 \mathbf{E}_2$ i $d\mathbf{X}_3 = dX_3 \mathbf{E}_3$ gdje su \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 i \mathbf{E}_3 ortogonalni jedinični vektori (slika 2.3). Elementarni materijalni volumen dV definiran je preko ova tri vektora te je volumen stoga

$$dV = dX_1 dX_2 dX_3 \quad (2.33)$$



Slika 2.3: Promjena volumena [1]

Da se dobije odgovarajući deformirani volumen dv u prostornoj konfiguraciji, prvo treba odrediti prostorne vektore koji se dobiju „push-forward“ operacijom na materijalne vektore

$$d\mathbf{x}_1 = \mathbf{F}d\mathbf{X}_1 = \frac{\partial\Phi}{\partial X_1}dX_1 \quad (2.34)$$

$$d\mathbf{x}_2 = \mathbf{F}d\mathbf{X}_2 = \frac{\partial\Phi}{\partial X_2}dX_2 \quad (2.35)$$

$$d\mathbf{x}_3 = \mathbf{F}d\mathbf{X}_3 = \frac{\partial\Phi}{\partial X_3}dX_3 \quad (2.36)$$

Trostruki umnožak ovih vektora daje deformirani volumen

$$dv = dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{\partial\Phi}{\partial X_1} \cdot \left(\frac{\partial\Phi}{\partial X_2} \times \frac{\partial\Phi}{\partial X_3} \right) dX_1 dX_2 dX_3 \quad (2.37)$$

U gornjoj jednadžbi se vidi da trostruki umnožak predstavlja determinantu tenzora \mathbf{F} koja daje promjenu volumena izraženu preko Jakobijana J

$$dv = JdV; \quad J = \det\mathbf{F} \quad (2.38)$$

Konačno, elementi mase se sada mogu povezati s volumenom preko početne i trenutne gustoće

$$dm = \rho_0 dV = \rho dv \quad (2.39)$$

Stoga, zakon očuvanja mase ili jednadžba kontinuiteta se može izraziti kao

$$\rho_0 = \rho J \quad (2.40)$$

2.7. Distorzijski član gradijenta deformacije

Kada se radi o nestlačivim ili približno nestlačivim materijalima, nužno je odvojiti volumetrijske komponente deformacije od distorzijskih (izohornih) komponenti. Takvo odvajanje mora osigurati da distorzijska komponenta $\hat{\mathbf{F}}$, ne predstavlja nikakvu promjenu volumena. Dakle, determinanta $\hat{\mathbf{F}}$ mora zadovoljavati uvjet

$$\det\hat{\mathbf{F}} = 1 \quad (2.41)$$

Ovaj uvjet se može ostvariti ako se $\hat{\mathbf{F}}$ definira da bude

$$\hat{\mathbf{F}} = J^{-1/3} \mathbf{F} \quad (2.42)$$

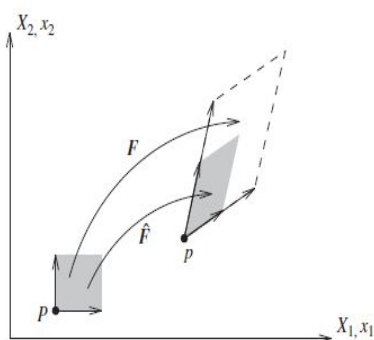
Dokaz da je uvjet u jednadžbi 2.41 zadovoljen može se prikazati

$$\begin{aligned} \det \hat{\mathbf{F}} &= \det(J^{-1/3} \mathbf{F}) \\ &= (J^{-1/3})^3 \det \mathbf{F} \\ &= J^{-1} J \\ &= 1 \end{aligned} \quad (2.43)$$

Gradijent deformacije \mathbf{F} sada se može prikazati preko volumetrijske komponente J i distorzijske komponente $\hat{\mathbf{F}}$

$$\mathbf{F} = J^{1/3} \hat{\mathbf{F}} \quad (2.44)$$

Na slici 2.4 se može vidjeti rastavljanje gradijenta deformacije \mathbf{F} na distorzijski član za 2D slučaj.



Slika 2.4: Distorzijski član gradijenta deformacije [1]

Slična dekompozicija se može primijeniti i na druge tenzore deformacije kao što je Cauchy-Green-ov desni tenzor \mathbf{C} , definirajući distorzijsku komponentu $\hat{\mathbf{C}}$ kao

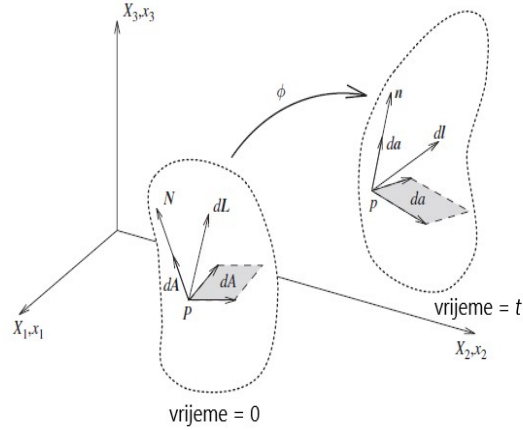
$$\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{F}}^T \hat{\mathbf{F}} \quad (2.45)$$

Ako se $\hat{\mathbf{F}}$ zamijeni s izrazom 2.42, dobije se drugačiji izraz za $\hat{\mathbf{C}}$

$$\hat{\mathbf{C}} = (\det \mathbf{C})^{-1/3} \mathbf{C}; \quad \det \mathbf{C} = J^2 \quad (2.46)$$

2.8. Promjena površine

Razmatrati će se element površine u inicijalnoj konfiguraciji $d\mathbf{A} = dA \cdot \mathbf{N}$ koji nakon deformacije postaje $d\mathbf{a} = da \cdot \mathbf{n}$ (slika 2.5).



Slika 2.5: Promjena površine [1]

S ciljem da se dobije veza između ova dva vektora, razmatrati će se neki proizvoljan materijalni vektor $d\mathbf{L}$ koji se nakon deformacije mijenja u $d\mathbf{l}$. Odgovarajući inicijalni i trenutni volumen elementa su dani jednačbama

$$d\mathbf{V} = d\mathbf{L} \cdot d\mathbf{A} \quad (2.47)$$

$$d\mathbf{V} = d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{a} \quad (2.48)$$

Povezujući se na jednačbu 2.38, gdje su trenutni i početni volumen povezani preko Jakobijana J i da je $d\mathbf{l} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L}$, dobije se

$$Jd\mathbf{L} \cdot d\mathbf{A} = (\mathbf{F}d\mathbf{L}) \cdot d\mathbf{a} \quad (2.49)$$

Prethodni izraz je valjan za bilo koji vektor, te omogućuje da se elementi površine povežu kao

$$d\mathbf{a} = J\mathbf{F}^{-T} d\mathbf{A} \quad (2.50)$$

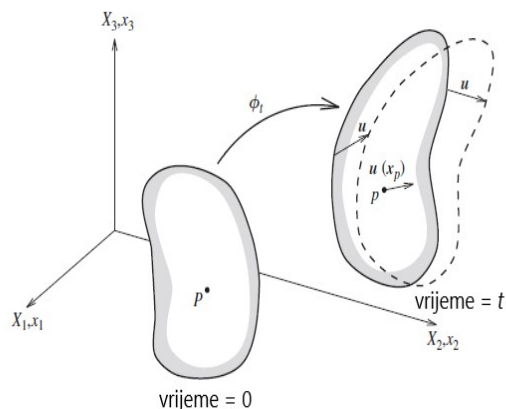
2.9. Linearizacija kinematike

Veličine deformacije koje su do sada definirane nelinearnog su oblika i izražene preko opisa gibanja Φ te ih je potrebno linearizirati da se može primijeniti N-R postupak za njihovo rješavanje. Stoga je nužno izvesti linearizirane jednačbe deformacije s obzirom na male promjene u položaju.

2.9.1. Linearizacija gradijenta deformacije \mathbf{F}

Razmatrati će se mali pomak $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ iz trenutnog položaja za $\mathbf{x} = \Phi_t(\mathbf{X}) = \Phi(\mathbf{X}, t)$ (slika 2.6). Gradijent deformacije \mathbf{F} se može linearizirati u smjeru \mathbf{u} kao

$$\begin{aligned} D\mathbf{F}(\Phi_t)[\mathbf{u}] &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{F}(\Phi_t + \varepsilon\mathbf{u}) \\ &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \frac{\partial(\Phi_t + \varepsilon\mathbf{u})}{\partial\mathbf{X}} \\ &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \left(\frac{\partial\Phi_t}{\partial\mathbf{X}} + \varepsilon \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{X}} \right) \\ &= \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}} \\ &= (\nabla\mathbf{u})\mathbf{F} \end{aligned} \quad (2.51)$$



Slika 2.6: Linearizacija kinematike [1]

Pošto je \mathbf{u} funkcija početnog položaja \mathbf{X} , tada vrijedi

$$D\mathbf{F}[\mathbf{u}] = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \nabla_0 \mathbf{u} \quad (2.52)$$

2.9.2. Linearizacija deformacije

Pomoću jednadžbe 2.51, Lagrange-ov ili Green-ov tenzor deformacije se može linearizirati u trenutnom položaju u smjeru \mathbf{u}

$$\begin{aligned} D\mathbf{E}[\mathbf{u}] &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T D\mathbf{F}[\mathbf{u}] + D\mathbf{F}^T[\mathbf{u}]\mathbf{F}) \\ &= \frac{1}{2} [\mathbf{F}^T \nabla \mathbf{u} \mathbf{F} + \mathbf{F}^T (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{F}] \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{F}^T [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \mathbf{F} \end{aligned} \quad (2.53)$$

Izraz unutar zgrade predstavlja mali tenzor deformacije $\boldsymbol{\varepsilon}$, te se $D\mathbf{E}[\mathbf{u}]$ može interpretirati kao „pull-back“ operacija linearnog tenzora deformacije $\boldsymbol{\varepsilon}$.

$$D\mathbf{E}[\mathbf{u}] = \mathbf{F}^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{F} \quad (2.54)$$

Ako se linearizacija vrši za inicijalnu konfiguraciju ($\mathbf{x} = \mathbf{X}, \mathbf{F} = \mathbf{I}$), vrijedi

$$D\mathbf{E}_0[\mathbf{u}] = \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.55)$$

Slično se dobiju linearizirani Cauchy-Green-ov lijevi i desni tenzor deformacije

$$D\mathbf{C}[\mathbf{u}] = 2\mathbf{F}^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{F} \quad (2.56)$$

$$D\mathbf{b}[\mathbf{u}] = (\nabla \mathbf{u})\mathbf{b} + \mathbf{b}(\nabla \mathbf{u})^T \quad (2.57)$$

2.9.3. Linearizacija promjene volumena

Promjena volumena je već prije definirana kao Jakobijan $J = \det \mathbf{F}$. Usmjereni derivacija J u smjeru \mathbf{u} , u prostornoj konfiguraciji se može definirati kao

$$DJ[\mathbf{u}] = D \det(\mathbf{F})[D\mathbf{F}[\mathbf{u}]] \quad (2.58)$$

Pomoću izraza 2.51 za linearizaciju \mathbf{F} se dobije usmjerena derivacija determinante \mathbf{F} odnosno Jakobijana J

$$\begin{aligned} DJ[\mathbf{u}] &= J \operatorname{tr} \left(\mathbf{F}^{-1} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) \\ &= J \operatorname{tr} \nabla \mathbf{u} \\ &= J \operatorname{div} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.59)$$

gdje je operator tr (eng. *trace*) trag tenzora i predstavlja sumu dijagonalnih članova danog tenzora. Gornja jednačba se također može izraziti i preko linearnog tenzora deformacije $\boldsymbol{\epsilon}$

$$DJ[\mathbf{u}] = J \operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.60)$$

U konačnici, usmjerena derivacija elementa volumena dv u smjeru \mathbf{u} se može dobiti iz jednačbe 2.38

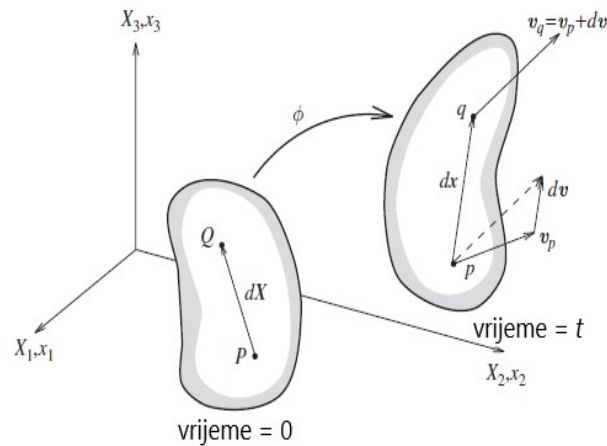
$$D(dv)[\mathbf{u}] = (\operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon}) dv \quad (2.61)$$

2.10. Gradijent brzine

Brzina će se definirati kao prostorni vektor, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Derivacija brzine po prostornim koordinatama definira *tenzor gradijenta brzine* \mathbf{l} .

$$\mathbf{l} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} = \nabla \mathbf{v} \quad (2.62)$$

Očito je da se radi o prostornom tenzoru, kao što se može vidjeti na slici 2.7, tenzor \mathbf{l} daje relativnu brzinu čestice u točki q u odnosu na česticu u točki p , kao $d\mathbf{v} = \mathbf{l} \cdot d\mathbf{x}$.



Slika 2.7: Gradijent brzine [1]

Vremensku derivaciju gradijenta deformacije \mathbf{F} može se izraziti preko tenzora \mathbf{l}

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{l} \mathbf{F} \quad (2.63)$$

Iz čega se \mathbf{l} može zapisati u obliku

$$\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \quad (2.64)$$

2.11. Intenzitet promjene deformacije

U ovom poglavlju ponovo će se uvesti elementarni vektori i i njihovi „push-forward“ prostorni vektori.

$$d\mathbf{x}_1 = \mathbf{F}\mathbf{X}_1; \quad d\mathbf{x}_2 = \mathbf{F}\mathbf{X}_2 \quad (2.65)$$

Prije se deformacija definirala kao skalarni produkt dvaju proizvoljnih vektora. Slično tome, intenzitet promjene deformacije može se definirati kao intenzitet promjene skalarnog produkta bilo koja dva vektora. Treba se pozvati na jednadžbu za skalarni produkt trenutnih vektora koja je izražena preko materijalnih vektora $d\mathbf{X}_1$ i $d\mathbf{X}_2$ (koji nisu vremenski ovisni) i desnog Cauchy-Green-ovog tenzora \mathbf{C} koji je vremenski ovisan

$$d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2 = d\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{C}d\mathbf{X}_2 \quad (2.66)$$

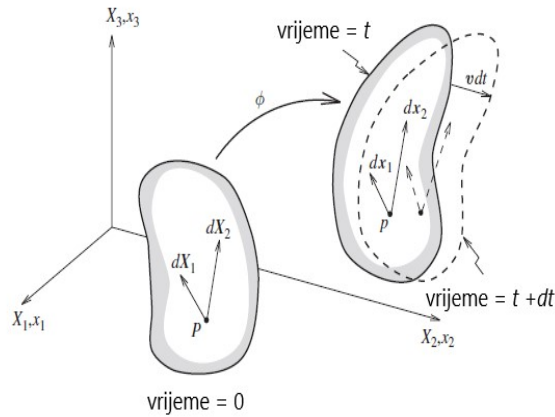
Ako se ovaj izraz vremenski diferencira i ubaci veza između Lagrange-ova tenzora deformacije \mathbf{E} i desnog Cauchy-Green-ovog tenzora kao $2\mathbf{E} = (\mathbf{C} - \mathbf{I})$, dobiti će se trenutni intenzitet promjene skalarnog produkta izraženog preko inicijalnih materijalnih vektora

$$\frac{d}{dt}(d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2) = d\mathbf{X}_1 \cdot \dot{\mathbf{C}}d\mathbf{X}_2 = 2d\mathbf{X}_1 \cdot \dot{\mathbf{E}}d\mathbf{X}_2 \quad (2.67)$$

gdje je $\dot{\mathbf{E}}$, Lagrange-ov tenzor deformacije deriviran po vremenu i još se naziva *tenzor materijalne promjene deformacije* i može se izraziti preko $\dot{\mathbf{F}}$

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{C}} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}}) \quad (2.68)$$

Tenzor $\dot{\mathbf{E}}$ daje trenutni intenzitet promjene deformacije skalarnog produkta izraženog preko inicijalnih vektora.



Slika 2.8: Intenzitet promjene deformacije [1]

Prikladnije je prikazati ovaj intenzitet promjene preko prostornih vektora. U tu svrhu će se invertirati jednadžbe 2.65 i uvrstiti u jednadžbu 2.67

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2) = d\mathbf{x}_1 \cdot (\mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1}) d\mathbf{x}_2 \quad (2.69)$$

Izraz u zagradi na desnoj strani gornje jednadžbe predstavlja tenzor koji je prostorni „push-forward“ duplikat tenzora $\dot{\mathbf{E}}$ i naziva se *tenzor intenziteta deformacije* \mathbf{d} (eng. *rate of deformation tensor*).

$$\mathbf{d} = \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1} \quad (2.70)$$

Prikladniji izraz za tenzor \mathbf{d} se ostvari kombinacijom jednažbi 2.63 i 2.68 , te se tada \mathbf{d} može izraziti kao simetrični dio tenzora \mathbf{l}

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\mathbf{l} + \mathbf{l}^T) \quad (2.71)$$

2.12. Intenzitet promjene volumena

Promjena volumena između početne i trenutne konfiguracije je definirana Jakobijanom J

$$dv = JdV; \quad J = \det \mathbf{F} \quad (2.72)$$

Vremenskim diferenciranjem gornjeg izraza dobije se materijalni intenzitet promjene volumena (slika 2.9)

$$\frac{d}{dt}(dv) = JdV = \dot{J}dV \quad (2.73)$$

Materijalni intenzitet promjene Jakobijana J se može zapisati pomoću usmjerene derivacije kao

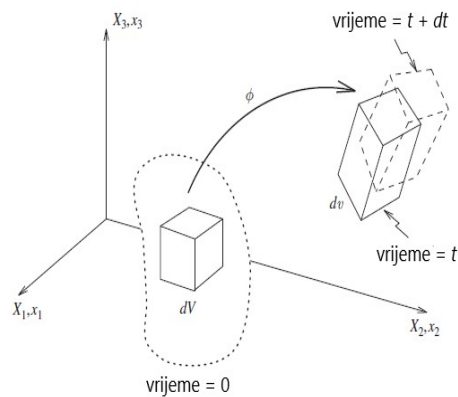
$$\dot{J} = DJ[\mathbf{v}] \quad (2.74)$$

Iz jednažbi 2.59 i 2.69 za linearizaciju $DJ[\mathbf{u}]$, dobije se sličan izraz za \dot{J} , gdje je tenzor linearne deformacije $\boldsymbol{\epsilon}$ zamijenjen tenzorom intenziteta deformacije \mathbf{b}

$$\dot{J} = Jtr(\mathbf{b}) \quad (2.75)$$

Primijeti li se da je $tr(\mathbf{b})$ jednak divergenci \mathbf{v} , tada se dobije

$$\dot{J} = Jdiv(\mathbf{v}) \quad (2.76)$$



Slika 2.9: Materijalni intenzitet promjene volumena [1]

Analogno, \dot{J} se može izraziti preko materijalnih tenzora $\dot{\mathbf{C}}$ i $\dot{\mathbf{E}}$ pomoću jednažbi 2.68, 2.70 i 2.75 da se dobije

$$\begin{aligned} \dot{J} &= Jtr(\mathbf{b}) \\ &= Jtr(\mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1}) \\ &= Jtr(\mathbf{C}^{-1} \dot{\mathbf{E}}) \end{aligned} \quad (2.77)$$

Ako se primijeni materijalna derivacija na jednažbu 2.40 za trenutnu gustoću, dobije se zakon očuvanja mase u obliku

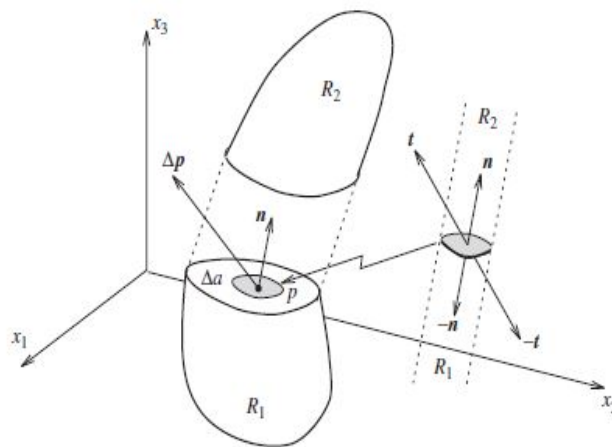
$$\frac{d\rho}{dt} + \rho div(\mathbf{v}) = 0 \quad (2.78)$$

3. NAPREZANJE I STANJE RAVNOTEŽE

U ovom poglavlju uvesti će se pojam napreznja i ravnoteže za deformabilno tijelo koje ima neki konačni pomak. Napreznje će se prvotno definirati u standardnom obliku, kao sila po jedinici površine za trenutni položaj tijela. Tako će se uvesti pojam Cauchy-eva tenzora napreznja koji je općenito poznat i koristi se u linearnoj analizi. Izvesti će se diferencijalne jednadžbe koje opisuju translacijsku i rotacijsku ravnotežu, te ekvivalentni princip virtualnog rada. [1]

3.1. Cauchy-ev tenzor napreznja

Razmatrati će se deformabilno tijelo u položaju kako je prikazano na slici 3.1.



Slika 3.1: Vektor vanjskog opterećenja [1]

Da bi se shvatio koncept napreznja, promatrati će se djelovanje sila sa dijela tijela R_1 na drugi dio R_2 , s kojim je u kontaktu. U tu svrhu će se promatrati element površine Δa s normalom \mathbf{n} koji se nalazi u blizini točke p . Ako je $\Delta \mathbf{p}$ rezultirajuća sila na elementu površine, vektor vanjskog opterećenja \mathbf{t} , koji se podudara s normalom \mathbf{n} u točki p je

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta a} \quad (3.1)$$

gdje veza između \mathbf{t} i \mathbf{n} mora zadovoljavati treći Newton-ov zakon

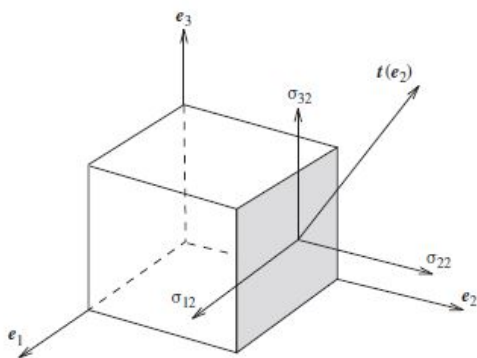
$$\mathbf{t}(-\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{n}) \quad (3.2)$$

Da se bolje razumije tenzor napreznja, vektor vanjskog opterećenja \mathbf{t} koji djeluje na deformirano tijelo sa njegovim odgovarajućim Kartezijevim smjerovima \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 i \mathbf{e}_3 , će se izraziti preko svojih komponenti (slika 3.2)

$$\mathbf{t}(\mathbf{e}_1) = \sigma_{11}\mathbf{e}_1 + \sigma_{21}\mathbf{e}_2 + \sigma_{31}\mathbf{e}_3 \quad (3.3)$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{e}_2) = \sigma_{12}\mathbf{e}_1 + \sigma_{22}\mathbf{e}_2 + \sigma_{32}\mathbf{e}_3 \quad (3.4)$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{e}_3) = \sigma_{13}\mathbf{e}_1 + \sigma_{23}\mathbf{e}_2 + \sigma_{33}\mathbf{e}_3 \quad (3.5)$$

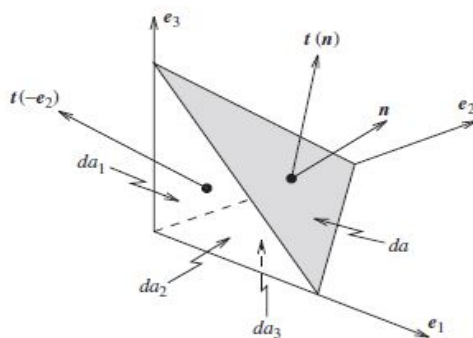


Slika 3.2: Komponente tenzora naprezanja [1]

Veza između vanjskog opterećenja \mathbf{t} , njegova smjera \mathbf{n} i komponenti σ_{ij} se može ostvariti ako se promatra translacijsko stanje ravnoteže elementarnog tetraedra prikazanog na slici 3.3. Ako je \mathbf{f} sila po jedinici volumena koja djeluje u točki p (koja također može uključivati i inercijske sile), ravnoteža tetraedra je

$$\mathbf{t}(\mathbf{n})da + \sum_{i=1}^3 \mathbf{t}(-\mathbf{e}_i)da_i + \mathbf{f}dv = 0 \quad (3.6)$$

gdje je $da_i = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_j)$ projekcija elementa površine da na ravninu okomitu na Kartezijev jedinični vektor \mathbf{e}_i .



Slika 3.3: Elementarni tetraedar [1]

Ako se jednačba 3.6 podijeli s da , te iskoriste jednačbe 3.2 i 3.3-3.5, uz napomenu da $dv/da \rightarrow 0$, dobije se

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\mathbf{n}) &= - \sum_{j=1}^3 \mathbf{t}(-\mathbf{e}_j) \frac{da_j}{da} - \mathbf{f} \frac{dv}{da} \\ &= \sum_{j=1}^2 \mathbf{t}(\mathbf{e}_j) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_j) \\ &= \sum_{j=1}^2 \sigma_{ij} (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{n}) \mathbf{e}_i \end{aligned} \quad (3.7)$$

$(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{n})\mathbf{e}_i$ se može zapisati u obliku tenzorskog produkta kao $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)\mathbf{n}$, te jednačba 3.7 poprima oblik

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \left[\sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \right] \mathbf{n} \quad (3.8)$$

gdje se prepoznaje tenzor $\boldsymbol{\sigma}$, poznat kao *Cauchy-ev tenzor naprezanja*, koji povezuje normalu \mathbf{n} s vektorom vanjskog opterećenja \mathbf{t}

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (3.9)$$

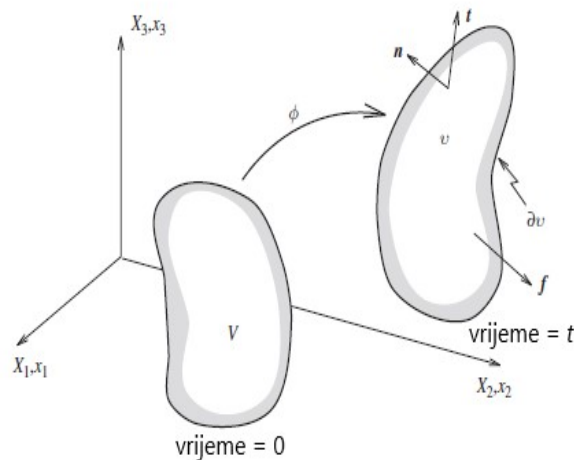
$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (3.10)$$

$\boldsymbol{\sigma}$ je prostorni tenzor koji se odnosi na prostornu konfiguraciju tijela dok je tijelo u deformiranom stanju.

3.2. Translacijsko stanje ravnoteže

Radi mogućnosti izvoda diferencijalne jednačbe ravnoteže, promatrati će se prostorna konfiguracija deformabilnog tijela s volumenom v i graničnom površinom ∂v (slika 3.4). Može se pretpostaviti da na tijelo djeluje sila \mathbf{f} po jedinici volumena i vanjsko opterećenje \mathbf{t} po granicama tijela. Radi jednostavnosti, zanemariti će se utjecaj inercijskih sila, te tada translacijska jednačba ravnoteže pokazuje da je zbroj svih sila koje djeluju na tijelo jednak nuli

$$\int_{\partial v} \mathbf{t} da + \int_v \mathbf{f} dv = 0 \quad (3.11)$$



Slika 3.4: Stanje ravnoteže [1]

Pozivajući se na jednačbu 3.9, jednačba 3.11 može se izraziti preko Cauchy-eva naprezanja

$$\int_{\partial v} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} da + \int_v \mathbf{f} dv = 0 \quad (3.12)$$

Koristeći Gauss-ov teorem, lijevi integralni izraz se zapisuje kao volumni integral

$$\int_v (\text{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}) dv = 0 \quad (3.13)$$

S obzirom da je jednačba 3.13 valjana za bilo koje proizvoljno zatvoreno tijelo, ostvari se diferencijalna

jednadžba translacijske ravnoteže

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 \quad (3.14)$$

Za slučaj gdje ravnoteža nije zadovoljena, jednadžba 3.14 predstavlja „van-ravnotežnu“ silu ili silu ostatka \mathbf{r} po jedinici volumena

$$\mathbf{r} = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} \quad (3.15)$$

3.3. Rotacijsko stanje ravnoteže

Poznata simetrija Cauchy-eva tenzora zasada nije uspostavljena. Uspostaviti će se pri razmatranju rotacijske ravnoteže tijela, pod utjecajem istih vanjskih i volumnih sila kao i kod translacijske ravnoteže. To pokazuje da je ukupni moment svih sila koje djeluju na tijelo oko neke proizvoljne točke (npr. ishodište) jednak nuli.

$$\int_{\partial v} \mathbf{x} \times \mathbf{t} da + \int_v \mathbf{x} \times \mathbf{f} dv = 0 \quad (3.16)$$

gdje vektorski umnožak sile s vektorom položaja predstavlja moment oko ishodišta. Vektor vanjskih sila \mathbf{t} se pomoću jednadžbe 3.9 izrazi preko Cauchy-eva tenzora naprezanja.

$$\int_{\partial v} \mathbf{x} \times (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) da + \int_v \mathbf{x} \times \mathbf{f} dv = 0 \quad (3.17)$$

Pomoću Gauss-ova teorema i algebre, dobije se izraz

$$\int_v \mathbf{x} \times (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}) dv + \int_v \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma}^T dv + \int_v \mathbf{x} \times \mathbf{f} dv = 0 \quad (3.18)$$

gdje je $\boldsymbol{\varepsilon}$ izmjenični tenzor trećeg reda ($\varepsilon_{ijk} = 1$ ako je $\{i, j, k\}$ permutacija parna, -1 ako je neparna i 0 ako se indeksi ponavljaju), vektor $\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma}^T$ je tada jednak

$$\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma}^T = \begin{bmatrix} \sigma_{32} - \sigma_{23} \\ \sigma_{13} - \sigma_{31} \\ \sigma_{21} - \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Ako se za jednadžbu 3.18 uzme u obzir translacijska ravnoteža (jednadžba 3.14) i činjenica da je jednadžba 3.18 valjana za bilo koje zatvoreno tijelo, dobije se

$$\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma}^T = 0 \quad (3.20)$$

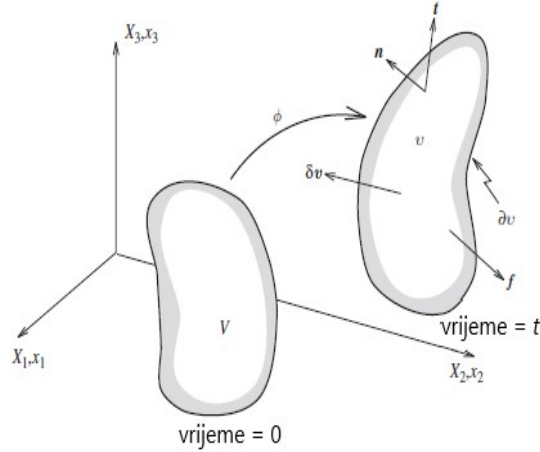
što u pogledu jednadžbe 3.19 predstavlja simetričnost Cauchy-evog tenzora naprezanja.

3.4. Princip virtualnog rada

Općenito, formulacija postupka konačnih elemenata se postiže primjenom slabe formulacije na razmatranu diferencijalnu jednadžbu. U kontekstu mehanike krutih tijela to uključuje jednadžbu virtualnog rada.

Neka $\delta \mathbf{v}$ definira proizvoljnu virtualnu brzinu iz trenutnog položaja tijela kako je prikazano na slici 3.5. Virtualni rad (VR) δw sile ostatka \mathbf{r} , u jedinici vremena po jedinici volumena, tijekom virtualnog gibanja je $\mathbf{r} \cdot \delta \mathbf{v}$, te je jednadžba ravnoteže tada

$$\delta w = \mathbf{r} \cdot \delta \mathbf{v} = 0 \quad (3.21)$$



Slika 3.5: Princip virtualnog rada [1]

Sada se može iskoristiti jednačbu 3.15 i integrirati po volumenu tijela, te tako uspostaviti slabu formulaciju statičke ravnoteže tijela

$$\delta W = \int_V (\text{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}) \cdot \delta \mathbf{v} dv = 0 \quad (3.22)$$

VR je funkcija preslikavanja $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}, t)$ između početnog i trenutnog položaja čestice i trebao bi se striktno pisati kao $\delta W(\Phi, \delta \mathbf{v})$. Lijevi podintegralni izraz u jednačbi 3.22, $\text{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{v}$ se može raspisati u obliku

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma} \delta \mathbf{v}) = (\text{div} \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \delta \mathbf{v} \quad (3.23)$$

Pomoću gornje jednačbe i Gauss-ova teorema, jednačba VR se može raspisati u obliku

$$\int_{\partial V} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \delta \mathbf{v} da - \int_V \boldsymbol{\sigma} : \nabla \delta \mathbf{v} dv + \int_V \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{v} dv = 0 \quad (3.24)$$

Gradijent $\delta \mathbf{v}$ je po definiciji virtualni gradijent brzine $\delta \mathbf{l}$. Pomoću jednačbe 3.9 za vektor vanjskog opterećenja \mathbf{t} i koristeći simetričnost $\boldsymbol{\sigma}$, izraz $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \delta \mathbf{v}$ se može zapisati kao $\delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}$, te jednačba 3.24 postaje

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{l} dv = \int_V \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{v} dv + \int_{\partial V} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{v} da \quad (3.25)$$

Konačno, izrazi li se virtualni gradijent brzine $\delta \mathbf{l}$ preko virtualnog simetričnog intenziteta deformacije $\delta \mathbf{d}$ i asimetričnog virtualnog spin tenzora $\delta \mathbf{w}$, te uzme li se u obzir simetrija $\boldsymbol{\sigma}$, uspostavi se prostorna jednačba VR

$$\delta W = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{d} dv - \int_V \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{v} dv - \int_{\partial V} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{v} da = 0 \quad (3.26)$$

Jednačba 3.26 osnovna je skalarna jednačba koja opisuje ravnotežu deformabilnog tijela i biti će osnova za diskretizaciju kod formulacije konačnih elemenata.

3.5. Konjugacija rada i alternativni prikazi naprezanja

Kirchhoff-ov tenzor naprezanja $\boldsymbol{\tau}$ je definiran kao

$$\boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma} \quad (3.27)$$

gdje je J determinanta tenzora gradijenta deformacije \mathbf{F} (jednačba 2.38).

Ako se jednačba VR 3.26 izrazi u materijalnoj konfiguraciji, unutarnji VR vektora naprezanja može se

izraziti preko Kirchhoff-ova tenzora naprezanja

$$\delta W_{int} = \int_V \boldsymbol{\tau} : \delta \mathbf{d} dV \quad (3.28)$$

Jednadžba 3.28 pokazuje da je Kirchhoff-ov tenzor naprezanja $\boldsymbol{\tau}$ radno konjugiran s tenzorom intenziteta deformacije \mathbf{d} , ako se radi o materijalnoj konfiguraciji tijela.

U jednadžbi 3.25 prvi dio jednadžbe odgovara unutarnjem VR, te uredi li se taj izraz pomoću jednadžbe 2.64 za \mathbf{l} i iskoristi simetrija $\boldsymbol{\sigma}$ zajedno s svojstvom operatora traga matrice, dobiti će se unutarnji VR naprezanja izražen preko prvog Piola-Kirchhoffova tenzora naprezanja \mathbf{P}

$$\delta W_{int} = \int_V (J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}) : \delta \dot{\mathbf{F}} dV \quad (3.29)$$

pri čemu se iz jednadžbe vidi da je prvi Piola-Kirchhoff-ov tenzor naprezanja \mathbf{P} jednak

$$\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad (3.30)$$

te je logično za zaključiti da je \mathbf{P} radno konjugiran s vremenskim intenzitetom promjene gradijenta deformacije $\dot{\mathbf{F}}$.

Sada će se uvesti pojam drugog Piola-Kirchhoff-ova tenzora naprezanja \mathbf{S} , koji će biti bitan kasnije u radu. Drugi Piola-Kirchhoff-ov tenzor naprezanja \mathbf{S} je jednak

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad (3.31)$$

Potrebno je izvesti deformaciju koja je radno konjugirana s drugim Piola-Kirchhoff-ovim tenzorom naprezanja. Pomoću jednadžbe 2.70, intenzitet promjene virtualnog tenzora deformacije $\delta \mathbf{d}$ se može izraziti preko tenzora virtualne materijalne promjene deformacije $\dot{\mathbf{E}}$

$$\delta \mathbf{d} = \mathbf{F}^{-T} \delta \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1} \quad (3.32)$$

Sada se jednadžba unutarnjeg VR naprezanja može zapisati

$$\delta W_{int} = \int_V \mathbf{S} : \delta \dot{\mathbf{E}} dV \quad (3.33)$$

iz čega se vidi da je \mathbf{S} radno konjugiran s $\dot{\mathbf{E}}$.

Materijalna jednadžba VR, izražena preko drugog Piola-Kirchhoff-ova tenzora naprezanja glasi

$$\int_V \mathbf{S} : \delta \dot{\mathbf{E}} dV = \int_V \mathbf{f}_0 \cdot \delta \mathbf{v} dV + \int_{\partial V} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{v} dA = 0 \quad (3.34)$$

4. HIPERELASTIČNOST

Materijali čije je temeljno ponašanje funkcija samo trenutnog stanja deformacije su poznati kao *elastični materijali*. To znači da je bilo koja vrsta napreznja u čestici \mathbf{X} , funkcija samo trenutnog gradijenta deformacije \mathbf{F} u toj čestici. Gradijent deformacije \mathbf{F} , zajedno sa svojim konjugiranim prvim Piola-Kirchhoff-ovim tenzorom napreznja \mathbf{P} će biti korišten da bi se izrazila veza između materijala. Tako da se elastičnost može definirati kao [1]

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{F}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) \quad (4.1)$$

U posebnom slučaju, kada je rad napreznja za vrijeme deformacije ovisan samo o početnom stanju u vremenu t_0 i konačnom stanju u t , tada se za takvo ponašanje materijala može reći da je neovisno o putu i da je materijal *hiperelastičan*.

Zbog neovisnosti rada o putu i radne konjugacije \mathbf{P} s intenzitetom promjene gradijenta deformacije $\dot{\mathbf{F}}$, funkcija *akumulirane energije deformacije* ili *elastični potencijal* Ψ po jedinici nedeformiranog volumena se može uspostaviti kao rad napreznja iz početnog do trenutnog položaja

$$\Psi(\mathbf{F}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) = \int_{t_0}^t \mathbf{P}(\mathbf{F}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) : \dot{\mathbf{F}} dt \quad (4.2)$$

$$\dot{\Psi} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \quad (4.3)$$

Radi bolje notacije, gornje jednačbe se mogu prikazati u kompaktnijem obliku

$$\mathbf{P}(\mathbf{F}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) = \frac{\partial \Psi(\mathbf{F}(\mathbf{X}), \mathbf{X})}{\partial \mathbf{F}} \quad (4.4)$$

Jednačbe 4.2-4.4 se koriste za definiciju hiperelastičnog materijala.

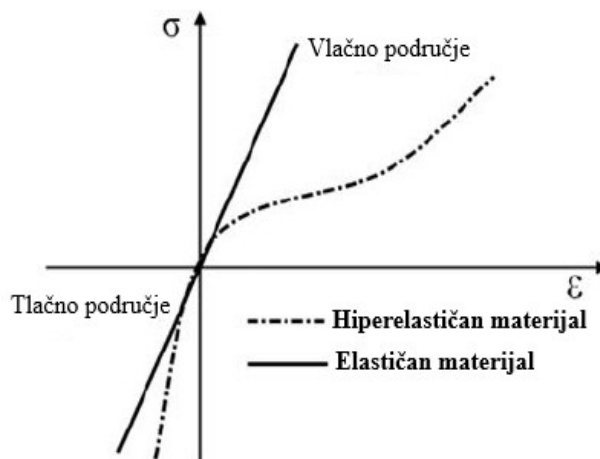
Ψ mora ostati nepromijenjen kada trenutna konfiguracija tijela rotira kao kruto tijelo. To pokazuje da Ψ ovisi o \mathbf{F} samo preko komponente rastezanja \mathbf{U} i da je neovisan o rotacijskoj komponenti \mathbf{R} . Zbog toga se Ψ najčešće definira kao funkcija $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$

$$\Psi(\mathbf{F}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) = \Psi(\mathbf{C}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) \quad (4.5)$$

Ranije se definiralo da je $\frac{1}{2}\dot{\mathbf{C}} = \dot{\mathbf{E}}$ radno konjugiran s drugim Piola-Kirchhoff-ovim tenzorom napreznja \mathbf{S} , što omogućuje da se Lagrange-ova konstitutivna jednačba zapiše kao

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} : \dot{\mathbf{C}} = \frac{1}{2} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{C}} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{C}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}} \quad (4.7)$$



Slika 4.1: Razlika između elastičnog i hiperelastičnog materijala [2]

4.1. Tenzor elastičnosti

Veza između \mathbf{S} i \mathbf{C} (ili $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$) u jednadžbi 4.6 će uvijek biti nelinearna. Da bi se mogao primijeniti N-R postupak, navedena veza se mora linearizirati u smjeru \mathbf{u} za trenutnu konfiguraciju. Potrebno je ostvariti linearnu vezu između usmjerene derivacije tenzora \mathbf{S} i linearizirane deformacije $D\mathbf{E}[\mathbf{u}]$, koja se može izraziti kao

$$D\mathbf{S}[\mathbf{u}] = \mathbf{C} : D\mathbf{E}[\mathbf{u}] \quad (4.8)$$

gdje je \mathbf{C} simetričan tenzor četvrtog reda poznat kao *Lagrange-ov (materijalni) elastični tenzor*, koji se može izraziti

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{4\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \quad (4.9)$$

Primjereno je da se izrazi prostorni ekvivalent jednadžbe 4.8. Lakši način za to je da se jednadžbu 4.8 derivira po vremenu i predstavi u obliku njenog intenziteta promjene u vremenu, te primjenom „push-forward“ operacije da se dobije odgovarajuća jednadžba. To se ostvari ako se linearizira \mathbf{S} i \mathbf{E} u smjeru \mathbf{v} umjesto u smjeru \mathbf{u} . Linearizacija tenzora \mathbf{S} i \mathbf{E} u smjeru \mathbf{v} je jednaka $D\mathbf{S}[\mathbf{v}] = \dot{\mathbf{S}}$ i $D\mathbf{E}[\mathbf{v}] = \dot{\mathbf{E}}$, te se tada može uspostaviti veza između njihovih vremenskih derivacija kao

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{C} : \dot{\mathbf{E}} \quad (4.10)$$

Sada je moguće prikazati prostorni ekvivalent materijalne linearizirane konstitutivne jednadžbe 4.10

$$\boldsymbol{\sigma}^o = \mathbf{c} : \mathbf{d} \quad (4.11)$$

gdje je \mathbf{c} *Euler-ov (prostorni) elastični tenzor*, definiran kao „push-forward“ operacija na tenzor \mathbf{C} .

4.2. Izotropna hiperelastičnost

Konstitutivne jednadžbe hiperelastičnosti koje su do sada spominjane su općenite i neograničene za primjenu. Sada će ih se pokušati ograničiti i upotrijebiti za slučajeve izotropnosti. To podrazumijeva da veza između Ψ i \mathbf{C} mora biti neovisna o materijalnim koordinatama i da Ψ mora biti isključivo funkcija invarijanti \mathbf{C}

$$\Psi(\mathbf{C}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) = \Psi(I_{\mathbf{C}}, II_{\mathbf{C}}, III_{\mathbf{C}}, \mathbf{X}) \quad (4.12)$$

pri čemu su invarijante \mathbf{C} definirane kao [11]

$$I_{\mathbf{C}} = \text{tr} \mathbf{C} = \mathbf{C} : \mathbf{I} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (4.13)$$

$$II_{\mathbf{C}} = \text{tr} \mathbf{C} \mathbf{C} = \mathbf{C} : \mathbf{C} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \quad (4.14)$$

$$III_{\mathbf{C}} = \det \mathbf{C} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = J^2 \quad (4.15)$$

gdje su $\lambda_1 = dl_1/dL_1$, $\lambda_2 = dl_2/dL_2$ i $\lambda_3 = dl_3/dL_3$ omjeri rastezanja između trenutne i početne duljine. Kao rezultat izotropskih ograničenja, drugi Piola-Kirchhoff-ov tenzor naprezanja se može raspisati iz jednadžbi 4.6 i 4.7

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_{\mathbf{C}}} \frac{\partial I_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} + 2 \frac{\partial \Psi}{\partial II_{\mathbf{C}}} \frac{\partial II_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} + 2 \frac{\partial \Psi}{\partial III_{\mathbf{C}}} \frac{\partial III_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} \quad (4.16)$$

Tenzori drugog reda, koji su dobiveni derivacijama invarijanti po \mathbf{C} mogu se izraziti kao

$$\frac{\partial I_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{I} \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial II_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} = 2\mathbf{C} \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial III_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} = J^2 \mathbf{C}^{-1} \quad (4.19)$$

Ako se derivacije invarijanti uvrste preko svojih komponenti u jednadžbu 4.16, tada se drugi Piola-Kirchhoff-ov tenzor naprezanja može zapisati u obliku

$$\mathbf{S} = 2\Psi_I \mathbf{I} + 2\Psi_{II} \mathbf{C} + 2J^2 \Psi_{III} \mathbf{C}^{-1} \quad (4.20)$$

gdje je $\Psi_I = \partial \Psi / \partial I_{\mathbf{C}}$, $\Psi_{II} = \partial \Psi / \partial II_{\mathbf{C}}$ i $\Psi_{III} = \partial \Psi / \partial III_{\mathbf{C}}$. Do sada su se izvedene jednadžbe za izotropnu hiperelastičnost odnosile na materijalni opis. Sljedeća stvar je izvod jednadžbe za prostorni ekvivalent izotropne hiperelastičnosti. U tu svrhu iskoristiti će se Cauchy-evo naprezanje koje se može direktno izraziti iz jednadžbe 3.31 za drugi Piola-Kirchhoff-ov tenzor naprezanja

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \quad (4.21)$$

Ako se \mathbf{S} iz jednadžbe 4.20 zamijeni s \mathbf{S} iz jednadžbe 4.21, te iskoristi izraz $\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$, dobije se

$$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \Psi_I \mathbf{b} + 4J^{-1} \Psi_{II} \mathbf{b}^2 + 2J \Psi_{III} \mathbf{I} \quad (4.22)$$

U ovoj jednadžbi Ψ_I, Ψ_{II} i Ψ_{III} su i dalje derivacije Ψ , samo po invarijantama \mathbf{b} ($I_{\mathbf{b}}, II_{\mathbf{b}}$ i $III_{\mathbf{b}}$) koje su jednake invarijantama \mathbf{C} .

4.3. Nestlačivi i približno nestlačivi materijali

Većina praktičnih procesa s velikim deformacijama se odvija pod nestlačivim ili približno nestlačivim uvjetima. Pojam „*približno nestlačiv*“ se koristi da opiše materijale koji su ustvari nestlačivi, ali njihova numerička analiza pokazuje malu mjeru volumetrijske deformacije.

4.3.1. Elastično nestlačivi materijali

Da se uspostave temeljne jednadžbe nestlačivog hiperelastičnog materijala, treba se vratiti na jednadžbe 4.6 i 4.7 i izraziti ih u obliku

$$\left(\frac{1}{2} \mathbf{S} - \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} \right) : \dot{\mathbf{C}} = 0 \quad (4.23)$$

U prijašnjim izrazima ove jednadžbe, \mathbf{C} je bio proizvoljan što znači da je ustvari $\mathbf{S} = 2\partial \Psi / \partial \mathbf{C}$. Za nestlačiv slučaj, nije jamčeno da će izraz u zagradama nestati pošto $\dot{\mathbf{C}}$ više nije proizvoljan. Također, kada je $J = 1$ kroz cijelu deformaciju te je $\dot{J} = 0$, pomoću jednadžbe 2.77 se dobije traženo ograničenje

za $\dot{\mathbf{C}}$

$$\frac{1}{2}J\mathbf{C}^{-1} : \dot{\mathbf{C}} = 0 \quad (4.24)$$

S obzirom da jednađba 4.23 mora biti zadovoljena za bilo koji $\dot{\mathbf{C}}$ koji zadovoljava ograničenje u jednađbi 4.24, dobije se

$$\frac{1}{2}J\mathbf{S} - \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{C}} = \gamma\frac{J}{2}\mathbf{C}^{-1} \quad (4.25)$$

gdje je γ nepoznata skalarna veličina, za koju će se kasnije pokazati da se podudara s hidrostatskim tlakom p i odrediti će se iz dodatne jednađbe za uvjet nestlačivosti $J = 1$. Iz jednađbe 4.25, općenita temeljna jednađba hiperelastičnosti se može zapisati kao

$$\mathbf{S} = 2\frac{\partial\Psi(\mathbf{C})}{\partial\mathbf{C}} + \gamma J\mathbf{C}^{-1} \quad (4.26)$$

Premda se radi o slučaju nestlačivosti gdje je $J = 1$, determinanta J u jednađbi se može činiti kao nepotrebna, međutim J je zadržan zato što je jednađba primjerena i za približno nestlačive slučajeve. Drugi Piola-Kirchhoff-ov tenzor se može rastaviti na devijatorsku i hidrostatsku komponentu kao $\mathbf{S} = \mathbf{S}' + pJ\mathbf{C}^{-1}$, čime se omogućuje da se parametar γ poveže s tlakom p

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{3}J^{-1}\mathbf{S} : \mathbf{C} \\ &= \frac{1}{3}J^{-1} \left[2\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{C}} + \gamma J\mathbf{C}^{-1} \right] : \mathbf{C} \\ &= \gamma + \frac{2}{3}J^{-1}\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{C}} : \mathbf{C} \end{aligned} \quad (4.27)$$

iz čega se jasno vidi da se γ i p podudaraju samo ako je

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{C}} : \mathbf{C} = 0 \quad (4.28)$$

4.3.2. Približno nestlačiv hiperelastičan materijal

Približna nestlačivost je alat pomoću koje se nestlačivost može primijeniti u kontekstu formulacije konačnih elemenata. To se olakšava ako se doda volumetrijska energetska komponenta $U(J)$ distorzijskoj komponenti $\hat{\Psi}$ čime se dobije funkcija ukupne energije deformacije $\Psi(\mathbf{C})$.

$$\Psi(\mathbf{C}) = \hat{\Psi}(\mathbf{C}) + U(J) \quad (4.29)$$

Jednostavan primjer volumetrijske funkcije $U(J)$ je dan jednađbom

$$U(J) = \frac{1}{2}\kappa(J-1)^2 \quad (4.30)$$

gdje je κ tzv. *kazneni broj* (eng. "penalty number") koji približno potiče nestlačivost. Uobičajeno se za ovu primjenu vrijednosti κ uzimaju u rasponu $10^3 - 10^4$. Također, κ može predstavljati svojstvo materijala kao što je modul stlačivosti (eng. *bulk modulus*), koji se upotrebljava za stlačive materijale koji imaju hiperelastičnu funkciju energije deformacije koja je definirana gornjim jednađbama. Drugi Piola-Kirchhoff-ov tenzor za materijal koji je definiran jednađbom 4.2 može se izraziti pomoću jednađbe

4.19

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} &= 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} \\
&= 2 \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \mathbf{C}} + 2 \frac{dU}{dJ} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \\
&= 2 \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \mathbf{C}} + p J \mathbf{C}^{-1}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

gdje je tlak jednak

$$p = \frac{dU}{dJ} \tag{4.32}$$

dok za slučaj gdje je $U(J)$ definiran jednadžbom 4.30, tlak je jednak

$$p = \kappa(J - 1) \tag{4.33}$$

Naposljetku, da se završi opisivanje ovakvog materijala potrebno je izvesti Lagrange-ov (materijalni) i prostorni elastični tenzor. Lagrange-ov tenzor se može rastaviti na tri komponente

$$\mathbf{C} = 4 \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} + 2p \frac{\partial (J \mathbf{C} U - 1)}{\partial \mathbf{C}} + 2J \mathbf{C}^{-1} \otimes \frac{\partial p}{\partial \mathbf{C}} \tag{4.34}$$

gdje se prva komponenta odnosi na devijatorsku komponentu tenzora $\hat{\mathbf{C}}$, a druga na tlačnu komponentu C_p . Posljednja komponenta C_κ predstavlja volumetrijsku tangentnu komponentu koja se dobije iz $U(J)$ i jednadžbe 4.19

$$C_\kappa = J^2 \frac{d^2 U}{dJ^2} (\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1}) \tag{4.35}$$

te ako je $U(J) = \kappa J^2 (J - 1)^2 / 2$, dobije se

$$C_\kappa = \kappa J^2 \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \tag{4.36}$$

Konačno, prostorni elastični tenzor se dobije standardnom „push-forward“ operacijom na materijalni tenzor, te se dobije

$$\mathbf{c} = \hat{\mathbf{c}} + c_p + c_\kappa \tag{4.37}$$

gdje je $\hat{\mathbf{c}}$ devijatorska komponenta, c_p tlačna komponenta i c_κ volumetrijska komponenta.

4.4. Modeli hiperelastičnih materijala

Sve navedene jednadžbe za hiperelastične materijale su relativno općenite i nije se uradio detaljniji opis nekog specifičnog modela materijala. U tu svrhu će se navesti neki osnovni i relativno poznatiji modeli koji opisuju hiperelastične materijale.

4.4.1. St. Venant-Kirchhoff-ov model

Jedan od jednostavnijih primjera hiperelastičnog materijala je St. Venant-Kirchhoff-ov model, čija je funkcija akumulirane energije deformacije Ψ dana jednadžbom

$$\Psi(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \lambda (\text{tr} \mathbf{E})^2 + \mu \mathbf{E} : \mathbf{E} \tag{4.38}$$

gdje su λ i μ koeficijenti materijala. Pomoću jednadžbe 4.7, drugi Piola-Kirchhoff-ov tenzor naprezanja se može izraziti

$$\mathbf{S} = \lambda (\text{tr} \mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E} \tag{4.39}$$

Koeficijenti Lagrange-ovog elastičnog tenzora se mogu izračunati pomoću jednadžbe

$$C_{IJKL} = \lambda \delta_{IJ} \delta_{KL} + \mu (\delta_{IK} \delta_{JL} + \delta_{IL} \delta_{JK}) \quad (4.40)$$

gdje je δ_{IJKL} *Kronecker-Delta operator* koji će kasnije biti detaljnije objašnjen. Zadnje dvije jednadžbe su analogne jednadžbama koje se koriste u teoriji elastičnosti, gdje je tenzor male deformacije zamijenjen s Green-ovim tenzorom. Ovaj model ima malu praktičnu primjenu van režima s malim deformacijama.

4.4.2. Stlačivi neo-Hook-ov model

Ovaj model materijala posjeduje karakteristike koje se mogu poistovjetiti s karakteristikama materijala korištenih u linearnoj elastičnoj analizi.

Funkcija akumulirane energije deformacije je dana s

$$\Psi(\mathbf{C}) = \frac{\mu}{2} (I_{\mathbf{C}} - 3) - \mu \ln J + \frac{\lambda}{2} (\ln J)^2 \quad (4.41)$$

gdje su λ i μ koeficijenti materijala (Lamé-ove konstante) i $J^2 = III_{\mathbf{C}}$. U slučaju odsustva deformacije kada je $\mathbf{C} = \mathbf{I}$, funkcija energije deformacije jednaka je nuli. Drugi Piola-Kirchhoff-ov tenzor naprezanja se može dobiti iz jednadžbe 4.20

$$\mathbf{S} = \mu(\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}) + \lambda(\ln J)\mathbf{C}^{-1} \quad (4.42)$$

Također, Cauchy-evo naprezanje može se dobiti iz jednadžbe 4.22, definirano pomoću lijevog Cauchy-Green-ovog tenzora \mathbf{b}

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mu}{J}(\mathbf{b} - \mathbf{I}) + \frac{\lambda}{J}(\ln J)\mathbf{I} \quad (4.43)$$

Lagrange-ov elastični tenzor za neo-Hook-ov model se može dobiti diferenciranjem jednadžbe 4.42 po komponentama \mathbf{C} tenzora

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + 2(\mu - \lambda \ln J)\mathbf{I} \quad (4.44)$$

gdje je \mathbf{I} tenzor četvrtog reda definiran kao $\mathbf{I} = -\partial \mathbf{C}^{-1} / \partial \mathbf{C}$. Euler-ov ili prostorni elastični tenzor se ostvari primjenom "push-forward" operacije na Lagrange-ov elastični tenzor u jednadžbi 4.44

$$c_{ijkl} = \lambda' \delta_{ij} \delta_{kl} + \lambda' (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (4.45)$$

gdje su efektivni koeficijenti λ' i μ' izraženi preko gradijenta deformacije \mathbf{F}

$$\lambda' = \frac{\lambda}{J}; \quad \mu' = \frac{\mu - \lambda \ln J}{J} \quad (4.46)$$

U slučaju kada je $J \approx 1$, posljedično je $\lambda' \approx \lambda$, $\mu' \approx \mu$, ostvari se standardni tenzor elastičnosti korišten u linearnoj elastičnoj analizi.

4.4.3. Nestlačivi neo-Hook-ov model

U slučaju nestlačivosti, neo-Hook-ov materijal definiran je s hiperelastičnim potencijalom

$$\Psi(\mathbf{C}) = \frac{1}{2} \mu (\text{tr} \mathbf{C} - 3) \quad (4.47)$$

Ekvivalentni homogeni (distorzijski) potencijal $\hat{\Psi}$ se dobije zamjenom \mathbf{C} s $\hat{\mathbf{C}}$

$$\hat{\Psi}(\mathbf{C}) = \frac{1}{2} \mu (\text{tr} \hat{\mathbf{C}} - 3) \quad (4.48)$$

Sada se pomoću jednadžbe 4.17 drugi Piola-Kirchhoff-ov tenzor naprezanja \mathbf{S} može zapisati u obliku

$$\mathbf{S} = \mu I_{\mathbf{C}}^{-1/3} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} I_{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1} \right) + p \mathbf{J} \mathbf{C} \mathbf{U} - \mathbf{1} \quad (4.49)$$

Odgovarajući Cauchy-ev tenzor naprezanja iz jednadžbe 3.31 je onda

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \\ &= \mu J^{-5/3} \mathbf{F} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} I_{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1} \right) \mathbf{F}^T + p \mathbf{F} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{F}^T \\ &= \boldsymbol{\sigma}' + p \mathbf{I}; \quad \boldsymbol{\sigma}' = \mu J^{-5/3} \left(\mathbf{b} - \frac{1}{3} I_{\mathbf{b}} \mathbf{I} \right) \end{aligned} \quad (4.50)$$

gdje vrijedi jednakost $I_{\mathbf{C}} = I_{\mathbf{b}}$.

Sada je moguće odrediti Lagrange-ov elastični tenzor iz jednadžbe 4.9

$$\mathbf{C} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} = \hat{\mathbf{C}} + C_p \quad (4.51)$$

gdje su devijatorska $\hat{\mathbf{C}}$ i tlačna C_p komponenta jednake

$$\hat{\mathbf{C}} = 2 \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}'}{\partial \mathbf{c}} = 4 \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{c}} \quad (4.52)$$

$$C_p = 2p \frac{\partial (\mathbf{J} \mathbf{C}^{-1})}{\partial \mathbf{C}} \quad (4.53)$$

Analognim postupkom kao do sada, prostorni elastični tenzor se dobije "push-forward" operacijom na materijalni elastični tenzor.

4.4.4. Mooney-Rivlin-ov model

Opći oblik funkcije akumulirane energije deformacije za nestlačive materijale, koji se opisuju Mooney-Rivlin modelom materijala je

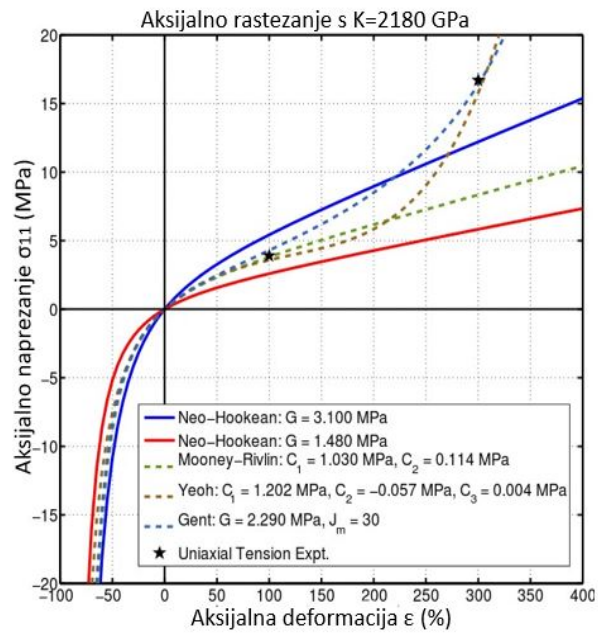
$$\Psi(\mathbf{C}) = \sum_{r,s \geq 0} \mu_{rs} (I_{\mathbf{C}} - 3)^r (II_{\mathbf{C}}^* - 3)^s \quad (4.54)$$

gdje je $II_{\mathbf{C}}^*$ druga invarijanta tenzora \mathbf{C} definirana kao

$$II_{\mathbf{C}}^* = \frac{1}{2} (I_{\mathbf{C}}^2 - II_{\mathbf{C}}); \quad II_{\mathbf{C}} = \mathbf{C} : \mathbf{C} \quad (4.55)$$

Najčešće korištena funkcija energije deformacije koja se ostvari iz jednadžbe 4.54 jest kada su koeficijenti μ_{01} i μ_{10} različiti od nule, te jednadžba tada poprima oblik

$$\Psi(\mathbf{C}) = \mu_{10} (I_{\mathbf{C}} - 3) + \frac{1}{2} \mu_{01} (I_{\mathbf{C}}^2 - II_{\mathbf{C}} - 6) \quad (4.56)$$



Slika 4.2: σ - ϵ dijagram pri aksijalnom opterećenju za različite modele hiperelastičnih materijala [3]

5. LINEARIZACIJA JEDNADŽBI RAVNOTEŽE

Virtualni rad koji se obradio u poglavlju 3.4 je nelinearan s obzirom na geometriju i materijal. S ciljem uspostave ravnoteže koristeći N-R iterativni postupak, važno je linearizirati jednadžbe ravnoteže pomoću usmjerene derivacije. Postoje dva pristupa, dok će se u radu upotrijebiti jedan od njih koji se sastoji od linearizacije jednadžbe virtualnog rada, zatim diskretizacije. Navedeni postupak je primjereniji za mehaniku kontinuuma krutih tijela, stoga će biti usvojen. [1]

5.1. Linearizacija i Newton-Raphson postupak

Princip virtualnog rada pomoću virtualne brzine je već uveden u poglavlju 3, te za prostornu konfiguraciju glasi

$$\delta W = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{d} dv - \int_V \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{v} dv + \int_{\partial V} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{v} da = 0 \quad (5.1)$$

ili alternativno, za materijalnu konfiguraciju

$$\int_V \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV = \int_V \mathbf{f}_0 \cdot \delta \mathbf{v} dV + \int_{\partial V} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{v} dA = 0 \quad (5.2)$$

Ako se pretpostavi da postoji neko probno rješenje Φ_k , bilo koja od gornjih jednadžbi mora biti linearizirana u smjeru inkrementa \mathbf{u} u položaju Φ_k

$$\delta W(\Phi_k, \delta \mathbf{v}) + D\delta W(\Phi_k, \delta \mathbf{v})[\mathbf{u}] = 0 \quad (5.3)$$

Stoga je važno naći usmjerenu derivaciju jednadžbe virtualnog rada u Φ_k u smjeru \mathbf{u} .

Usmjereni derivacija $D\delta W(\Phi_k, \delta \mathbf{v})[\mathbf{u}]$ predstavlja promjenu δW zbog promjene Φ_k u $\Phi_k + \mathbf{u}$. Iako $\delta \mathbf{v}$ ostaje konstantan tijekom te promjene, usmjerena derivacija mora predstavljati promjenu u unutarnjim silama zbog pomaka \mathbf{u} . To je upravo ono potrebno za N-R postupak, tj. da se prilagodi konfiguracija Φ_k tako da unutarnje sile budu u stanju ravnoteže s vanjskim silama. Stoga će usmjerena derivacija jednadžbe VR biti izvor za tangentnu matricu. Linearizacija jednadžbe ravnoteže će biti izražena preko komponenti VR, tj. unutarnjim i vanjskim VR

$$D\delta W(\Phi_k, \delta \mathbf{v})[\mathbf{u}] = D\delta W_{int}(\Phi_k, \delta \mathbf{v})[\mathbf{u}] + D\delta W_{ext}(\Phi_k, \delta \mathbf{v})[\mathbf{u}] \quad (5.4)$$

gdje je unutarnji virtualni rad jednak

$$\delta W_{int}(\Phi_k, \delta \mathbf{v}) = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{d} dv \quad (5.5)$$

a vanjski je

$$\delta W_{ext}(\Phi_k, \delta \mathbf{v}) = \int_V \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{v} dv + \int_{\partial V} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{v} da \quad (5.6)$$

5.2. Lagrange-ov linearizirani unutarnji virtualni rad

U ovom radu će se uglavnom upotrebljavati linearizirane jednadžbe ravnoteže u Euler-ovom obliku, ali također je prigodno prikazati linearizirane jednadžbe ravnoteže u Lagrange-ovim koordinatama. Razlog tome jest, jer inicijalni element volumena dV ostaje konstantan tijekom linearizacije. Naposljetku će se ta linearizacija pomoću „push-forward“ operacije prebaciti u prostornu konfiguraciju. Jednadžba

unutarnjeg VR u Lagrange-ovim koordinatama je dana u obliku

$$\delta W_{int}(\Phi, \delta \mathbf{v}) = \int_V \mathbf{S} : \delta \dot{\mathbf{E}} dV \quad (5.7)$$

Ako se iskoristi matematičko pravilo umnoška za usmjerenu derivaciju i definicija materijalnog elastičnog tenzora, usmjerena derivacija se dobije u obliku

$$\begin{aligned} D\delta W_{int}(\Phi, \delta \mathbf{v})[\mathbf{u}] &= \int_V D(\delta \dot{\mathbf{E}} : \mathbf{S})[\mathbf{u}] dV \\ &= \int_V \delta \dot{\mathbf{E}} : D\mathbf{S}[\mathbf{u}] dV + \int_V \mathbf{S} : D\delta \dot{\mathbf{E}}[\mathbf{u}] dV \\ &= \int_V \delta \dot{\mathbf{E}} : \mathbf{C} : D\mathbf{E}[\mathbf{u}] dV + \int_V \mathbf{S} : D\delta \dot{\mathbf{E}}[\mathbf{u}] dV \end{aligned} \quad (5.8)$$

gdje je $D\mathbf{E}[\mathbf{u}]$ dan jednadžbom 2.53. Izraz $D\delta \dot{\mathbf{E}}$ u drugom integralu proizlazi iz definicije da je $\delta \dot{\mathbf{E}}$ (kako je definirano u jednadžbi 2.68) funkcija i virtualne brzine $\delta \mathbf{v}$ i konfiguracije Φ

$$\delta \dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\delta \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \delta \dot{\mathbf{F}}) \quad (5.9)$$

$$\delta \dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} \quad (5.10)$$

Prije se definiralo da je $D\delta \dot{\mathbf{E}} = \nabla_0 \mathbf{u}$, čime se usmjerena derivacija gornje jednadžbe dobije kao

$$D\delta \dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}[(\nabla_0 \delta \mathbf{v})^T \nabla_0 \mathbf{u} + (\nabla_0 \mathbf{u})^T \nabla_0 \delta \mathbf{v}] \quad (5.11)$$

U jednadžbi 5.11 se primijeti da virtualna brzina nije funkcija konfiguracije Φ , te je izraz $\nabla_0 \delta \mathbf{v}$ konstantan.

Ako se jednadžbu 5.11 uvrsti u jednadžbu 5.8 i primijeni simetrija tenzora \mathbf{S} , Lagrange-ova jednadžba VR je tada

$$D\delta W_{int}(\Phi, \delta \mathbf{v})[\mathbf{u}] = \int_V \delta \dot{\mathbf{E}} : \mathbf{C} : D\mathbf{E}[\mathbf{u}] dV + \int_V \mathbf{S} : [(\nabla_0 \mathbf{u})^T \nabla_0 \delta \mathbf{v}] dV \quad (5.12)$$

Pomoću veze za usmjerenu derivaciju i vremensku derivaciju $\delta \dot{\mathbf{E}}$ se može izraziti kao $D\mathbf{E}[\delta \mathbf{v}]$, te se tada jednadžba 5.12 može zapisati u simetričnom obliku

$$D\delta W_{int}(\Phi, \delta \mathbf{v})[\mathbf{u}] = \int_V D\mathbf{E}[\delta \mathbf{v}] : \mathbf{C} : D\mathbf{E}[\mathbf{u}] dV + \int_V \mathbf{S} : [(\nabla_0 \mathbf{u})^T \nabla_0 \delta \mathbf{v}] dV \quad (5.13)$$

5.3. Euler-ov linearizirani unutarnji virtualni rad

Jednadžba 5.13 se može primijeniti za razvoj tangentne matrice krutosti, te je čak i primjerena za neke slučajeve. Međutim, mnogo je jednostavnije kad se za istu svrhu primijeni prostorni ekvivalent te jednadžbe.

Pomoću određenih transformacija, prvi integral iz jednadžbe 5.13 može se izraziti u prostornim okvirima

$$D\mathbf{E}[\delta \mathbf{v}] : \mathbf{C} : D\mathbf{E}[\mathbf{u}] dV = \delta \mathbf{d} : \mathbf{c} : \varepsilon d\mathbf{v} \quad (5.14)$$

Dodatno, gradijent po inicijalnim koordinatama u drugom integralu jednadžbe 5.13 se može povezati s prostornim gradijentom iz jednadžbe 2.51

$$\nabla_0 \mathbf{u} = (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{F} \quad (5.15)$$

$$\nabla_0 \delta \mathbf{v} = (\nabla \delta \mathbf{v}) \mathbf{F} \quad (5.16)$$

Ako se ovi izrazi uvedu u jednadžbu 5.13 i iskoristi jednadžba $\mathbf{J}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T$ za Cauchy-ovo i drugo Piola-Kirchhoff-ovo naprezanje, drugi integral jednadžbe 5.13 može se zapisati u obliku

$$\mathbf{S} : [(\nabla_0 \mathbf{u})^T (\nabla_0 \delta \mathbf{v})] dV = \boldsymbol{\sigma} : [(\nabla \mathbf{u})^T (\nabla \delta \mathbf{v})] dv \quad (5.17)$$

Konačno, pomoću jednadžbi 5.14 i 5.17, jednadžba 5.13 se može zapisati kao prostorna ili Euler-ova linearizirana jednadžba ravnoteže

$$D\delta W_{int}(\Phi, \delta \mathbf{v})[\mathbf{u}] = \int_v \delta \mathbf{d} : \mathbf{c} : \boldsymbol{\varepsilon} dv + \int_v \boldsymbol{\sigma} : [(\nabla \mathbf{u})^T (\nabla \delta \mathbf{v})] dv \quad (5.18)$$

Gore navedene jednadžbe će biti temelj za ostvarivanje tangentne matrice.

Funkcijska veza između $\delta \mathbf{d}$ i $\delta \mathbf{v}$ je identična onoj između $\boldsymbol{\varepsilon}$ i \mathbf{u} . Ova veza, zajedno s simetrijom \mathbf{c} i $\boldsymbol{\sigma}$ pokazati će da \mathbf{u} i $\delta \mathbf{v}$ mogu mijenjati mjesta u jednadžbi bez utjecaja na konačni rezultat jednadžbe. Stoga je linearizirani virtualni rad simetričan i za $\delta \mathbf{v}$ i za \mathbf{u} .

$$D\delta W_{int}(\Phi, \delta \mathbf{v})[\mathbf{u}] = D\delta W_{int}(\Phi, \mathbf{u})[\delta \mathbf{v}] \quad (5.19)$$

Simetrija u jednadžbi 5.19 će nakon diskretizacije dovesti do simetrične tangentne matrice krutosti.

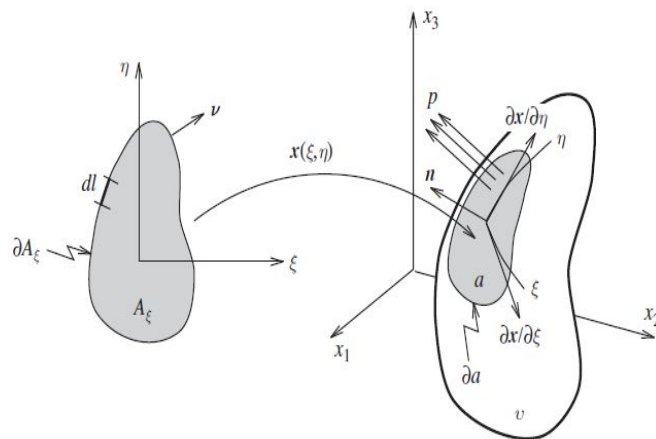
5.4. Linearizirani vanjski virtualni rad

Vanjski VR ima doprinos od volumnih sila \mathbf{f} i od vanjskih površinskih sila \mathbf{t} , čiji će se slučajevi razmatrati zasebno u ovom poglavlju. Najčešći primjer volumnih sila jest vlastita težina tijela, za koju vrijedi $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g}$ gdje je ρ trenutna gustoća tijela a \mathbf{g} gravitacijsko ubrzanje. U ovom slučaju, opterećenje nije ovisno o deformaciji i stoga odgovarajuća usmjerena derivacija nestaje. Uvrsti li se $\rho = \rho_0/J$ u jednadžbu 5.6, dobije se vanjski VR komponente volumnih sila

$$\delta W_{ext}^f(\Phi, \delta \mathbf{v}) = \int_v \frac{\rho_0}{J} \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{v} dv + \int_{\partial v} \rho_0 \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{v} da \quad (5.20)$$

U jednadžbi se jasno vidi da nijedan od izraza ne ovisi o geometriji, te je linearizacija prekomjerna, tako da je $W_{ext}^f(\Phi, \delta \mathbf{v}) = 0$.

Iako postoje razne vrste vanjskih opterećenja ovdje će se upotrijebiti samo jedno bitno vanjsko opterećenje, a to je jednoliko raspoređeno tlačno opterećenje. Slika 5.1 prikazuje neko tijelo na koje djeluje tlak p po površini a definiranom normalom \mathbf{n} .



Slika 5.1: Jednoliko tlačno opterećenje po površini tijela [1]

Vektor vanjskog opterećenja \mathbf{t} je tada jednak $p\mathbf{n}$ i odgovarajući VR je

$$\delta W_{ext}^p(\Phi, \delta\mathbf{v}) = \int_a p\mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{v} da \quad (5.21)$$

Dakle, bilo kakva promjena u geometriji rezultirati će u promjeni ravnoteže i izraza za krutost. Linearizacija će se izvršiti tako da se uzme proizvoljna parametrizaciju površine prikazane na slici 5.1, na način da se taj element površine a promatra kao jedan izoparametrični element. U okvirima ove parametrizacije, normala \mathbf{n} i element površine da se mogu dobiti preko tangentskih vektora $\partial\mathbf{x}/\partial\xi$ i $\partial\mathbf{x}/\partial\eta$

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi} \times \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\eta}}{\left| \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi} \times \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\eta} \right|} \quad (5.22)$$

$$da = \left| \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi} \times \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\eta} \right| d\xi d\eta \quad (5.23)$$

koji omogućuju da se integral iz jednadžbe 5.21 zapiše u obliku

$$\delta W_{ext}^p(\Phi, \delta\mathbf{v}) = \int_{A_\xi} p \delta\mathbf{v} \cdot \left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi} \times \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\eta} \right) d\xi d\eta \quad (5.24)$$

Jedini parametri u jednadžbi koji su ovisni o pomaku su $\partial\mathbf{x}/\partial\xi$ i $\partial\mathbf{x}/\partial\eta$, a oni se lineariziraju u $\partial\mathbf{u}/\partial\xi$ i $\partial\mathbf{u}/\partial\eta$. Stoga će se pomoću pravila umnoška i cikličke manipulacije trostrukog produkta u jednadžbi 5.24 dobiti

$$D\delta W_{ext}^p(\Phi, \delta\mathbf{v})[\mathbf{u}] = \int_{A_\xi} p \left[\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi} \cdot \left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\eta} \times \delta\mathbf{v} \right) - \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\eta} \cdot \left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\xi} \times \delta\mathbf{v} \right) \right] d\xi d\eta \quad (5.25)$$

Jednadžba 5.25 je asimetrična zbog toga što se \mathbf{u} i $\delta\mathbf{v}$ ne mogu zamijeniti za mjesta a da se rezultat ne promijeni. Diskretizacijom ove jednadžbe se onda dobije asimetrična tangentska matrica. Međutim, za poseban i čest slučaj gdje se položaj točaka diskretizacije duž granice ∂a fiksira, dobije se simetrična matrica nakon diskretizacije. Pomoću par integralnih teorema (Gauss-ov teorem), jednadžba 5.25 se može zapisati u obliku

$$D\delta W_{ext}^p(\Phi, \delta\mathbf{v})[\mathbf{u}] = \int_{A_\xi} p \left[\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi} \cdot \left(\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial\eta} \times \mathbf{u} \right) - \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\eta} \cdot \left(\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial\xi} \times \mathbf{u} \right) \right] d\xi d\eta \quad (5.26)$$

$$+ \oint_{A_\xi} p(\mathbf{u} \times \delta\mathbf{v}) \cdot \left(\mathbf{v}_\eta \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi} - \mathbf{v}_\xi \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\eta} \right) dl$$

gdje je $\mathbf{v} = [v_\xi, v_\eta]^T$ vektor u parametarskoj ravnini koji definira normalu na ∂A_ξ .

Ako se radi o zatvorenim granicama, simetričan izraz za $D\delta W_{ext}^p(\Phi, \delta\mathbf{v})$ se može dobiti tako da se doda pola jednadžbe 5.25 i pola jednadžbe 5.26, da se uspostavi

$$D\delta W_{ext}^p(\Phi, \delta\mathbf{v})[\mathbf{u}] = \frac{1}{2} \int_{A_\xi} p \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi} \cdot \left[\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\eta} \times \delta\mathbf{v} \right) + \left(\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial\eta} \times \mathbf{u} \right) \right] d\xi d\eta \quad (5.27)$$

$$- \frac{1}{2} \int_{A_\xi} p \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\eta} \cdot \left[\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\xi} \times \delta\mathbf{v} \right) + \left(\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial\xi} \times \mathbf{u} \right) \right] d\xi d\eta$$

Diskretizacijom ove jednadžbe dolazi se do simetrične tangentske matrice.

6. DISKRETIZACIJA

Diskretizacija jednadžbi ravnoteže uglavnom je standardan postupak kao i u ostalim literaturama. Jedino se priča zakomplicira kod izračuna napreznja koji ovise o kinematskim parametrima, koji su u funkciji gradijenta deformacije \mathbf{F} . U konačnici, nakon diskretizacije može se prijeći na N-R postupak rješavanja nelinearnih jednadžbi. [1]

6.1. Diskretizacija kinematike

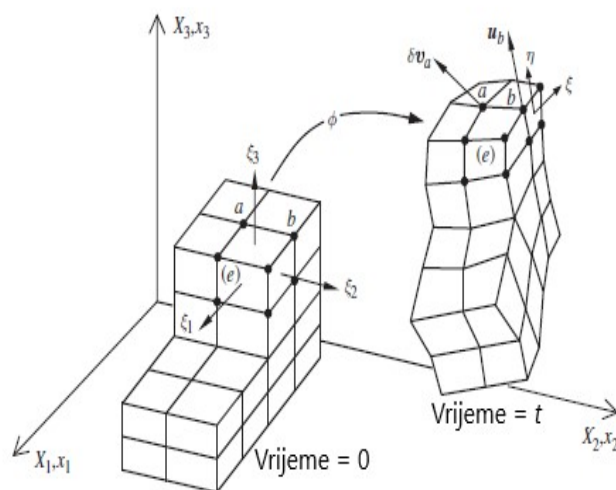
Diskretizacija se obavlja preslikavanjem inicijalne konfiguracije u izoparametrični element preko inicijalnih koordinata \mathbf{X}_a , koje definiraju čvorove elementa u početnoj konfiguraciji

$$\mathbf{X} = \sum_{a=1}^n N_a(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mathbf{X}_a \quad (6.1)$$

gdje su $N_a(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ standardne funkcije oblika po čvoru a , dok je n broj čvorova po elementu. Treba naglasiti da su čvorovi i konačni element tijekom gibanja trajno vezani s dodijeljenoj čestici konfiguracije.

Shodno tome, gibanje se prikazuje preko trenutnog položaja $\mathbf{x}_a(t)$ određenog čvora (slika 6.1)

$$\mathbf{x} = \sum_{a=1}^n N_a \mathbf{x}_a(t) \quad (6.2)$$



Slika 6.1: Diskretizacija [1]

Pomak \mathbf{u} slično se interpolira

$$\mathbf{u} = \sum_{a=1}^n N_a \mathbf{u}_a \quad (6.3)$$

Gradijent deformacije \mathbf{F} interpolira se na konačni element diferenciranjem jednadžbe 6.2 po inicijalnim koordinatama, iz čega se dobije

$$\mathbf{F} = \sum_{a=1}^n \mathbf{x}_a \otimes \nabla_0 N_a \quad (6.4)$$

gdje je

$$\nabla_0 N_a = \frac{\partial N_a}{\partial \mathbf{X}} = \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right)^{-T} \cdot \frac{\partial N_a}{\partial \boldsymbol{\xi}} \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \sum_{a=1}^n \mathbf{X}_a \otimes \nabla_{\boldsymbol{\xi}} N_a \quad (6.6)$$

ili u indeksnom zapisu, jednadžbe poprimaju oblik

$$F_{IJ} = \sum_{a=1}^n x_{a,i} \frac{\partial N_a}{\partial X_J} \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial X_I}{\partial \xi_{\alpha}} = \sum_{a=1}^n X_{a,I} \frac{\partial N_a}{\partial \xi_{\alpha}} \quad (6.8)$$

Analogno se odrede derivacije funkcija oblika N_a po trenutnim koordinatama \mathbf{x}

$$\frac{\partial N_a}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right)^{-T} \cdot \frac{\partial N_a}{\partial \boldsymbol{\xi}} \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \sum_{a=1}^n \mathbf{x}_a \otimes \nabla_{\boldsymbol{\xi}} N_a \quad (6.10)$$

U indeksnom zapisu izraz 6.10 glasi

$$\frac{\partial x_I}{\partial \xi_{\alpha}} = \sum_{a=1}^n x_{a,I} \frac{\partial N_a}{\partial \xi_{\alpha}} \quad (6.11)$$

6.2. Diskretizacija jednadžbi ravnoteže

6.2.1. Općeniti izvod jednadžbi

Za dobivanje diskretiziranih prostornih jednadžbi ravnoteže prvo se treba sjetiti jednadžbe VR sile ostatka \mathbf{r}

$$\delta W(\phi, \delta \mathbf{v}) = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{d} \, dv - \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{v} \, dv + \int_{\partial \mathcal{V}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{v} \, da \quad (6.12)$$

Za virtualnu brzinu će se razmatrati pojedina čvorna brzina $\delta \mathbf{v}_a$ koja se javlja u čvoru a elementa (e). Kada se $\delta \mathbf{v}$ i $\delta \mathbf{d}$ preslika u izoparametričnu domenu, dobije se

$$\delta W^e(\phi, N_a \delta \mathbf{v}_a) = \int_{\mathcal{V}^e} \boldsymbol{\sigma} : (\delta \mathbf{v}_a \otimes \nabla N_a) \, dv - \int_{\mathcal{V}^e} \mathbf{f} \cdot (N_a \delta \mathbf{v}_a) \, dv + \int_{\partial \mathcal{V}^e} \mathbf{t} \cdot (N_a \delta \mathbf{v}_a) \, da \quad (6.13)$$

Pomoću svojstva umnoška vektora $\boldsymbol{\sigma} : (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{v}$, za bilo koje vektore \mathbf{u} i \mathbf{v} , jednadžba 6.13 može se zapisati kao

$$\delta W^e(\phi, N_a \delta \mathbf{v}_a) = \delta \mathbf{v}_a \left(\int_{\mathcal{V}^e} \boldsymbol{\sigma} \nabla N_a \, dv - \int_{\mathcal{V}^e} N_a \mathbf{f} \, dv - \int_{\partial \mathcal{V}^e} N_a \mathbf{t} \, da \right) \quad (6.14)$$

Sada se VR po elementu (e) može izraziti preko unutarnjih i vanjskih ekvivalentnih čvornih sila, \mathbf{T}_a^e i \mathbf{F}_a^e

$$\delta W^e(\phi, N_a \delta \mathbf{v}_a) \delta \mathbf{v}_a \cdot (\mathbf{T}_a^e - \mathbf{F}_a^e) \quad (6.15)$$

gdje je unutarnja ekvivalentna čvorna sila jednaka

$$\mathbf{T}_a^e = \int_{v^e} \underline{\boldsymbol{\sigma}} \nabla N_a dv \quad (6.16)$$

ili u indeksnom zapisu

$$T_{a,i}^e = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \frac{\partial N_a}{\partial x_j} \quad (6.17)$$

Vanjska ekvivalentna čvorna sila je

$$\mathbf{F}_a^e = \int_{v^e} N_a \mathbf{f} dv + \int_{\partial v^e} N_a \mathbf{t} da \quad (6.18)$$

Jednadžba VR mora zadovoljavati bilo koju proizvoljnu čvornu brzinu. Tada diskretizirana jednadžba VR, izražena preko sile ostatka \mathbf{R}_a za bilo koji čvor izgleda

$$\mathbf{R}_a = \mathbf{T}_a - \mathbf{F}_a \quad (6.19)$$

Pošto su unutanje ekvivalentne sile \mathbf{F}_a nelinearne funkcije trenutnih položaja čvorova \mathbf{x}_a , te ako se vektor \mathbf{x} koji sadrži sve nepoznate koordinate čvorova zapiše kao

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T \quad (6.20)$$

dobije se skup nelinearnih jednadžbi ravnoteže

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0 \quad (6.21)$$

koje predstavljaju diskretizirane jednadžbe diferencijalne jednadžbe 3.15 u formulaciji konačnih elemenata.

6.2.2. Diskretizirane jednadžbe ravnoteže u matričnom obliku

Navedene jednadžbe u gornjem poglavlju će se izraziti u matrično-vektorskoj notaciji. U tu svrhu će se simetričnost tenzora naprezanja interpretirati kao vektor koji se sastoji od šest komponenti. Ovakav pristup je tzv. Voigt-ova notacija.

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, 1\sigma_{12}, 1\sigma_{13}, 1\sigma_{23}]^T \quad (6.22)$$

Tenzor intenziteta deformacije se također može prikazati kao

$$\mathbf{d} = [d_{11}, d_{22}, d_{33}, 2d_{12}, 2d_{13}, 2d_{23}]^T \quad (6.23)$$

gdje su vandijagonalni članovi udvostručeni tako da produkt $d^T \underline{\boldsymbol{\sigma}}$ daje ispravnu unutarnju energiju

$$\int_v \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dv = \int_v d^T \underline{\boldsymbol{\sigma}} dv \quad (6.24)$$

Vektor stope deformacije može se izraziti preko standardne matrice \mathbf{B} i čvornih brzina

$$\mathbf{d} = \sum_{a=1}^n \mathbf{B}_a \mathbf{v}_a \quad (6.25)$$

$$\mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_a}{\partial x_a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_a}{\partial x_3} \\ \frac{\partial N_a}{\partial x_2} & \frac{\partial N_a}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial N_a}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial N_a}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial N_a}{\partial x_3} & \frac{\partial N_a}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

Kada se izraz 6.25 uvede u izraz 3.22, tada se jednadžba VR unutarnjih sila može zapisati u obliku

$$\delta W_{int}(\phi, N_a \delta \mathbf{v}_a) = \int_{v^e} (\mathbf{B}_a \delta \mathbf{v}_a^T) \underline{\boldsymbol{\sigma}} dv \quad (6.27)$$

U konačnici se dobije izraz za ekvivalentnu unutarnju čvornu silu \mathbf{T}_a^e , za čvor a

$$\mathbf{T}_a^e = \int_{v^e} \mathbf{B}^T \underline{\boldsymbol{\sigma}} dv \quad (6.28)$$

Međutim, zbog pojave nula u matrici \mathbf{B} izraz 6.17 je prikladniji za računalnu implementaciju.

6.3. Diskretizacija lineariziranih jednadžbi ravnoteže

Jednadžba 6.21 predstavlja skup nelinearnih jednadžbi gdje je trenutni položaj čvora nepoznanica. Rješenje ovih jednadžbi ostvari se iterativnim N-R postupkom koji uključuje diskretizaciju lineariziranih jednadžbi ravnoteže iz poglavlja 5.1.

VR može se rastaviti na dva dijela, komponentu vanjskih i unutarnjih sila kao što je već spomenuto

$$\delta W(\phi, \delta \mathbf{v}) = \delta W_{int}(\phi, \delta \mathbf{v}) - \delta W_{ext}(\phi, \delta \mathbf{v}) \quad (6.29)$$

koje se lineariziraju u smjeru \mathbf{u}

$$D\delta W(\phi, \delta \mathbf{v})[\mathbf{u}] = D\delta W_{int}(\phi, \delta \mathbf{v})[\mathbf{u}] - D\delta W_{ext}(\phi, \delta \mathbf{v})[\mathbf{u}] \quad (6.30)$$

Linearizirana komponenta unutarnjeg VR može se podijeliti na konstitutivnu komponentu i komponentu inicijalnog naprezanja

$$\begin{aligned} D\delta W_{int}(\phi, \delta \mathbf{v})[\mathbf{u}] &= D\delta W_c(\phi, \delta \mathbf{v})[\mathbf{u}] + D\delta W_\sigma(\phi, \delta \mathbf{v})[\mathbf{u}] \\ &= \int_v \delta \mathbf{d} : \mathbf{c} : \boldsymbol{\varepsilon} dv + \int_v \boldsymbol{\sigma} : [(\nabla \mathbf{u})^T \nabla \delta \mathbf{v}] dv \end{aligned} \quad (6.31)$$

Povratkom na jednadžbu 6.15, očito je da ekvivalentne čvorne sile \mathbf{T}_a^e i \mathbf{F}_a^e doprinose ravnoteži čvora a . Ako se uoči da je \mathbf{F}_a^e ovisna o položaju, linearizacija jednadžbe 6.18 u smjeru $N_b \mathbf{u}_b$, pri čemu $N_a \delta \mathbf{v}_a$ ostaje konstantno, prikazuje promjenu ekvivalentnih čvornih sila \mathbf{T}_a^e i \mathbf{F}_a^e u čvoru a , zbog pomaka \mathbf{u}_b u trenutnom položaju čvora b

$$\begin{aligned} D\delta W^e(\phi, N_a \delta \mathbf{v}_a)[N_b \mathbf{u}_b] &= D(\delta \mathbf{v}_a \cdot (\mathbf{T}_a^e - \mathbf{F}_a^e))[N_b \mathbf{u}_b] \\ &= \delta \mathbf{v}_a \cdot D(\mathbf{T}_a^e - \mathbf{F}_a^e)[N_b \mathbf{u}_b] \\ &= \delta \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{K}_{ab}^e \mathbf{u}_b \end{aligned} \quad (6.32)$$

Veza među promjenama sila u čvoru a , zbog promjene trenutnog položaja čvora b je određena pomoću tangentne matrice krutosti \mathbf{K}_{ab}^e .

6.3.1. Konstitutivni član linearizirane jednadžbe ravnoteže

Konstitutivni član lineariziranog VR iz jednadžbe 6.31 za element (e), koji povezuje čvorove a i b je

$$\begin{aligned} D\delta W_c^e(\phi, N_a \delta \mathbf{v}_a)[N_b \mathbf{u}_b] &= \\ &= \int_{v^e} \frac{1}{2} (\delta \mathbf{v}_a \otimes \nabla N_a + \nabla N_a \otimes \delta \mathbf{v}_a) : \mathbf{c} : \frac{1}{2} (\mathbf{u}_b \otimes \nabla N_b + \nabla N_b \otimes \mathbf{u}_b) dv \end{aligned} \quad (6.33)$$

Prelaskom na indeksnu notaciju, gornja jednadžba može se zapisati u obliku

$$\begin{aligned} D\delta W_c^e(\phi, N_a \delta \mathbf{v}_a)[N_b \mathbf{u}_b] &= \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^3 \int_{v^e} \frac{1}{2} \left(\delta v_{a,i} \frac{\partial N_a}{\partial x_j} + \delta v_{a,j} \right) c_{ikjl} \frac{1}{2} \left(u_{b,k} \frac{\partial N_b}{\partial x_l} + u_{b,l} \frac{\partial N_b}{\partial x_k} \right) dv \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^3 \delta v_{a,i} \left(\int_{v^e} \frac{\partial N_a}{\partial x_j} c_{ikjl} \frac{\partial N_b}{\partial x_l} dv \right) u_{b,k} \\ &= \delta \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{K}_{c,ab}^e \mathbf{u}_b \end{aligned} \quad (6.34)$$

gdje je konstitutivna komponenta tangente matrice koja povezuje čvorove a i b u elementu (e)

$$[\mathbf{K}_{c,ab}]_{ij} = \int_{v^e} \sum_{k,l=1}^3 \frac{\partial N_a}{\partial x_k} c_{ikjl} \frac{\partial N_b}{\partial x_l} dv; \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (6.35)$$

pri čemu je c_{ikjl} Euler-ov prostorni elastični tenzor četvrtog reda koji sadrži svojstva materijala, kako je već objašnjeno u poglavlju 4.4.2. Za izotropan materijal jednak je $c_{ijkl} = \lambda' \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu' (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$, pri čemu δ operatori predstavljaju Kronecker-Delta operator koji je za 3D slučaj jedinična matrica \mathbf{I} dimenzija 3x3, dok je za 2D slučaj jedinična matrica \mathbf{I} dimenzija 2x2.

Za slučaj kada su čvorovi $a = b$, tada se radi o dijagonalnim članovima konstitutivne matrice $\mathbf{K}_{c,ab}^e$, a za $a \neq b$ radi se o vandijagonalnim članovima. Ovo vrijedi za sve ostale matrice koje su komponente tangente matrice krutosti \mathbf{K}^e .

Međutim, kao što se može vidjeti za Euler-ov tenzor c podindeksi i, j, k, l nisu u istom slijedu u jednadžbama 4.45 i 6.35. Da ne bi došlo do zabune, prvo se odrede podindeksi u jednadžbi 6.35, zatim kada se želi izračunati vrijednost c (jednadžba 4.45), tada podindeksi poprimaju vrijednosti onakve kakve su dobivene preko jednadžbe 6.35 te se odredi vrijednost pojedinog člana tenzora c . Odnosno, slijed vrijednosti podindeksa uvijek ostaje isti, samo oznake poprimaju drugačije vrijednosti ovisno o kontekstu jednadžbe.

Konstitutivni član linearizirane jednadžbe virtualnog rada 6.31 može se izraziti i u matricnoj notaciji ako se tenzor deformacije $\underline{\varepsilon}$ definira kao vektor u Voigt-ovoj notaciji, te izrazi analogno kao i vektor \mathbf{d} u jednadžbi 6.25

$$\underline{\varepsilon} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23}]^T. \quad (6.36)$$

$$\underline{\varepsilon} = \sum_{a=1}^n \mathbf{B}_a \mathbf{u}_a \quad (6.37)$$

Konstitutivni član se sada može zapisati u matricnoj notaciji kao

$$D\delta W_c(\phi, \delta \mathbf{v})[\mathbf{u}] = \int_v \delta \mathbf{d} : \mathbf{c} : \underline{\varepsilon} dv = \int_v \delta \mathbf{d}^T \mathbf{D} \underline{\varepsilon} dv \quad (6.38)$$

gdje je \mathbf{D} prostorna konstitutivna matrica koja se sastoji od komponenti tenzora c . Ako se ε i $\delta \mathbf{d}$ iz jednadžbe 6.38 zamijene s izrazima iz jednadžbi 6.25 i 6.37, dobije se izraz

$$\begin{aligned} D\delta_c(\phi, N_a \delta \mathbf{v})[N_b \mathbf{u}_b] &= \int_{v^e} (\mathbf{B}_a \delta \mathbf{v}_a)^T \mathbf{D}(\mathbf{B}_b \mathbf{u}_b) \\ &= \delta \mathbf{v}_a \cdot \left(\int_{v^e} \mathbf{B}_a^T \mathbf{D} \mathbf{B}_b dv \right) \mathbf{u}_b \end{aligned} \quad (6.39)$$

Izraz u zagradi definira konstitutivni član tangentne matrice krutosti koja povezuje čvorove a i b u elementu (e).

$$\mathbf{K}_{c,ab}^e = \int_{v^e} \mathbf{B}_a^T \mathbf{D} \mathbf{B}_b dv \quad (6.40)$$

6.3.2. Član inicijalnog naprezanja linearizirane jednadžbe ravnoteže

Drugi izraz u jednadžbi 6.31, gradijente članova $\delta \mathbf{v}$ i \mathbf{u} može se preslikati u izoparametričnu domenu (kao u jednadžbi 6.3)

$$\nabla \delta \mathbf{v} = \sum_{a=1}^3 \delta \mathbf{v}_a \otimes \nabla N_a \quad (6.41)$$

$$\nabla \mathbf{u} = \sum_{b=1}^3 \mathbf{u}_b \otimes \nabla N_b \quad (6.42)$$

Uvrste li se gornji izrazi u desni dio jednadžbe 6.31 i iskoristi svojstvo $\boldsymbol{\sigma} : (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{v}$, tada se član linearizirane jednadžbe VR koji predstavlja inicijalno naprezanje može zapisati u obliku

$$\begin{aligned} D\delta_\sigma(\phi, N_a \delta \mathbf{v}_a)[N_b \mathbf{u}_b] &= \int_{v^e} \boldsymbol{\sigma} : [(\nabla \mathbf{u}_b)^T \nabla \delta \mathbf{v}_a] dv \\ &= \int_{v^e} \boldsymbol{\sigma} : [(\delta \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{u}_b) \nabla N_b \otimes \nabla N_a] dv \\ &= (\delta \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{u}_b) \int_{v^e} \nabla N_a \cdot \boldsymbol{\sigma} \nabla N_b dv \end{aligned} \quad (6.43)$$

Integral u gornjoj jednadžbi je skalar a umnožak $\delta \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{u}_b$ jest $\delta \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{I} \mathbf{u}_b$, te se tada gornji izraz može zapisati u matičnom obliku

$$D\delta W_\sigma(\phi, N_a \delta \mathbf{v}_a)[N_b \mathbf{u}_b] = \delta \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{K}_{\sigma,ab}^e \mathbf{u}_b \quad (6.44)$$

gdje su komponente *matrice inicijalnog naprezanja* $\mathbf{K}_{\sigma,ab}^e$

$$\mathbf{K}_{\sigma,ab}^e = \int_{v^e} (\nabla N_a \cdot \boldsymbol{\sigma} \nabla N_b) \mathbf{I} dv \quad (6.45)$$

ili u indeksnom zapisu

$$[\mathbf{K}_{\sigma,ab}^e]_{ij} = \int_{v^e} \sum_{k,l=1}^3 \frac{\partial N_a}{\partial x_k} \sigma_{kl} \frac{\partial N_b}{\partial x_l} \delta_{ij} dv \quad (6.46)$$

6.3.3. Član vanjske sile linearizirane jednadžbe ravnoteže

Volumenske sile su neovisne o gibanju te stoga ne doprinose lineariziranoj jednadžbi VR. Međutim, za opterećenje tlaka u smjeru normale na nekoj zatvorenoj površini, linearizirana jednadžba VR je dana izrazom

$$\begin{aligned} D\delta W_{ext}^p(\Phi, \delta \mathbf{v})[\mathbf{u}] &= \frac{1}{2} \int_{A_\xi} p \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \left[\left(\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \eta} \times \mathbf{u} \right) - \left(\delta \mathbf{v} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} \right) \right] d\xi d\eta \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{A_\xi} p \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \left[\left(\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \xi} \times \mathbf{u} \right) - \left(\delta \mathbf{v} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \right) \right] d\xi d\eta \end{aligned} \quad (6.47)$$

Odgovarajuće površinsko preslikavanje u izoparametričnu ravninu je

$$\mathbf{x}(\xi, \eta) = \sum_{a=1}^n N_a \mathbf{x}_a \quad (6.48)$$

Kada se uvrsti ravninsko preslikavanja u jednačbu 6.47, jednačba lineariziranog VR vanjskih sila poprima oblik

$$\begin{aligned} D\delta W_{ext}^{p,e}(\phi, N_a \delta \mathbf{v}_a)[N_b \mathbf{u}_b] &= \\ &= (\delta \mathbf{v}_a \times \mathbf{u}_b) \cdot \frac{1}{2} \int_{A_\xi} p \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \left(\frac{\partial N_a}{\partial \eta} N_b - \frac{\partial N_b}{\partial \eta} N_a \right) d\xi d\eta \\ &- (\delta \mathbf{v}_a \times \mathbf{u}_b) \cdot \frac{1}{2} \int_{A_\xi} p \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \left(\frac{\partial N_a}{\partial \xi} N_b - \frac{\partial N_b}{\partial \xi} N_a \right) d\xi d\eta \\ &= (\delta \mathbf{v}_a \times \mathbf{u}_b) \cdot \mathbf{k}_{p,ab} \end{aligned} \quad (6.49)$$

gdje je vektor koeficijenata krutosti $\mathbf{k}_{p,ab}$ jednak

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{p,ab} &= \frac{1}{2} \int_{A_\xi} p \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \left(\frac{\partial N_a}{\partial \eta} N_b - \frac{\partial N_b}{\partial \eta} N_a \right) d\xi d\eta \\ &- \frac{1}{2} \int_{A_\xi} p \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \left(\frac{\partial N_a}{\partial \xi} N_b - \frac{\partial N_b}{\partial \xi} N_a \right) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (6.50)$$

Jednačba 6.49 se sada može interpretirati kao

$$D\delta W_{ext}^{p,e}(\phi, N_a \delta \mathbf{v}_a)[N_b \mathbf{u}_b] = \delta \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{K}_{p,ab}^e \mathbf{u}_b \quad (6.51)$$

Član vanjskog tlaka tangentne matrice je

$$\mathbf{K}_{p,ab}^e = \varepsilon \mathbf{k}_{p,ab}^e; \quad [\mathbf{K}_{p,ab}^e]_{ij} = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} [\mathbf{k}_{p,ab}^e]_k; \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (6.52)$$

gdje je ε izmjenični tenzor trećeg reda, spomenut u poglavlju 3.3.

6.4. Tangentna matrica krutosti

Linearizirani VR iz jednačbe 6.29 se sada može diskretizirati za element (e) koji povezuje čvorove a i b pod pojmom ukupne matrice krutosti \mathbf{K}_{ab} koja objedinju sve linearizirane jednačbe pojedinih komponenti (jednačbe 6.35, 6.46 i 6.52).

$$D\delta W^e(\phi, N_a \delta \mathbf{v}_a)[N_b \mathbf{u}_b] = \delta \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{K}_{ab}^e \mathbf{u}_b \quad (6.53)$$

$$\mathbf{K}_{ab}^e = \mathbf{K}_{c,ab}^e + \mathbf{K}_{\sigma,ab}^e + \mathbf{K}_{\kappa,ab}^e - \mathbf{K}_{p,ab}^e \quad (6.54)$$

gdje je $\mathbf{K}_{\kappa,ab}^e$ dilatacijska komponenta tangente krutosti koja opisuje utjecaj promjene volumena v na krutost.

Komponente $\mathbf{K}_{\kappa,ab}^e$ i $\mathbf{K}_{p,ab}^e$ su uključene u tangentnu matricu krutosti \mathbf{K}_{ab}^e ako se radi o materijalu koji ima promjenu volumena, odnosno ako je opterećen vanjskim tlakom po linijskom KE. Standardna procedura u metodi konačnih elemenata jest da se izrazi vektor ukupne virtualne brzine $\delta \mathbf{v}^T$ s odgovarajućim čvornim pomacima $\mathbf{u}^T = [u_1^T, u_2^T, \dots, u_N^T]$ i ukupna tangentna matrica krutosti \mathbf{K} , pri čemu se uspostavi

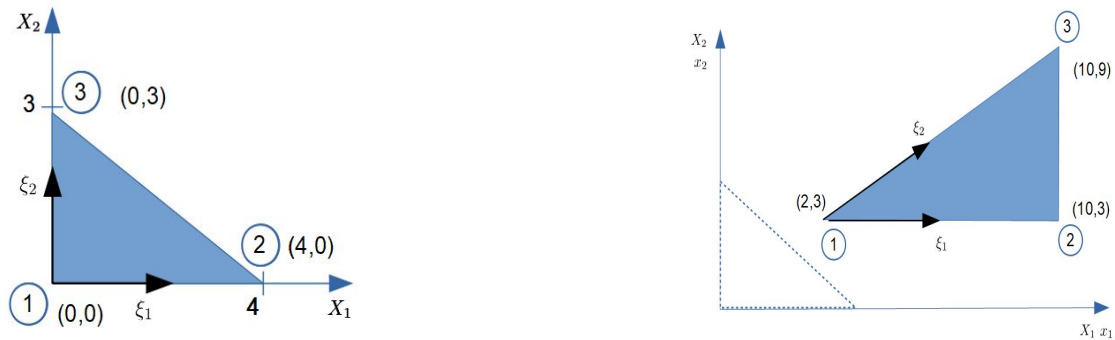
$$D\delta W(\phi, \delta \mathbf{v})[\mathbf{u}] = \delta \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (6.55)$$

gdje je matrica krutosti \mathbf{K} sastavljena od čvornih komponenti krutosti.

6.5. Primjer diskretiziranog trokutastog konačnog elementa

U ovom poglavlju bit će primijenjeni svi postupci koji su definirani u poglavlju 6. Na primjeru 2D trokutastog konačnog elementa primijeniti će se diskretizacija i linearizacija jednadžbi ravnoteže, izračun osnovnih kinematskih veličina te postupak određivanja pojedinih članova globalne matrice krutosti, čime će su u konačnici dobiti potpuno definiran KE za upotrebu u kontekstu hiperelastičnosti.

6.5.1. Diskretizacija i diskretizirane kinematičke veličine



Slika 6.2: Početna (lijevo) i konačna (desno) konfiguracija

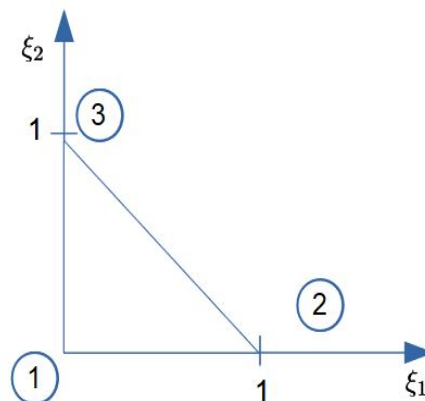
Na slici 6.2 vidi se trokutasti KE s tri čvora u početnoj i konačnoj konfiguraciji. Konačna konfiguracija podrazumijeva položaj čvorova KE nakon deformacije.

Početne koordinate \mathbf{X} i konačne koordinate \mathbf{x} čvorova n dane su u tablici ispod

Tablica 6.1: Početne i konačne koordinate

| n | X_1 | X_2 | x_1 | x_2 |
|-----|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 0 | 0 | 2 | 3 |
| 2 | 4 | 0 | 10 | 3 |
| 3 | 0 | 3 | 10 | 9 |

Sljedeći korak određivanje je funkcije oblika N_a za čvorove KE. Funkcije oblika biti će definirane u izoparametričnoj ravnini ξ_1 i ξ_2 , te je potrebno preslikati KE u izoparametričnu domenu (slika 6.3).



Slika 6.3: Domena preslikanog KE

Za preslikani element, funkcije oblika su

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \xi_1 - \xi_2 \\ N_2 &= \xi_1 \\ N_3 &= \xi_2 \end{aligned} \tag{6.56}$$

Derivacije funkcije oblika po izoparametričnim koordinatama glase

$$\frac{\partial N_1}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial N_2}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_2}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial N_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial N_3}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial N_3}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

Sada će se pomoću jednadžbi 6.1 i 6.2 preslikati konačni element u izoparametričnu domenu:

a) za početnu konfiguraciju

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 \cdot N_1 + \mathbf{X}_2 \cdot N_2 + \mathbf{X}_3 \cdot N_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot N_1 + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot N_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot N_3$$

$$X_1 = 4N_2 = 4\xi_1$$

$$X_2 = 3N_3 = 3\xi_2$$

b) za konačnu konfiguraciju

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 \cdot N_1 + \mathbf{x}_2 \cdot N_2 + \mathbf{x}_3 \cdot N_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot N_1 + \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot N_2 + \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \end{bmatrix} \cdot N_3$$

$$x_1 = 2N_1 + 10N_2 + 10N_3 = 2 + 8\xi_1 + 8\xi_2$$

$$x_2 = 3N_1 + 3N_2 + 9N_3 = 3 + 6\xi_2$$

Pomoću jednadžbe 6.8 odrede se derivacije preslikanih početnih koordinata po izoparametričnim koordinatama.

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial X_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial X_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial X_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

S matricom derivacija preslikanih početnih koordinata po izoparametričnim koordinatama, lako se odredi njen inverz

$$\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right)^{-T} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Pomoću jednadžbe 6.5 odrede se derivacije funkcija oblika po početnim koordinatama

$$\frac{\partial N_1}{\partial \mathbf{X}} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \mathbf{X}} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \mathbf{X}} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Za konačne koordinate, analognim postupkom pomoću jednadžbe 6.11 odrede se derivacije po izoparametričnim koordinatama

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

a inverz matrice derivacija preslikanih konačnih koordinata po izoparametričnim koordinatama

$$\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi}\right)^{-T} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Jednadžbom 6.9 izračunaju se derivacije funkcija oblika po konačnim koordinatama, analogno kao i derivacije po početnim koordinatama

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial N_2}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \\ \frac{\partial N_3}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

S određenim svim potrebnim derivacijama, može se odrediti gradijent deformacije \mathbf{F} . Kada se jednadžba 6.7 dodatno raspiše, dobije se

$$F_{ij} = \sum_{a=1}^n x_{a,i} \frac{\partial N_a}{\partial X_j} = x_{1,i} \frac{\partial N_1}{\partial X_j} + x_{2,i} \frac{\partial N_2}{\partial X_j} + x_{3,i} \frac{\partial N_3}{\partial X_j} \quad (6.57)$$

Tenzor gradijenta deformacije \mathbf{F} za 2D trokutasti KE je

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} x_{1,1} \frac{\partial N_1}{\partial X_1} + x_{2,1} \frac{\partial N_2}{\partial X_1} + x_{3,1} \frac{\partial N_3}{\partial X_1} & x_{1,1} \frac{\partial N_1}{\partial X_2} + x_{2,1} \frac{\partial N_2}{\partial X_2} + x_{3,1} \frac{\partial N_3}{\partial X_2} \\ x_{1,2} \frac{\partial N_1}{\partial X_1} + x_{2,2} \frac{\partial N_2}{\partial X_1} + x_{3,2} \frac{\partial N_3}{\partial X_1} & x_{1,2} \frac{\partial N_1}{\partial X_2} + x_{2,2} \frac{\partial N_2}{\partial X_2} + x_{3,2} \frac{\partial N_3}{\partial X_2} \end{bmatrix} \quad (6.58)$$

Kada se uvrste gornje dobivene vrijednosti, gradijent deformacije \mathbf{F} iznosi

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -2 \cdot \frac{1}{4} + 10 \cdot \frac{1}{4} + 10 \cdot 0 & -2 \cdot \frac{1}{3} + 10 \cdot 0 + 10 \cdot \frac{1}{3} \\ -3 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 9 \cdot 0 & -3 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot 0 + 9 \cdot \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{8}{3} \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Sada kada je izračunat \mathbf{F} , može se trivijalno izračunati Cauchy-Green-ov lijevi i desni tenzor deformacije

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 4 & \frac{16}{3} \\ \frac{16}{3} & \frac{100}{9} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} \frac{100}{9} & \frac{16}{3} \\ \frac{16}{3} & 4 \end{bmatrix};$$

te Jakobijan J

$$J = \det \mathbf{F} = 2 \cdot 2 - 0 \cdot \frac{8}{3} = 4$$

6.5.2. Ekvivalente čvorne sile

Nadalje će se pokazati kako se izračunavaju ekvivalentne čvorne sile. Za taj izračun će se razmatrati stlačivi neo-Hook-ov materijal, proizvoljnih vrijednosti Lamé-ovih konstanti $\mu = 3$ i $\lambda = 2$ iz čega se odredi Cauchy-ev tenzor naprezanja za ravninsko stanje deformacije

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \frac{\mu}{J} (\mathbf{b} - \mathbf{I}) + \frac{\lambda}{J} (\ln(J)) \approx \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}$$

pri čemo su konačni rezultati naprezanja zaokruženi na najbližu cijelu vrijednost (radi jednostavnosti). Sada se pomoću izraza 6.17 odrede unutarnje ekvivalentne čvorne sile:

npr., za čvor 1, u smjeru x_1 i x_2

$$T_{1,1} = \int_{v^e} \left(\sigma_{11} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \sigma_{12} \frac{\partial N_1}{\partial x_2} \right) dv = \left(8 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) + 4 \cdot 0 \right) \cdot A_{xy} \cdot t = -1 \cdot 24t = -24t$$

$$T_{1,2} = \int_{v^e} \left(\sigma_{21} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \sigma_{22} \frac{\partial N_1}{\partial x_2} \right) dv = \left(4 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) + 3 \cdot 0 \right) \cdot A_{xy} \cdot t = -\frac{1}{2} \cdot 24t = -12t$$

te radi raznolikosti, npr. za čvor 3 u smjeru x_2

$$T_{3,2} = \int_{v^e} \left(\sigma_{21} \frac{\partial N_3}{\partial x_1} + \sigma_{22} \frac{\partial N_3}{\partial x_2} \right) dv = \left(4 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{1}{6} \right) \cdot A_{xy} \cdot t = \frac{1}{2} \cdot 24t = 12t$$

Integral po volumenu izračunat je kao konstanta koja je

$$\int_{v^e} dv = A_{xy} \cdot t = 24t$$

gdje je A_{xy} površina KE u konačnoj konfiguraciji a t debljina konačnog elemenata. Analogno, za ostale čvorove dobiju se vrijednosti

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} -24t \\ -12t \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 8t \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 16t \\ 12t \end{bmatrix};$$

Iz svih dobivenih ekvivalentnih unutarnjih čvornih sila može se zaključiti da su sve sile u ravnoteži.

6.5.3. Komponente tangentne matrice krutosti \mathbf{K}

Nakon izračuna bitnih kinematskih parametara i ekvivalentnih čvornih sila, slijedi izračun tangentne matrice krutosti (jednadžba 6.54).

U ovom primjeru će se prikazati kako se dobiju konstitutivna $\mathbf{K}_{c,ab}^e$ komponenta i komponenta inicijalnog naprezanja $\mathbf{K}_{\sigma,ab}^e$, jer se u većini slučajeva javljaju kao komponente tangente matrice krutosti \mathbf{K}_{ab}^e . Dilatacijska komponenta $\mathbf{K}_{\kappa,ab}^e$ i komponenta vanjskog tlačnog opterećenja $\mathbf{K}_{p,ab}^e$ će se zanemariti.

Prvo će se izračunati konstitutivna matrica krutosti $\mathbf{K}_{c,ab}^e$ pomoću jednadžbe 6.35. U ovom primjeru će se malo detaljnije opisati Euler-ov elastični tenzor c_{ijkl} i postupak određivanja njegovih komponenti. Za Voigt-ovu notaciju u obliku $11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 33 \rightarrow 3, 23 \rightarrow 4, 13 \rightarrow 5$, tenzor je u obliku

$$c_{ijkl} = \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1123} & c_{1131} & c_{1112} \\ & c_{2222} & c_{2233} & c_{2223} & c_{2231} & c_{2212} \\ & & c_{3333} & c_{3321} & c_{3331} & c_{3312} \\ & & & c_{2323} & c_{2331} & c_{2312} \\ & & & & c_{3131} & c_{3112} \\ sim. & & & & & c_{1212} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ & & & & c_{55} & c_{56} \\ sim. & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \quad (6.59)$$

Sljedeći korak je pomoću jednadžbe 6.35 pokazati kako se dobiju pojedini elementi konstitutivne matrice tangentne krutosti za dani KE. Za početak će se uzeti članovi matrice koji povezuju čvorove 2 i 3. Generalna jednadžba za takav slučaj glasi

$$[\mathbf{K}_{c,23}]_{ij} = \left(\sum_{k,l=1}^2 \frac{\partial N_2}{\partial x_k} c_{ikjl} \frac{\partial N_3}{\partial x_l} \right) 24t; \quad i, j = 1, 2.$$

Npr. za $i, j = 1$, što se odnosi na aksijalni pomak u smjeru x_1 , član matrice krutosti je

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_{c,23}]_{11} &= \left(\sum_{k,l=1}^2 \frac{\partial N_2}{\partial x_k} c_{1kl} \frac{\partial N_3}{\partial x_l} \right) 24t = \\ &= \left(\frac{\partial N_2}{\partial x_1} c_{1111} \frac{\partial N_3}{\partial x_1} + \frac{\partial N_2}{\partial x_2} c_{1211} \frac{\partial N_3}{\partial x_1} + \frac{\partial N_2}{\partial x_1} c_{1112} \frac{\partial N_3}{\partial x_2} + \frac{\partial N_2}{\partial x_2} c_{1212} \frac{\partial N_3}{\partial x_2} \right) 24t \end{aligned}$$

Kada se uvrste vrijednosti derivacija funkcija oblika N_a po konačnim koordinatama \mathbf{x} , dobije se

$$[\mathbf{K}_{c,23}]_{11} = \left[\frac{1}{8} c_{1112} \frac{1}{6} - \frac{1}{6} c_{1212} \frac{1}{6} \right] 24t$$

Vrijednosti Euler-ovog elastičnog tenzora c_{ijkl} dobiju se iz jednadžbe 4.45. Kronecker-Delta operatori u jednadžbi, za ovaj 2D slučaj, biti će jedinične matrice \mathbf{I} dimenzija 2×2 za bilo koje podindekse koji se javljaju (i, j, k, l) . Ovisno o kojem članu Euler-ovog tenzora se radi tj. koji su podindeksi u pitanju, ta vrijednost se uzima iz Kronecker-Delta matrice kao što će biti prikazano u sljedećem koraku.

Kronecker-Delta operator u kontekstu ovog primjera je

$$\delta_{ij} = \delta_{kl} = \delta_{ik} = \delta_{jl} = \delta_{il} = \delta_{jk} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Za element konstitutivne matrice krutosti koji je gore izračunat, elementi Euler-ovog tenzora su

$$c_{1112} = \lambda' \cdot \delta_{11} \cdot \delta_{12} + \mu' (\delta_{11} \cdot \delta_{21} + \delta_{12} \delta_{11}) = \lambda' \cdot 1 \cdot 0 + \mu' (1 \cdot 0 + 0 \cdot 1) = 0 \quad i = 1, j = 1, k = 1, l = 2$$

$$c_{1212} = \lambda' \cdot \delta_{12} \cdot \delta_{12} + \mu' (\delta_{11} \cdot \delta_{22} + \delta_{12} \delta_{11}) = \lambda' \cdot 0 \cdot 0 + \mu' (1 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = \mu' \quad i = 1, j = 2, k = 1, l = 2$$

U konačnici, vrijednost člana konstitutivne matrice je

$$[\mathbf{K}_{c,23}]_{11} \left[\frac{1}{8} \cdot 0 \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \mu' \frac{1}{6} \right] 24t = -\frac{2}{3} \mu' t$$

Analogno se odrede svi ostali članovi konstitutivne matrice. Prvo će se dovršiti elementi matrice koji povezuju čvorove 2 i 3, zatim ostali elementi, vandijagonalni i dijagonalni.

$$[\mathbf{K}_{c,23}]_{12} \left[\frac{1}{8} \cdot c_{1122} \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot c_{1222} \frac{1}{6} \right] 24t = \frac{1}{2} \lambda' t$$

$$[\mathbf{K}_{c,23}]_{21} \left[\frac{1}{8} \cdot c_{2112} \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot c_{2212} \frac{1}{6} \right] 24t = \frac{1}{2} \mu' t$$

$$[\mathbf{K}_{c,23}]_{22} \left[\frac{1}{8} \cdot c_{2122} \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot c_{2222} \frac{1}{6} \right] 24t = \frac{2}{3} (\lambda' + 2\mu') t$$

tako da je matrica za čvorove 2-3 jednaka

$$\mathbf{K}_{c,23} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \mu' t & \frac{1}{2} \lambda' t \\ \frac{1}{2} \mu' t & -\frac{2}{3} (\lambda' + 2\mu') t \end{bmatrix}$$

Ostale vrijednosti vandijagonalnih članova su:

- **Čvorovi 1-2**

Generalna jednadžba

$$[\mathbf{K}_{c,12}]_{ij} = \left(\sum_{k,l=1}^2 \frac{\partial N_1}{\partial x_k} c_{ikjl} \frac{\partial N_2}{\partial x_l} \right) 24t; \quad i, j = 1, 2.$$

Elementi su tada jednaki

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{K}_{c,12}]_{11} & \left[-\frac{1}{8} \cdot c_{1111} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cdot c_{1122} \left(-\frac{1}{6}\right) \right] 24t = -\frac{3}{8}(\lambda' + 2\mu')t \\
 [\mathbf{K}_{c,12}]_{12} & \left[-\frac{1}{8} \cdot c_{1121} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cdot c_{1122} \left(-\frac{1}{6}\right) \right] 24t = \frac{1}{2}\lambda't \\
 [\mathbf{K}_{c,12}]_{21} & \left[-\frac{1}{8} \cdot c_{2111} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cdot c_{2112} \left(-\frac{1}{6}\right) \right] 24t = \frac{1}{2}\mu't \\
 [\mathbf{K}_{c,12}]_{22} & \left[-\frac{1}{8} \cdot c_{2121} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cdot c_{2122} \left(-\frac{1}{6}\right) \right] 24t = -\frac{3}{8}\mu't \\
 \mathbf{K}_{c,12} & = \begin{bmatrix} -\frac{3}{8}(\lambda' + 2\mu')t & \frac{1}{2}\lambda't \\ \frac{1}{2}\mu't & -\frac{3}{8}\mu't \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

• **Čvorovi 1-3**

Generalna jednadžba

$$[\mathbf{K}_{c,13}]_{ij} = \left(\sum_{k,l=1}^2 \frac{\partial N_1}{\partial x_k} c_{ikjl} \frac{\partial N_3}{\partial x_l} \right) 24t; \quad i, j = 1, 2.$$

Elementi su jednaki

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{K}_{c,13}]_{11} & \left[-\frac{1}{8} \cdot c_{1212} \cdot \frac{1}{6} \right] 24t = -\frac{1}{2}\mu't \\
 [\mathbf{K}_{c,13}]_{12} & \left[-\frac{1}{8} \cdot c_{1122} \cdot \frac{1}{6} \right] 24t = -\frac{1}{2}\lambda't \\
 [\mathbf{K}_{c,13}]_{21} & \left[-\frac{1}{8} \cdot c_{2112} \cdot \frac{1}{6} \right] 24t = \frac{1}{2}\mu't \\
 [\mathbf{K}_{c,13}]_{22} & \left[-\frac{1}{8} \cdot c_{2122} \cdot \frac{1}{6} \right] 24t = 0 \\
 \mathbf{K}_{c,13} & = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\mu't & -\frac{1}{2}\lambda't \\ \frac{1}{2}\mu't & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Sada će se odrediti dijagonalni članovi konstitutivne matrice:

• **Čvor 1**

Generalna jednadžba

$$[\mathbf{K}_{c,11}]_{ij} = \left(\sum_{k,l=1}^2 \frac{\partial N_1}{\partial x_k} c_{ikjl} \frac{\partial N_1}{\partial x_l} \right) 24t; \quad i, j = 1, 2.$$

Elementi su

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{K}_{c,11}]_{11} & \left[-\frac{1}{8} \cdot c_{1111} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) \right] 24t = \frac{3}{8}(\lambda' + 2\mu')t \\
 [\mathbf{K}_{c,11}]_{12} & \left[-\frac{1}{8} \cdot c_{1121} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) \right] 24t = 0 \\
 [\mathbf{K}_{c,11}]_{21} & \left[-\frac{1}{8} \cdot c_{1211} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) \right] 24t = 0 \\
 [\mathbf{K}_{c,11}]_{22} & \left[-\frac{1}{8} \cdot c_{2121} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) \right] 24t = \frac{3}{8}\mu't
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_{c,11} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8}(\lambda' + 2\mu')t & 0 \\ 0 & -\frac{3}{8}\mu't \end{bmatrix}$$

• Čvor 2

Generalna jednačba

$$[\mathbf{K}_{c,22}]_{ij} = \left(\sum_{k,l=1}^2 \frac{\partial N_2}{\partial x_k} c_{ijkl} \frac{\partial N_2}{\partial x_l} \right) 24t; \quad i, j = 1, 2.$$

Elementi su

$$[\mathbf{K}_{c,22}]_{11} \left[\frac{1}{8} \cdot c_{1111} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{6} \cdot c_{1212} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \right] 24t = \left(\frac{3}{8}\lambda' + \frac{17}{12}\mu' \right) t$$

$$[\mathbf{K}_{c,22}]_{12} \left[-\frac{1}{6} \cdot c_{1221} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot c_{1212} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \right] 24t = -\frac{1}{2}(\lambda' + \mu')t$$

$$[\mathbf{K}_{c,22}]_{21} \left[-\frac{1}{6} \cdot c_{2211} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot c_{2112} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \right] 24t = -\frac{1}{2}(\lambda' + \mu')t$$

$$[\mathbf{K}_{c,22}]_{22} \left[\frac{1}{8} \cdot c_{2121} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{6} \cdot c_{2222} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \right] 24t = \left(\frac{2}{3}\lambda' + \frac{41}{24}\mu' \right) t$$

$$\mathbf{K}_{c,22} = \begin{bmatrix} \left(\frac{3}{8}\lambda' + \frac{17}{12}\mu' \right) t & -\frac{1}{2}(\lambda' + \mu')t \\ -\frac{1}{2}(\lambda' + \mu')t & \left(\frac{2}{3}\lambda' + \frac{41}{24}\mu' \right) t \end{bmatrix}$$

• Čvor 3

Generalna jednačba

$$[\mathbf{K}_{c,11}]_{ij} = \left(\sum_{k,l=1}^2 \frac{\partial N_3}{\partial x_k} c_{ijkl} \frac{\partial N_3}{\partial x_l} \right) 24t; \quad i, j = 1, 2.$$

Elementi su

$$[\mathbf{K}_{c,33}]_{11} \left[\frac{1}{6} \cdot c_{1212} \cdot \frac{1}{6} \right] 24t = \frac{2}{3}\mu't$$

$$[\mathbf{K}_{c,33}]_{12} \left[\frac{1}{6} \cdot c_{1222} \cdot \frac{1}{6} \right] 24t = 0$$

$$[\mathbf{K}_{c,33}]_{21} \left[\frac{1}{6} \cdot c_{2212} \cdot \frac{1}{6} \right] 24t = 0$$

$$[\mathbf{K}_{c,33}]_{22} \left[\frac{1}{6} \cdot c_{2222} \cdot \frac{1}{6} \right] 24t = \frac{2}{3}(\lambda' + 2\mu')t$$

$$\mathbf{K}_{c,33} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\mu't & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}(\lambda' + 2\mu')t \end{bmatrix}$$

Ukupna konstitutivna matrica je jednaka

$$\mathbf{K}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{c,11} & \mathbf{K}_{c,12} & \mathbf{K}_{c,13} \\ \mathbf{K}_{c,21} & \mathbf{K}_{c,22} & \mathbf{K}_{c,23} \\ \mathbf{K}_{c,31} & \mathbf{K}_{c,32} & \mathbf{K}_{c,33} \end{bmatrix}$$

Zbog simetrije je $\mathbf{K}_{c,13} = \mathbf{K}_{c,31}$, $\mathbf{K}_{c,23} = \mathbf{K}_{c,32}$ i $\mathbf{K}_{c,12} = \mathbf{K}_{c,21}$. Konstitutivna matrica s svim elementima iznosi

$$\mathbf{K}_c = \begin{bmatrix} \frac{3}{8}(\lambda' + 2\mu')t & 0 & -\frac{3}{8}(\lambda' + 2\mu')t & \frac{1}{2}\lambda't & -\frac{1}{2}\mu't & -\frac{1}{2}\lambda't \\ 0 & \frac{3}{8}\mu't & \frac{1}{2}\mu't & -\frac{3}{8}\mu't & -\frac{1}{2}\mu't & 0 \\ -\frac{3}{8}(\lambda' + 2\mu')t & \frac{1}{2}\lambda't & (\frac{3}{8}\lambda + \frac{17}{12}\mu')t & -\frac{1}{2}(\mu' + \lambda')t & -\frac{2}{3}\mu't & \frac{1}{2}\lambda't \\ \frac{1}{2}\mu't & -\frac{3}{8}\mu't & -\frac{1}{2}(\mu' + \lambda')t & (\frac{2}{3}\lambda' + \frac{41}{24}\mu')t & \frac{1}{2}\mu't & -\frac{2}{3}(\lambda' + 2\mu')t \\ -\frac{1}{2}\mu't & -\frac{1}{2}\lambda't & -\frac{2}{3}\mu't & \frac{1}{2}\lambda't & \frac{2}{3}\mu't & 0 \\ -\frac{1}{2}\mu't & 0 & \frac{1}{2}\mu't & -\frac{2}{3}(\lambda' + 2\mu')t & 0 & \frac{2}{3}(\lambda' + 2\mu')t \end{bmatrix}$$

Nakon izračuna konstitutivne matrice krutosti koja je član tangentne matrice \mathbf{K} , slijedi odrediti član koji je matrica inicijalnih naprezanja \mathbf{K}_σ . Odrediti će se istim načinom kao i konstitutivna matrica, preko doprinosa dvaju susjednih čvorova ukupnoj krutosti inicijalnih naprezanja pomoću jednadžbe 6.45.

Prvo će se odrediti vandijagonalni članovi, polazeći od čvorova 1 i 2.

• Čvorovi 1-2

$$[\mathbf{K}_{\sigma,12}] = \int_{V^e} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} dv$$

Rješenje jednadžbe je

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_{\sigma,12}] &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} 24t = \\ &= \begin{bmatrix} (-\frac{1}{8}) \cdot 8 \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot 4 \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cdot 4 \cdot (-\frac{1}{6}) + 0 \cdot 3 \cdot (-\frac{1}{6}) \\ 4 \cdot (-\frac{1}{8}) + 3 \cdot (-\frac{1}{6}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} 24t = \\ &= -\frac{1}{24} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} 24t = \begin{bmatrix} -1t & 0 \\ 0 & -1t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

• Čvorovi 2-3

$$[\mathbf{K}_{\sigma,23}] = \int_{V^e} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} dv$$

Rješenje jednadžbe je

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_{\sigma,23}] &= \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & (-\frac{1}{6}) \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} 24t = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \cdot 8 \cdot 0 + (-\frac{1}{6}) \cdot 4 \cdot 0 + \frac{1}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{6} + (-\frac{1}{6}) \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} \\ 4 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} 24t = \\ &= 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} 24t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

• Čvorovi 1-3

$$[\mathbf{K}_{\sigma,13}] = \int_{V^e} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} dv$$

Rješenje jednadžbe je

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_{\sigma,23}] &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} 24t = \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} \cdot 8 \cdot 0 + 0 \cdot 4 \cdot 0 - \frac{1}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} 24t = \\ &= -\frac{1}{12} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} 24t = \begin{bmatrix} -2t & 0 \\ 0 & -2t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Naposljetku će se odrediti dijagonalni članovi matrice inicijalnog naprezanja:

• Čvor 1

$$[\mathbf{K}_{\sigma,11}] = \int_{V^e} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} \\ \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} dv$$

Rješenje jednadžbe je

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_{\sigma,11}] &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} 24t = \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} \cdot 8 \cdot (-\frac{1}{8}) + 0 \cdot 4 \cdot (-\frac{1}{8}) + 0 \cdot 4 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \cdot 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} 24t = \\ &= \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} 24t = \begin{bmatrix} 3t & 0 \\ 0 & 3t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

• Čvor 2

$$[\mathbf{K}_{\sigma,22}] = \int_{V^e} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} \\ \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} dv$$

Rješenje jednadžbe je

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_{\sigma,22}] &= \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & (-\frac{1}{6}) \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} 24t = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \cdot 8 \cdot \frac{1}{8} + (-\frac{1}{6}) \cdot 4 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot 4 \cdot (-\frac{1}{6}) + (-\frac{1}{6}) \cdot 3 \cdot (-\frac{1}{6}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} 24t = \\ &= \frac{1}{24} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} 24t = \begin{bmatrix} 1t & 0 \\ 0 & 1t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

• Čvor 3

$$[\mathbf{K}_{\sigma,33}] = \int_{V^e} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} \\ \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} dv$$

Rješenje jednadžbe je

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_{\sigma,33}] &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} 24t = \\ &= \begin{bmatrix} 0 \cdot 8 \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 0 + 0 \cdot 4 \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} 24t = \\ &= \frac{1}{12} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} 24t = \begin{bmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 2t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ukupna matrica inicijalnog naprezanja je

$$\mathbf{K}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\sigma,11} & \mathbf{K}_{\sigma,12} & \mathbf{K}_{\sigma,13} \\ \mathbf{K}_{\sigma,21} & \mathbf{K}_{\sigma,22} & \mathbf{K}_{\sigma,23} \\ \mathbf{K}_{\sigma,31} & \mathbf{K}_{\sigma,32} & \mathbf{K}_{\sigma,33} \end{bmatrix}$$

gdje pravilo simetrije također vrijedi. S izračunatim elementima, matrica je jednaka

$$\mathbf{K}_{\sigma} = \begin{bmatrix} 3t & 0 & -1t & 0 & -2t & 0 \\ 0 & 3t & 0 & -1t & 0 & -2t \\ -1t & 0 & 1t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1t & 0 & 1t & 0 & 0 \\ -2t & 0 & 0 & 0 & 2t & 0 \\ 0 & -2t & 0 & 0 & 0 & 2t \end{bmatrix}$$

Sada je primjer trokutastog KE definiran s cijelom kinematikom, unutarnjim ekvivalentnim silama i komponentama tangentne matrice krutosti, konstitutivnom komponentom i komponentom inicijalnog naprezanja. Komponente vanjske sile i dilatacijska komponenta tangentne matrice krutosti su zanemarene

7. RJEŠAVANJE HIPERELASTIČNIH PRIMJERA

U sljedećem koraku će se prijeći na numeričku analizu hiperelastičnih materijala. U tu svrhu koristiti će se program *FLagSHyP* (*Finite element Large Strain Hyperelasto-plastic Program*) koji sadrži potrebne funkcije i glavni program (eng. *Main program*) za interakciju u MatLab-u.

FLagSHyP biblioteka može se naći na internetu [4], te se koristi za rješavanje statičkih nelinearnih problema metodom konačnih elemenata vezanih za hiperelastične i hiperelastično-plastične materijale. Program se sastoji od niza biblioteka i funkcija potrebnih za definiranje problema i postavljanje temeljnih jednadžbi metode konačnih elemenata (poglavlje 6) i primjenu N-R postupka. Upute za upotrebu programa su definirane u literaturi [1] i bit će ukratko pojašnjene u ovom poglavlju.

FlagSHyP program je poprilično robusan te nije isključivo vezan za samo rješavanje hiperelastičnih materijala (iako je program u suštini namijenjen i najbolje opisuje jednadžbe hiperelastičnih materijala), međutim pravilno postavljenim ulaznim parametrima i odabirom odgovarajućeg materijala koji može opisati elastične ili plastične modele, program može relativno uspješno riješiti probleme vezane za elastične i plastične materijale.

7.1. Upute za korištenje *FLagSHyP* programa

Za početak je potrebno napraviti tekstualnu datoteku (.txt) u koju se unose svi potrebni inicijalni parametri kao što su geometrija, odabir KE, opterećenja itd. Sam program poziva se na funkcije iz svoje biblioteke koje su potrebne za proračun problema. Program se sastoji od datoteke `code` u kojoj se nalaze sve potrebne funkcije za izračun, `job folder` gdje se nalaze zadatci koji se rješavaju i MatLab kod `FlagSHyP.m` (glavni program). Prvo treba napraviti mapu u datoteci `job folder` i u njoj tekstualnu datoteku s ulaznim parametrima koju je potrebno nazvati isto kao i mapu samo s odgovarajućim sufiksom `.dat`, da glavni program može učitati datoteku. Pokretanje programa se vrši tako da kada se pokrene `FlagSHyP.m` u MatLab-u, program pita unos naziva zadatka a to mora biti naziv tekstualne datoteke `.dat`, jer je program tako koncipiran da pronađe zadatak u odgovarajućoj datoteci i u istu spremi izlazne rezultate.[1]

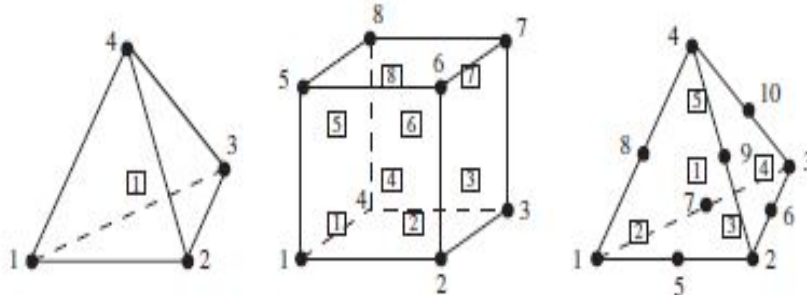
Ukratko će se opisati pojedini ulazni parametri i kako se definiraju, te na kraju prikazati konceptualna datoteka za definiranje ulazih parametara.

- a) Prva linija teksta definira naziv zadatka koji može biti proizvoljan i ne mora odgovarati nazivu tekstualne datoteke.
- b) U drugoj liniji teksta se definira kakav se KE želi upotrijebiti. Zadatak, odnosno njegova diskretizirana mreža mora se sastojati od istih KE. Sam program u svojoj biblioteci nudi izbor sedam KE koji se pozivaju svojim nazivom i prikazani su u tablici 7.1.

Tablica 7.1: KE iz biblioteke *FLagSHyP* [1]

| Naziv KE | Opis KE |
|----------|---------------------------------------------|
| truss2 | štap s dva čvora i jednom G.T |
| tria3 | trokut s tri čvora i jednom G.T |
| tria6 | trokut s šest čvorova i tri G.T |
| quad4 | kvadrat s četiri čvora i četiri G.T |
| tetr4 | tetraedar s četiri čvora i jednom G.T |
| tetr10 | tetraedar s deset čvorova i pet G.T |
| hexa8 | heksaedar (kocka) s osam čvorova i osam G.T |

Kao što se može primijetiti, broj u nazivu KE označava broj čvorova. Prva četiri KE se koriste za 2D probleme a zadnja tri za 3D probleme, pri čemu je `truss2` 1D štap koji se definira u 3D domeni. U biblioteci se za svaki KE nalaze njegove unaprijed određene funkcije oblika N_a , njihove derivacije $\partial N_a / \partial \mathbf{X}$ i koordinate GT.



Slika 7.1: 3D KE iz biblioteke FFlagSHyP [1]

- c) U trećem retku se unosi broj čvorova cijele (globalne) mreže.
- d) Nakon definiranja broja čvorova u sljedećim retcima se definira svaki čvor. Prvo se u redak unosi broj čvora, kod rubnog uvjeta (stupanj slobode) za taj čvor te koordinate. Kodovi rubnih uvjeta su definirani od nula do sedam i predstavljaju duž koje koordinatne osi nema pomaka, tj. koja os je fiksirana. Rubni uvjeti su prikazani u tablici 7.2

Tablica 7.2: Rubni uvjeti za čvorove iz biblioteke FFlagSHyP [1]

| Nazivni broj rubnog uvjeta | Fiksirane osi |
|----------------------------|---------------|
| 0 | slobodan čvor |
| 1 | x |
| 2 | y |
| 3 | x, y |
| 4 | z |
| 5 | x, z |
| 6 | y, z |
| 7 | x, y, z |

Nakon definiranja rubnih uvjeta unose se koordinate, u slijedu x, y, z (koordinate se unose s decimalnom točkom, te npr. ako je koordinata 1 treba upisati 1.0). Ovi podaci se moraju definirati za svaki čvor.

- e) Nakon definiranja svakog čvora u idućem retku se unosi ukupan broj KE u mreži.
- f) Sada KE treba definirati s dva parametra, tipom materijala i čvorovima od kojih je sastavljen. Prvo se u retku unosi broj KE, zatim broj materijala koji je korišten te čvorovi koji se nalaze u KE. Ovaj postupak se ponavlja za svaki KE, pri čemu se za pojedini KE podatci unose u novi redak.
- g) Poslije definiranja svakog KE, unosi se broj tipova materijala koji su korišteni.
- h) U idućim koracima potrebno je definirati svaki korišteni materijal. Prvo se u novom retku unosi redni broj materijala, zatim kojem tipu materijala odgovara. U biblioteci se nalazi devet tipova materijala s opisom svoje primjene, koji se pozivaju svojim nazivnim brojem.[1]

Tablica 7.3: Tipovi materijala iz biblioteke FLagSHyP [1]

| Tip mat. | Opis materijala |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | ravninsko stanje deformacije ili 3D stlačivi neo-Hook |
| 2 | 1D rastezljivi hiperelastično-plastičan materijal (samo za KE truss2) |
| 3 | ravninsko stanje deformacije ili 3D hiperelastičan materijal u glavnim smjerovima |
| 4 | ravninsko stanje naprezanja hiperelastičnog materijala u glavnim smjerovima |
| 5 | ravninsko stanje deformacije ili 3D približno nestlačiv neo-Hook |
| 6 | ravninsko stanje naprezanja nestlačivog neo-Hook-a |
| 7 | ravninsko stanje deformacije ili 3D približno nestlačiv hiperelastičan materijal u glavnim smjerovima |
| 8 | ravninsko stanje naprezanja nestlačivog hiperelastičnog materijala u glavnim smjerovima |
| 17 | ravninsko stanje deformacije ili 3D približno nestlačivi hiperelastično plastičan materijal u glavnim smjerovima |

Nakon unosa broja i tipa materijala, u sljedećem retku potrebno je unijeti parametre za definiranje odabranog tipa materijala.

Tablica 7.4: Tablica s potrebnim svojstvima za definiranje pojedinog materijala [1]

| Tip | Svojstvo(1) | Svojstvo(2) | Svojstvo(3) | Svojstvo(4) | Svojstvo(5) | Svojstvo(6) |
|-----|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1 | ρ | μ | λ | - | - | - |
| 2 | ρ | E | ν | <i>area</i> | τ_y | H |
| 3 | ρ | μ | λ | - | - | - |
| 4 | ρ | μ | λ | h | - | - |
| 5 | ρ | μ | κ | - | - | - |
| 6 | ρ | μ | h | - | - | - |
| 7 | ρ | μ | κ | - | - | - |
| 8 | ρ | μ | h | - | - | - |
| 17 | ρ | μ | λ | - | τ_y | H |

U tablici 7.4, ρ predstavlja gustoću materijala, λ i μ su Lamé-ove konstante, $\kappa = \lambda + 2\mu/3$ je tlačni modul (*bulk modulus*), h je debljina KE za ravninsko stanje naprezanja, E je Young-ov modul, ν je Poisson-ov koeficijent, *area* je inicijalna površina poprečnog presjeka, τ_y je granica tečenja i H je parametar otvrđivanja. Ovaj postupak je potrebno ponoviti za svaku vrstu materijala korištenu u diskretizaciji. Ovisno o odabiru materijala, program se poziva na biblioteku gdje se nalaze potrebne funkcije za rješavanje konstitutivnih jednadžbi materijala.

- i) Nakon materijala potrebno je definirati opterećenja. To se zadaje na način da se u novome retku unose četiri parametra. Prvi parametar definira ukupan broj čvorova s silom, drugi definira ukupan broj čvorova s nametnutim pomakom različitim od nule, treći definira broj linijskih KE između dva čvora gdje se nalazi površinski tlak kao opterećenje, te se na kraju zadaje vektor opterećenja sile teže odnosno vektor ubrzanja sile teže \mathbf{g} (9.81 ms^{-1}) razložen na komponente.
- j) Nakon definiranja broja i vrste opterećenja, treba odrediti iznose i smjerove tih opterećenja. To se zadaje istim slijedom kao što se navelo u prethodnoj stavci. Prvo se unose čvorovi s opterećenjem. Za svaki opterećeni čvor se u novom retku piše broj čvora s silom razloženom na x, y, z komponente

i smjerom ("+" ili "-"). Onda slijedi definiranje čvorova s nametnutim pomakom pri čemu se svaki čvor i smjer pomaka definira u novom retku. Prvi broj predstavlja o kojemu se čvoru radi, zatim smjer (1 je x , 2 je y a 3 je z) i iznosi pomaka. Ako jedan čvor ima pomake u dva smjera to se onda piše u dva retka. Zadnje opterećenje koje se definira je površinski tlak. Svaki linijski KE se treba definirati u zasebnom retku. Prvi broj definira o kojem se linijskom elementu radi, zatim se unose dva broja koja predstavljaju između kojih čvorova se nalazi linijski element te iznos tlaka. Smjer tlaka odnosno njegov predznak se određuje pravilom desne ruke. Ako se krene iz jednog čvora linijskog elementa u smjeru desne ruke i drugi čvor je manje numeracije od početnog (npr. iz čvora 8 u čvor 4) tada je tlak pozitivan. Također, može se krenuti iz drugog čvora koji je manje numeracije prema čvoru veće numeracije, te je tada po pravilu desne ruke tlak negativan. Oba načina su pravilna i predstavljaju isto opterećenje, samo treba pripaziti iz kojega čvora se kreće prema kojem čvoru.

- k) U konačnici se definiraju kontrolni parametri za konvergenciju i N-R postupak. Unosi se jedanaest parametara gdje se svi nalaze u jednom retku. Prvi parametar se odnosi na broj inkremenata opterećenja ili pomaka do konačne vrijednosti. Drugi je maksimalna vrijednost *load-scaling* parametra koji predstavlja maksimalno opterećenje u uvjetu konvergencije N-R (jer kada inkrement opterećenja dođe do te vrijednosti, N-R postupak se obustavlja). Treći je iznos inkrementa opterećenja (ΔF ili Δu) koji se množi s nominalnim opterećenjem. Četvrti je maksimalan broj iteracija N-R postupka po inkrementu opterećenja, peti se odnosi na toleranciju konvergencije, šesti i sedmi se koriste ako je primijenjena linijska metoda odnosno metoda duljine luka. Osmi parametar definira za koji će se inkrement iteracije ispisivati rezultati. Deveti predstavlja isto kao i sedmi, ako se koristi metoda duljine luka, te zadnja dva parametra definiraju određeni čvor odnosno smjer za koji će se zasebno ispisati rezultat.

Tablica 7.5: Nazivi ulaznih parametara za definiranje zadatka

| |
|------------------------------------------------------------------------------------------|
| Naziv_zadatka |
| Naziv_korištenog_elementa* |
| Broj_čvorova_mreže |
| Čvor_1 kod_rubnog_uvjeta** X_1 Y_1 Z_1 |
| Čvor_2 kod_rubnog_uvjeta** X_2 Y_2 Z_2 |
| ... |
| Čvor_N kod_rubnog_uvjeta** X_N Y_N Z_N |
| Broj_KE_u_mreži |
| KE_1 broj_materijala_1 čvor_1 čvor_2 čvor_3 čvor_4 |
| KE_2 broj_materijala_1 čvor_5 čvor_6 čvor_7 čvor_8 |
| ... |
| KE_N broj_materijala_N čvor_N-3 čvor_N-2 čvor_N-1 čvor_N |
| Broj_korištenih_materijala |
| Broj_materijala_1 kod_tipa_materijala*** |
| Svojstva_materijala_1**** |
| ... |
| Broj_materijala_N kod_tipa_materijala*** |
| Svojstva_materijala_N**** |
| Broj_opterećenih_čvorova broj_čvorova_s_nametnutim_pomakom... |
| broj_linijaskih_KE_opterećeni_na_tlak vektor_gravitacijskog_ubrzanja |
| Broj_opterećenog_čvora_1 komponente_sile (X, Y i Z) |
| ... |
| Broj_opterećenog_čvora_N komponente_sile (X, Y i Z) |
| Broj_čvora_s_nametnutim_pomakom_1 smjer_pomaka Iznos_pomaka |
| ... |
| Broj_čvora_s_nametnutim_pomakom_N smjer_pomaka Iznos_pomaka |
| Broj_linijaskog_KE_1 čvor_1_linijaskog_KE čvor_2_linijaskog_KE iznos_tlaka |
| ... |
| Broj_linijaskog_KE_N čvor_N-1_linijaskog_KE čvor_N_linijaskog_KE iznos_tlaka |
| Broj_inkremenata_opterećenja max_iznos_"load-scaling"_parametra... |
| inkrement_opterećenja max_broj_iteracija_po_inkreментu_opterećenja... |
| uvjet_konvergencije parametar_linijaskog_metode parametar_"Arc-length"_metode... |
| brojač_izlazne_iteracije ciljna_iteracija_po_inkreментu_"Arc-length"_metode... |
| čvor_za_izlazne_vrijednosti stupanj_slobode_izlaznog_čvora |
| * Kod KE, prema tablici 7.1 |
| ** Kod rubnog uvjeta, prema tablici 7.2 |
| *** Kod tipa materijala, prema tablici 7.3 |
| **** Svojstva materijala, prema tablici 7.4 |
| Napomena: "..." na kraju retka označava da se daljni parametri definiraju u jednom retku |

7.2. Inicijalni jednostavni zadatak

Za početak će se usporediti rezultati nekog jednostavnog primjera s njegovim rezultatima iz FlagSHyP-a. Za zadatak će se uzeti jedan jednostavni 2D KE koji će se riješiti jednadžbama metode konačnih elemenata za teoriju elastičnosti. Zatim će se u FlagSHyP-u definirati isti zadatak s istom konfiguracijom te se provesti numerička analiza s odgovarajućim parametrima za teoriju elastičnosti.

7.2.1. Rješenje teorijom elastičnosti

Za KE odabran je jedan trokutasti element u ravnini s tri čvora te jednom GT za numeričku integraciju i slučaj opterećenja je ravninsko stanje naprezanja. [5]

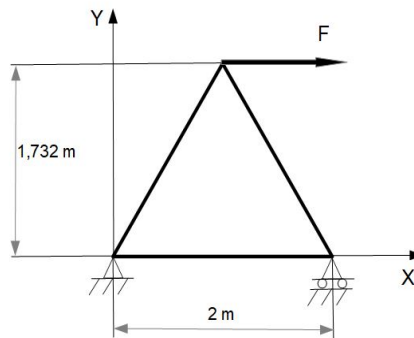
Ulazni parametri:

$$F = 10 \text{ kN};$$

$$E = 210 \text{ GPa};$$

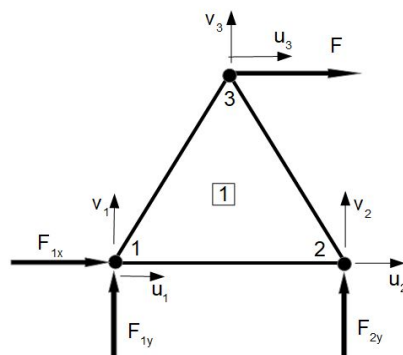
$$\nu = 0,3;$$

$$t = 0,2 \text{ m};$$



Slika 7.2: Početna konfiguracija tijela

KE ima dva stupnja slobode po čvoru, duljine 2 m i visine 1,732 m što odgovara jednakostraničnom trokutu debljine t .



Slika 7.3: KE oslobođen veza

Početni uvjeti za konfiguraciju su:

$$u_1 = 0; \quad v_1 = 0; \quad v_2 = 0;$$

$$F_{2,x} = 0; \quad F_{3,x} = F; \quad F_{3,y} = 0;$$

Pri čemu ukupni su vektori pomaka \mathbf{q} i sile \mathbf{Q} jednaki

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ 0 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} F_{1,x} \\ F_{1,y} \\ F_{2,x} \\ F_{2,y} \\ F_{3,x} \\ F_{3,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1,x} \\ F_{1,y} \\ 0 \\ F_{2,y} \\ F \\ 0 \end{bmatrix};$$

Koordinate čvorova su:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ m}; \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,732 \end{bmatrix} \text{ m};$$

Generalna jednačina za odrediti nepoznate pomake i reakcije je

$$[\mathbf{K}] \cdot \{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{Q}\}$$

Izraz za matricu krutosti \mathbf{K} prema teoriji elastičnosti je

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} V$$

Matrica krutosti odgovara konstitutivnoj matrici \mathbf{K}_c prema izrazu 6.40. Izraz za matricu \mathbf{B} u Kartezijevom koordinatnom sustavu za trokutasti KE glasi

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = (x_2 y_3 - x_3 y_2) - (x_1 y_3 - x_3 y_1) + (x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

\mathbf{D} je matrica svojstva materijala, te je za ravninsko stanje naprezanja jednaka

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix}$$

Volumen KE je jednak

$$V = A \cdot t$$

Naprezanja (za pojedini KE) se računaju prema izrazu

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{D} \mathbf{B} \{\mathbf{q}\}$$

Kada se uvrste zadani podaci, dobije se:

$$\Delta = (2 \cdot 1,732 - 0) - (0 - 0) + (0 - 0) = 3,464$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{3,464} \begin{bmatrix} 0 - 1,732 & 0 & 1,732 - 0 & 0 & 9 - 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2 & 0 & 0 - 1 & 0 & 2 - 0 \\ 1 - 2 & 0 - 1,732 & 0 - 1 & 1,732 - 0 & 2 - 0 & 0 - 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,288 & 0 & -0,288 & 0 & 0,577 \\ -0,288 & -0,5 & -0,288 & 0,5 & 0,577 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \frac{210 \times 10^9}{1 - 0,3^2} \begin{bmatrix} 1 & 0,3 & 0 \\ 0,3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 0,3}{2} \end{bmatrix} = 1 \times 10^{11} \begin{bmatrix} 2,3077 & 0,6923 & 0 \\ 0,6923 & 2,3077 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8077 \end{bmatrix}$$

$$V = \underbrace{1 \cdot 1,732}_{A} \cdot 0,2 = 0,3464 \text{ m}^3$$

Ukupni iznos matrice krutosti \mathbf{K} je

$$\mathbf{K} = 1 \times 10^{10} \begin{bmatrix} 2,2316 & 0,7500 & -1,7653 & -0,0577 & -0,4663 & -0,6923 \\ 0,7500 & 1,3657 & 0,0577 & -0,0333 & -0,8077 & -1,3324 \\ -1,7653 & 0,0577 & 2,2316 & -0,7500 & -0,4663 & 0,6923 \\ -0,0577 & -0,0333 & -0,7500 & 1,3657 & 0,8077 & -1,3324 \\ -0,4663 & -0,8077 & -0,4663 & 0,8077 & 0,9327 & 0 \\ -0,6923 & -1,3324 & 0,6923 & -1,3324 & 0 & 2,6648 \end{bmatrix}$$

Sada će se vektor pomaka i vektor sila rastaviti, pojedinačno, na dva vektora od kojih je jedan s poznatim pomacima odnosno silama a drugi s nepoznatim.

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ v_2 = 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} F_{1,x} \\ F_{1,y} \\ F_{2,y} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} F_{2,x} = 0 \\ F_{3,x} = F \\ F_{3,y} = 0 \end{bmatrix};$$

Vidljivo je da su zamijenjena mjesta pomaka u_2 s v_2 kao i njihove odgovarajuće sile $F_{2,x}$ s $F_{2,y}$. Radi toga potrebno je izmijeniti matricu krutosti \mathbf{K} , tj. zamijeniti retke i stupce koji odgovaraju ovim veličinama a to su retci 3 i 4 te stupci 3 i 4. Nakon zamjene redaka i stupaca, matrica \mathbf{K} se rastavi na četiri matrice i dobije se sustav dviju jednačbi gdje su u jednoj jednačbi nepoznati pomaci \mathbf{q}_2 , a u drugoj nepoznate sile (reakcije) \mathbf{Q}_2 .

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11}(3 \times 3) & \mathbf{k}_{12}(3 \times 3) \\ \mathbf{k}_{21}(3 \times 3) & \mathbf{k}_{22}(3 \times 3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\mathbf{q}_1\} \\ \{\mathbf{q}_2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\mathbf{Q}_1\} \\ \{\mathbf{Q}_2\} \end{bmatrix} =$$

$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{k}_{22}^{-1} \cdot (\mathbf{Q}_2 - \mathbf{k}_{21} \cdot \mathbf{q}_1)$$

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{k}_{11} \cdot \mathbf{q}_1 + \mathbf{k}_{12} \cdot \mathbf{q}_2$$

Postupak je implementiran u MatLab-u, a kod se nalazi u prilogu 1.

Rezultati nepoznatih pomnaka i reakcija, te naprezanja su

$$\mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = 1 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 0,0275 \\ 0,1210 \\ -0,0071 \end{bmatrix} \text{ m}$$

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} F_{1,x} \\ F_{1,y} \\ F_{2,y} \end{bmatrix} = 1 \times 10^4 \begin{bmatrix} -1 \\ -0,866 \\ 0,866 \end{bmatrix} \text{ N}$$

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = 1 \times 10^4 \begin{bmatrix} 2,8868 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ Pa}$$

7.2.2. Rješenje *FLagSHyP* programom

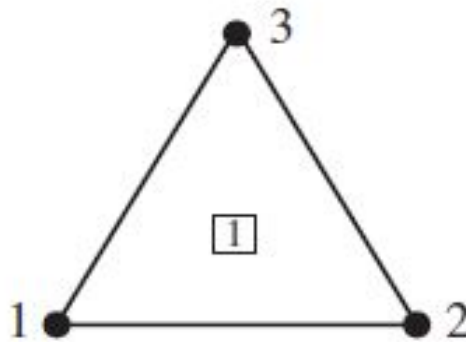
Ulazne parametre definirati će se da budu ekvivalentni parametrima teorije elastičnosti.

Tablica 7.6: Ulazni parametri za zadatak

```

2-D Triangle plane stress test
tria3
3
1 3 0.0 0.0
2 2 2.0 0.0
3 0 1.0 1.732
1
1 1 1 2 3
1
1 6
0.0 8.076923E+10 0.2
1 0 0 0.0 0.0
3 10.0E+3 0.0
1 1.0 10000.0 100 1.0E-6 0.0 0.0 5 0.0 3 1
    
```

U tablici 7.6 se nalaze ulazni parametri za dani zadatak koji će se sada riješiti u FlagSHyP programu. Korišten je jedan KE, tipa tria3.



Slika 7.4: Korišteni KE [1]

Odabrani tip materijala je pod brojem 6: ravninsko stanje naprezanja nestlačivog neo-Hook-a. Parametri za definiranje modela su (iz tablice 7.4):

$$\rho = 0 \text{ kg m}^{-3}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{210 \times 10^9}{2(1+0,3)} = 8.077 \times 10^{10} \text{ Pa}$$

$$h = 0.2 \text{ m}$$

Gustoća je jednaka nuli, što znači da je zanemaren utjecaj gravitacije. Kao svojstvo materijala definirana je samo druga Lamé-ova konstanta koja odgovara modulu smicanja G . Za opterećenje je dana sila u čvoru 3 u smjeru x , iznosa $F = 10000 \text{ N}$.

Za kontrolne parametre definirano je: samo jednu iteracija inkrementa opterećenja, parametri *load-scaling* i inkrement opterećenja su jednaki 1 što znači da nominalno opterećenje neće biti uvećano. Parametar tolerancije konvergencije je 10^{-6} .

Tablica 7.7: Rezultati *FLagSHyP* programa

```

2-D Triangle plane stress test at increment:1, load: 1 tria3
3
1 3 0.0000E+00 0.0000E+00 -1.0000E+04 -8.6600E+03
2 2 2.0000E+00 0.0000E+00 0.0000E+00 8.6600E+03
3 0 1.0000E+00 1.7320E+00 1.0000E+04 0.0000E+00
1
1 1 1 2 3
2.8868E+04 5.0000E+04 -1.7038E-03 2.0000E-01
    
```

Program ispisuje rezultate u tekstualnom obliku. Za svaki izlazni inkrement koji je unaprijed definiran, ispiše se opterećenje (inkrement opterećenja), korišteni element i broj čvorova. Zatim se za svaki čvor ispiše koji su rubni uvjeti, nove koordinate i sile (ili reakcije). Zatim se ispišu zadani broj KE te njegovi podaci o vrsti materijala i čvorovima koji se nalaze u njemu. U konačnici, program ispiše za svaki KE (počevši od prvoga) vrijednosti naprezanja u pojedinoj GT (počevši od prve GT). Npr. ako su zadana dva KE, od koje svaki KE ima četiri GT, program ispiše osam redaka vrijednosti naprezanja u svakoj GT.

Ovisno o odabiru tipa materijala odnosno slučaja opterećenja, program ispisuje određene vrijednosti naprezanja:

- 2D, ravnisnko stanje deformacije: $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$
- 2D, ravnisnko stanje naprezanje: $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}, h$
- 3D, štapovi (*truss2*): N_x
- 3D: $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$

Vrijednosti nepoznatih pomaka i sila, te naprezanja iz *FLagShyP* programa su

$$\mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = 1 \times 10^{-5} \begin{bmatrix} 0,0241 \\ 0,1193 \\ -0,0103 \end{bmatrix} \text{ m}$$

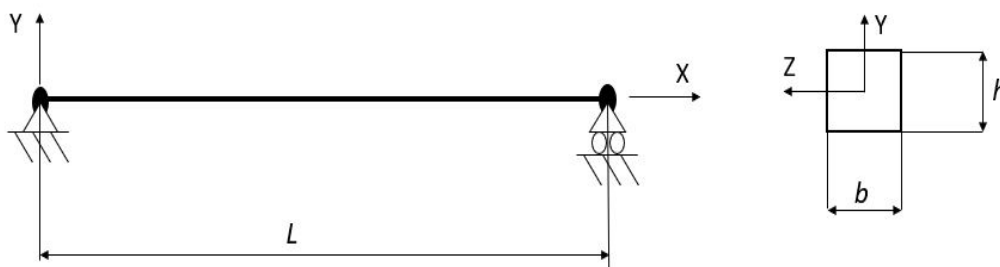
$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} F_{1,x} \\ F_{1,y} \\ F_{2,y} \end{bmatrix} = 1 \times 10^4 \begin{bmatrix} -1 \\ -0,866 \\ 0,866 \end{bmatrix} \text{ N}$$

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.8868 \times 10^4 \\ -1.705 \times 10^{-3} \\ 5 \times 10^4 \end{bmatrix} \text{ Pa}$$

Rezultati dobiveni teorijom elastičnosti i *FLagSHyP* programom se jako dobro podudaraju. Reakcije i iznosi naprezanja se jednaki, uz malu razliku pomaka. Prvo je zadatak riješen jednadžbama teorije elastičnosti koje odgovaraju Hook-ovu zakonu i konstitutivnim jednadžbama za kruta tijela, te se matrica krutosti \mathbf{K} sastojala samo od konstitutivne matrice krutosti \mathbf{K}_c . U *FlagSHyP* programu kao materijal se naveo nestlačivi neo-Hook-ov materijal čije se konstitutivne jednadžbe razlikuju od klasičnih za Hook-ov zakon. Također, u *FlagSHyP* programu formira se globalna matrica krutosti \mathbf{K} koja se sastoji od više matrica, \mathbf{K}_c i \mathbf{K}_G u ovom slučaju. Razlika između konstitutivnih jednadžbi modela, iako su parametri modela podešeni da odgovaraju istom materijalu i činjenica da *FLagSHyP* koristi iterativni N-R postupak može objasniti malu razliku između rezultata, posebno pomaka.

7.3. Hiperelastični štap

1D štap će se aksijalno opteretiti, tj. opteretiti aksijalnom silom rastezanja te tako uvidjeti kako se ponaša takav hiperelastični štap pod aksijalnim opterećenjem. Za više vrijednosti aksijalne sile pokazati će se kakva je veza između sile i produljenja štapa. Isti 1D štap će se prikazati u svojim ekvivalentnim 2D i 3D prikazima s istim (ili približno sličnim) izborom materijala i istim opterećenjem. Tako će se moći vidjeti kako se materijal ponaša pod istim opterećenjem u različitim dimenzijama.



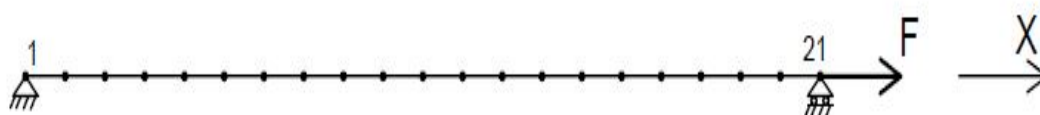
Slika 7.5: 1D konfiguracija štapa

Tablica 7.8: Dimenzije štapa

| Dimenzija | Vrijednost / m |
|--------------|----------------|
| Duljina, L | 1 |
| Širina, b | 0,1 |
| Visina, h | 0,1 |

7.3.1. *F*LagSHyP proračun 1D štapa

Diskretizacija štapa s slike 7.5, te zadano opterećenje su definirani na slici dolje



Slika 7.6: Diskretizacija 1D štapa

Korišteni KE je `truss2` (tablica 7.1), 1D štap s 2 čvora i jednom GT, isključivo aksijalno opterećen kako i priliči štapovima. Cijeli štap je diskretiziran s 20 KE i 21 čvorom. Za čvor 1 je postavljen rubni uvjet "7" (tablica 7.2) koji fiksira čvor u X, Y, Z smjerovima i u zadnjem čvoru 21 je definiran uvjet "6", koji onemogućuje pomake u Y i Z smjerovima. Za cijeli štap, rubni uvjeti bi trebali biti definirani biti kao na slici 7.13. Međutim pošto se radi o diskretizaciji s 20 štapnih KE, za sve ostale čvorove osim čvora 1, je postavljen uvjet "6" tako da matrica krutosti \mathbf{K} ne bude singularna ($\det \mathbf{K} = 0$). Za opis materijala korišten je tip 2 (tablica 7.3), 1D rastezljivi hiperelastično-plastični materijal. Svojstva

su definirana pomoću tablice 7.4

$$\begin{aligned}\rho &= 0 \text{ kg m}^{-3} \\ E &= \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\lambda + \mu} = \frac{0,5 \cdot (2 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,667)}{0,5 + 0,667} = 1,2857 \text{ MPa} \\ \nu &= \frac{\lambda}{2\mu + 2\lambda} = \frac{0,667}{2 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,667} = 0,2857 \\ \text{area} &= 0,01 \text{ m}^2 \\ \tau_y &= 3 \text{ MPa} \\ H &= 1,0\end{aligned}$$

Sama težina štapa je zanemarena jer je gustoća $\rho = 0 \text{ kg m}^{-3}$. Young-ov module elastičnosti E i Poisson-ov koeficijent ν su izračunati preko Lamé-ovih konstanti [1].

Lamé-ova prva konstanta μ definira modul smicanja G , dok druga konstanta λ uzima u obzir smicanje preko μ i modul stlačivosti κ . Modul stlačivosti κ se još naziva i *modul volumne ekspanzije*, te se definira kao omjer tlaka p po promjeni volumena. Jednak je $\kappa = \lambda + 2\mu/3$, te se λ računa pomoću tog izraza [8]

$$\lambda = \kappa - \frac{2}{3}\mu \quad (7.1)$$

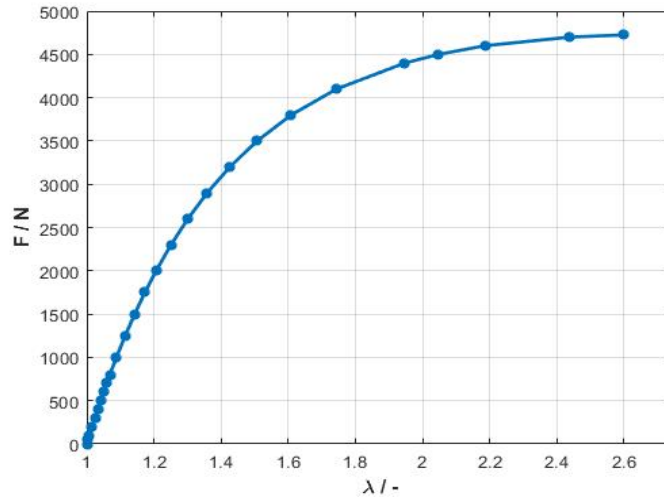
Druga Lamé-ova konstanta se odredila na način da je se modul stlačivosti usvojio da bude $\kappa = 1 \text{ MPa}$, te se izračunala pomoću gornje jednadžbe.

Površina poprečnog presjeka štapa je jednaka $A = b \cdot h$. Parametri plastičnosti, kao što su granica tečenja τ_y koja definira prijelaz u plastično područje te parametar otvrdnivanja H , za koji vrijedi ako je $H = 1$ da je materijal 100 % elastičan, te $H = 0$ materijal 100 % plastičan, definirani tako da opisuju hiperelastično ponašanje. τ_y je definiran da bude relativno velik tako da materijal ne prijeđe u plastično područje deformacija i H definira 100 % elastično odnosno hiperelastično ponašanje.

Referentni čvor za pomake biti će zadnji čvor 21 gdje djeluje sila F . Mjera za deformaciju biti će λ , omjer rastezanja štapa u smjeru x . Rastezanje λ se može povezati s linearnom deformacijom ε , gdje je $\lambda = l/L$ pa se veza može definirati kao $\varepsilon = (l - L)/L = \lambda - 1$.

Tablica 7.9: Ulazni parametri 1D štapa za FFlagShyP program

```
1-D stap test
truss2
21
1 7 0.0 0.0 0.0
2 6 0.05 0.0 0.0
...
21 6 1.0 0.0 0.0
20
1 1 1 2
2 1 2 3
...
20 1 20 21
1
1 2
0.0 1.2857e+6 0.2857 0.01 3.0e+6 1.0
1 0 0 0.0 0.0 0.0
21 4600 0.0 0.0
20 1 1 40 1.0e-6 0.0 0.0 1 0.0 21 1
```

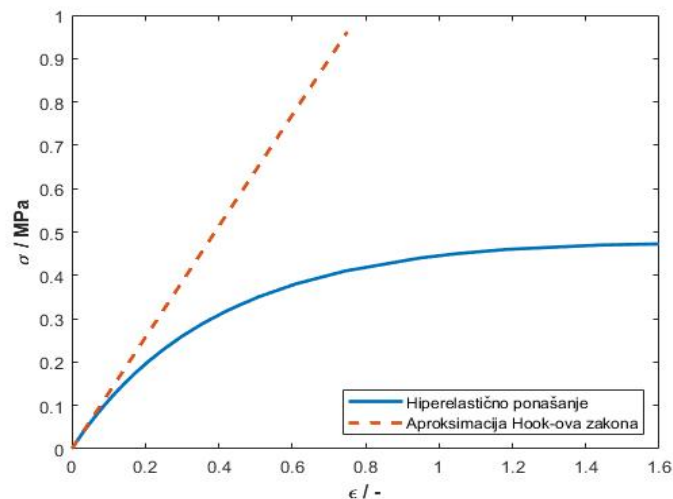


Slika 7.7: Rezultati aksijalno opterećenog 1D štapa

Početna vrijednost λ jest 1, jer kada se radi o nedeformiranom stanju, tj. $l = L$, tada je $\lambda = l/L = L/L = 1$.

Na gornjoj slici se vidi nelinearna veza između aksijalne sile F i istežanja λ . Na slici se može vidjeti degresivna veza između sile i istežanja, te se prema tome može zaključiti da sila raste do neke granice koju možemo interpretirati kao "asimptotska" sila. Teoretski, kako se sila približava toj asimptoti, istežanja rastu do beskonačnosti. Dok u realnim slučajevima, za ovaj materijal s zadanim svojstvima, kada je sila približno jednaka "asimptotskoj" sili tada najvjerojatnije dolazi do loma materijala (ako je plastičnost zanemarena).

Ako se vrijednosti sile podijele s početnom površinom $A = 0,01 \text{ m}^2$, čime će se definirati naprezanje σ_0 po inicijalnoj površini A , te istežanje štapa izrazi alternativno preko ϵ ($\epsilon = \lambda - 1$), dobiti će se klasični prikaz $\sigma - \epsilon$ dijagrama. Također će se aproksimirati pravac za Hook-ov zakon na temelju prva dva rezultata te time pokazati kako bi izgledao dijagram $\sigma - \epsilon$ da se radi o elastičnom materijalu.



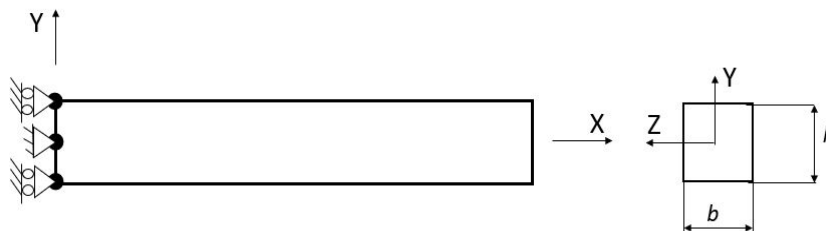
Slika 7.8: $\sigma - \epsilon$ za rastežanje 1D štapa

Na slici 7.8 jasno se vidi razlika između hiperelastičnog i elastičnog primjera. Općenita definicija hiperelastičnog materijala jest, velike deformacije za relativno male sile kao što se može vidjeti na gornjoj slici. Međutim, treba uzeti u obzir da je krivulja za hiperelastičan materijal u $\sigma - \epsilon$ dijagramu kvantitativni prikaz, jer se Cauchy-ovo naprezanje definiralo kao sila F po inicijalnom površinom A ($\sigma = F/A$),

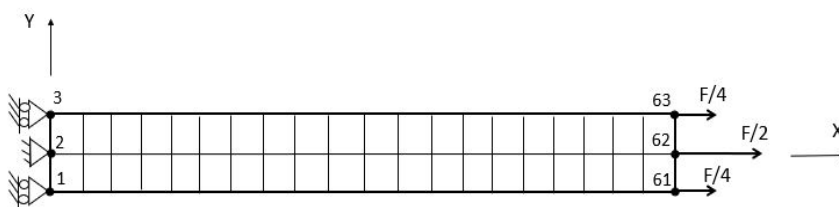
dok u stvarnosti trenutna površina a (posebno kod hiperelastičnih materijala) ima relativno veliku razliku od početne površine A i nema isti iznos a za svaki presjek štapa.

7.3.2. *FLagSHyP* proračun 2D štapa

Sada će se gornji štاپ prikazati u svom ekvivalentnom 2D prikazu, aksijalno opterećenom.



Slika 7.9: 2D konfiguracija štapa



Slika 7.10: Diskretizacija 2D štapa

Korišteni KE je kvadrat, `quad4` iz biblioteke s 4 čvora i 4 GT. Diskretizirana mreža se sastoji od 40 KE i 63 čvora, kako je prikazano na slici 7.10. Rubni uvjeti ili stupnjevi slobode štapa su ravninski ekvivalent 1D štapu. Na početku štapa, za prva tri vertikalna čvorova 1, 2, 3 je postavljeno da su čvorovima 1 i 3 (donji i gornji čvor) onemogućeni pomaci duž osi X (uvjet "1"), dok je središnji čvor 2 fiksiran duž X i Y osi (uvjet "3"). Aksijalna sila definirana je da bude ekvivalentna opterećenju 1D štapa, $F/2$ djeluje u središnjem čvoru 62 a $F/8$ djeluje u čvorovima 61 i 62, čime je njihova suma jednaka F .

Kao materijal usvojen je tip materijala 4, ravninsko stanje naprezanja hiperelastičnog materijala u glavnim smjerovima. Ravninsko stanje naprezanja je odabrano tako da se može definirati debljina h štapa, pri čemu inicijalni volumen mora isti za sve dimenzionalne konfiguracije. Kod ravninskog stanja deformacije se smatra da je treća dimenzija relativno velika te se zbog toga može dobiti štاپ većeg volumena. Parametri materijala su isti kao i u 1D prikazu, uz definiranje debljine štapa.

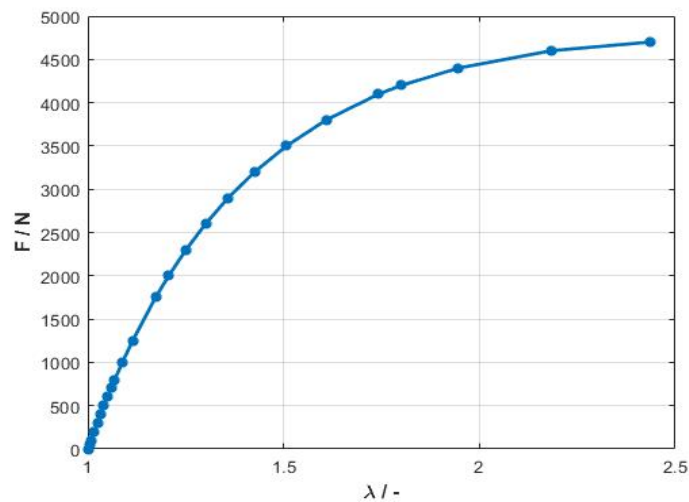
$$\begin{aligned}\rho &= 0 \text{ kg m}^{-3} \\ \mu &= 0,5 \text{ MPa} \\ \lambda &= 0,667 \text{ MPa} \\ h &= 0,1 \text{ m}\end{aligned}$$

Utjecaj same težine štapa i ovdje je zanemaren. Referentni čvor za pomake biti će čvor 62.

Tablica 7.10: Ulazni parametri 2D štapa za FFlagShyP program

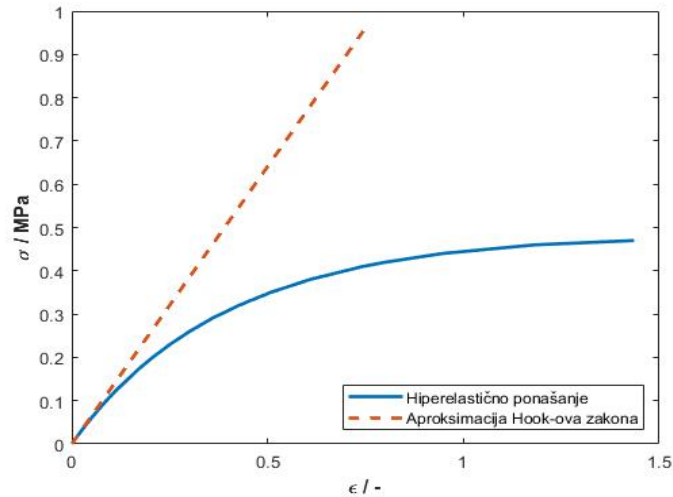
```

2-D stap test
quad4
63
1 1 0.0 -0.05
2 3 0.0 0.0
...
63 0 1.0 0.05
40
1 1 1 4 5 2
2 1 2 5 6 3
...
40 1 59 62 63 60
1
1 4
0.0 0.5e+6 0.6667e+6 0.1
3 0 0 0.0 0.0
61 1175 0.0
62 2350 0.0
63 1175 0.0
20 1 1 40 1.0e-3 0.0 0.0 1 0.0 62 1
    
```



Slika 7.11: Rezultati aksijalno opterećenog 2D štapa

Na slici se može vidjeti isto ponašanje kao kod 1D štapa, degresivna karakteristika između askijalne sile i istezanja. Sila se mijenja nelinearno s istezanjem štapa, te se i u 2D slučaju također javlja "asimptotska" sila do koje se štap više neće deformirati, nego bi trebalo doći do loma.

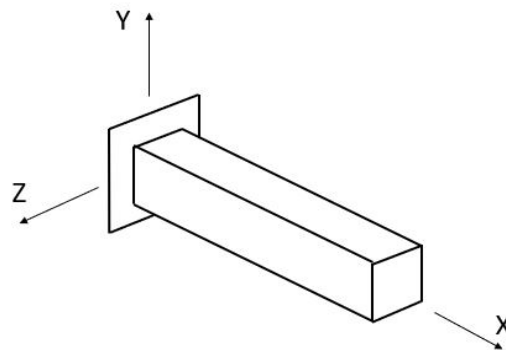


Slika 7.12: $\sigma - \epsilon$ dijagram za rastezanje 2D štapa

U $\sigma - \epsilon$ dijagramu za 2D štاپ se vidi ista karakteristika kao i za 1D štاپ kako bi trebalo da bude, iako se radi o ekvivalentnom 2D prikazu štapa. Cauchy-evo naprezanje σ je također izraženo preko inicijalne površine A , te deformacija ϵ je definirana isto, pomoću istežanja λ . Materijal pokazuje hiperelastično ponašanje kao i kod 1D štapa, velike deformacije za relativno male sile.

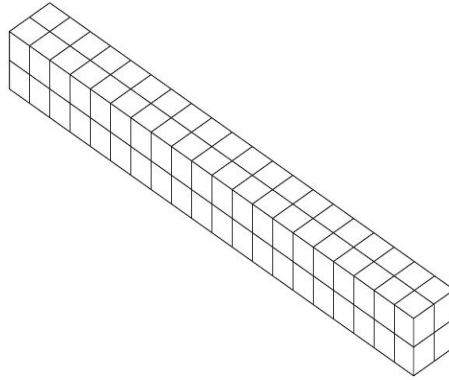
7.3.3. *FLagSHyP* proračun 3D štapa

U konačnici će se uraditi 3D ekvivalent gornjih štapa.



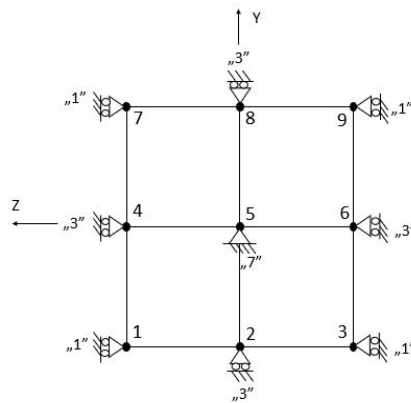
Slika 7.13: 3D konfiguracija štapa

Za KE uzet je heksaedar (kocka), naziva *hexa8* iz biblioteke s 8 čvorova i 8 GT. Dimenzije KE su $(0,05 \times 0,05 \times 0,05)$ m, što znači da se štاپ sastoji od 80 KE i 189 čvorova (slika 7.14).



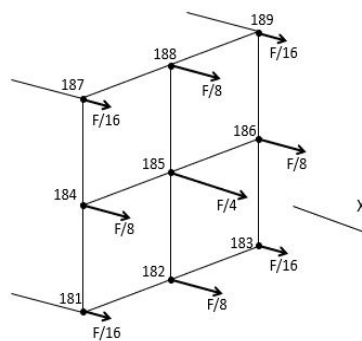
Slika 7.14: Diskretizirana mreža 3D štapa

Rubni uvjeti (stupnjevi slobode) za ravninu $YZ, X = 0$, gdje se nalaze čvorovi 1-9 su prikazani na slici 7.15, te je svaki čvor označen svojim kodom rubnog uvjeta prema tablici 7.2.



Slika 7.15: Rubni uvjeti za 3D štap

Da opterećenje bude ekvivalentno 1D i 2D štapovima sila je raspodijeljena po svim čvorovima ravnine na koju djeluje, kako se vidi na slici 7.16



Slika 7.16: Raspodjela sile na štapu

Suma svih komponenti sile je F .

Za materijal je usvojen tip **3**, 3D hiperelastičnost u glavnim smjerovima s parametrima

$$\rho = 0 \text{ kgm}^{-3}$$

$$\mu = 0,5 \text{ MPa}$$

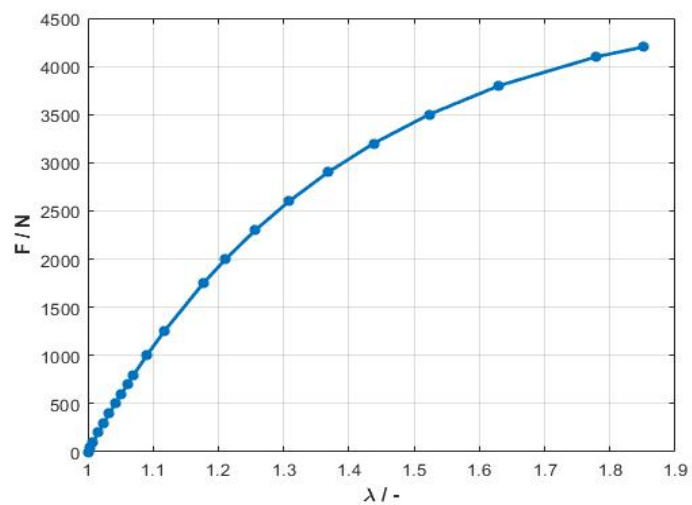
$$\lambda = 0,667 \text{ MPa}$$

Referentni čvor za pomake biti će čvor 185.

Tablica 7.11: Ulazni parametri 3D štapa za FFlagShyP program

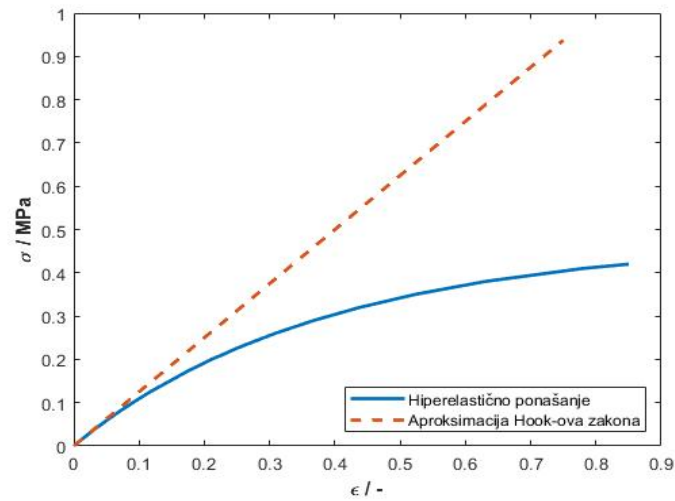
```

3-D Stap primjer
hexa8
189
1 1 0.0 -5.e-02 5.e-02
2 3 0.0 -5.0e-02 0.0
...
189 0 1.0e+00 5.0e-02 -5.0e-02
80
1 1 1 2 11 10 4 5 14 13
2 1 2 3 12 11 5 6 15 14
...
80 1 176 177 186 185 179 180 189 188
1
1 3
0.0 0.5e+6 0.6667e+6
9 0 0 0.0 0.0 0.0
181 281.25 0.0 0.0
182 562.5 0.0 0.0
...
185 1125 0.0 0.0
...
189 281.25 0.0 0.0
10 1 1 40 1.0e-6 0.0 0.0 1 0 185 1
    
```



Slika 7.17: Rezultati aksijalno opterećenog 3D štapa

3D štاپ pokazuje istu degresivnu karakteristiku ovisnosti $F(\lambda)$, kao i ostali štapovi.



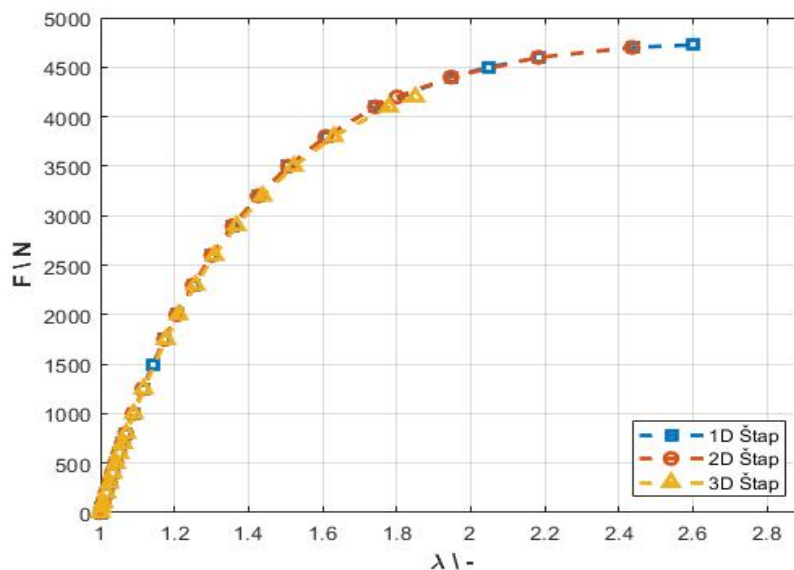
Slika 7.18: $\sigma - \epsilon$ dijagram za rastezanje 3D štapa

Svi parametri dijagrama su izraženi kao u prethodnim slučajevima. Pošto se radi o ekvivalentnom prostornom prikazu 1D štapa, karakteristike krivulje i razlika na aproksimaciju elastičnosti je ista kao u prijašnjim slučajevima. S obzirom da se očekivalo da rezultati budu podudarni s ostalima, za 3D štاپ također se vide glavne karakteristike hiperelastičnosti, velike deformacije uslijed relativno malih opterećenja.

7.3.4. Usporedba rezultata 3D, 2D i 1D štapa

Krivulje ovisnosti dobivene su inkrementalnim povećanjem sile F , pri čemu se za svaki inkrement izračunalo rastezanje λ pomoću referentnog pomaka.

S obzirom da su sve krivulje rastezanja približno iste, sada će se razmatrati pojedine razlike među njima.



Slika 7.19: Istezanja štapova u sve tri dimenzionalne konfiguracije

Rezultati pokazuju identične krivulje za sve tri dimenzionalne konfiguracije štapa. Ovakvi rezultati

su očekivani, pošto se radi o istom štapu s istim svojstvima materijala i geometrijom, ali u različitim dimenzionalnim konfiguracijama. Međutim, razlika postoji među rezultatima a to se odnosi na iznos maksimalne sile i rastezanja pojedine konfiguracije. Vidi se da 3D konfiguracija pokazuje najmanji iznos rastezanja i sile, zatim 2D pa 1D. 3D štap pokazuje maksimalno rastezanje od $\approx 85\%$ pri sili od $\approx 4,2$ kN, zatim 2D štap ima rastezanje od $\approx 140\%$ pri sili od $\approx 4,7$ kN. Naposljetku, najveće rastezanje ima 1D konfiguracija od $\approx 160\%$ pri sili od $\approx 4,7$ kN.

Svaki od modela materijala su približno slični, dok se njihove konstitutivne jednadžbe malo razlikuju. S ciljem prikaza malih razlika među tipovima materijala, predstaviti će se izrazi za Cauchy-evo naprezanje pojedinog tipa materijala. Tako za 3D štap gdje je tip materijala **3**, izraz za Cauchy-evo naprezanje glasi

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{2\mu}{J} \ln \lambda_{\alpha} + \frac{\lambda}{J} \ln J \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (7.2)$$

gdje su $\alpha\alpha$ indeksi glavnih smjerova koordinantnog sustava.

Za 2D štap je usvojen tip **4**, ravninsko stanje naprezanja za koje vrijedi da je naprezanje u trećoj dimenziji jednako nuli, $\sigma_{33} = 0$. Izraz za Cauchy-evo naprezanje je identičan kao i gore, uz malu razliku

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \\ \bar{\lambda} &= \gamma \cdot \lambda \\ J &= j^{\gamma} \quad (J = dv/dV; j = da/dA) \\ \sigma_{\alpha\alpha} &= \frac{2\mu}{J} \ln \lambda_{\alpha} + \frac{\bar{\lambda}}{J} \ln J \quad \alpha = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (7.3)$$

gdje je γ faktor smicanja.

Za 1D hiperelastičan-plastičan štap se računa Kirchhoff-ovo naprezanje pomoću izraza 3.27, te se tako određuju unutarnje sile u štapovima N_{α} . Konstitutivne jednadžbe 1D štapa se više razlikuju od 2D i 3D tipova materijala, jer se za 1D štap razmatra plastičnost, te se s tom razlikom očekivalo malo veće odstupanje rezultata 1D štapa.

S obzirom da se radi o istom štapu u različitim dimenzionalnim konfiguracijama, rezultati su kako je očekivano, identični uz razliku maksimalnog rastezanja. Korišteni tipovi materijala su iz biblioteke *FLagSHyP*, pri čemu su odabrani tipovi koji su približno slični za pojedinu dimenzionalnu konfiguraciju tako da se ostvari što pravilnija identičnost tipa materijala, uz pojedine razlike. Svojstva materijala su definirana tako da odgovaraju svakoj dimenzionalnoj konfiguraciji.

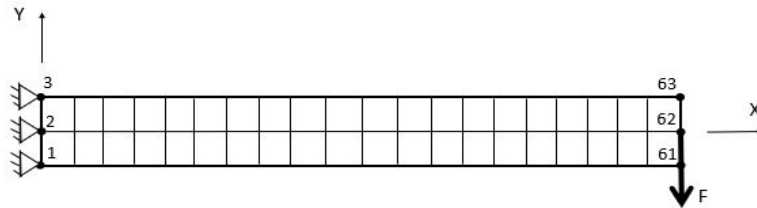
Moguće objašnjenje odstupanja rezultata dimenzionalnih prikaza istoga štapa jest numerička stabilnost proračuna. Štap većeg reda dimenzije ima složeniju geometriju, KE i samim time veći broj korištenih KE pri čemu je više konstitutivnih jednadžbi rješavano. S porastom složenosti geometrije raste i složenost rješavanja, posebno kod nelinearnih problema. Štap većeg reda dimenzije relativno je složeniji, zbog čega najvjerojatnije dolazi do ranijeg prekida programa za rješavanje (eng. *solver*).

7.4. Hiperelastična konzola

Nakon pregleda aksijalno opterećenih hiperelastičnih štapova, sada se može vidjeti kako bi se materijal ponašao pod drugačijim opterećenjem. U tu svrhu će se dati uvid u ponašanje materijala opterećenog savijanjem. Razmatrati će se 2D i 3D konfiguracija konzole opterećene na savijanje. 1D gredni element se ne može iskoristiti jer se ne nalazi u *FLagSHyP* biblioteci te će se zbog toga razmatrati samo 2D i 3D konzole. Dimenzije konzole i tip materijala će biti identični štapovima, uz promjenu opterećenja i rubnih uvjeta koji odgovaraju konzoli.

7.4.1. *FLagSHyP* proračun 2D konzole

2D konzola će imati iste dimenzije, duljinu i tip materijala kao i 2D štap, uz promjenu rubnih uvjeta i sile. Također će se radi dosljednosti zadržati ista diskretizacija od 63 čvora i 40 KE, quad4.



Slika 7.20: Diskretizacija 2D konzole

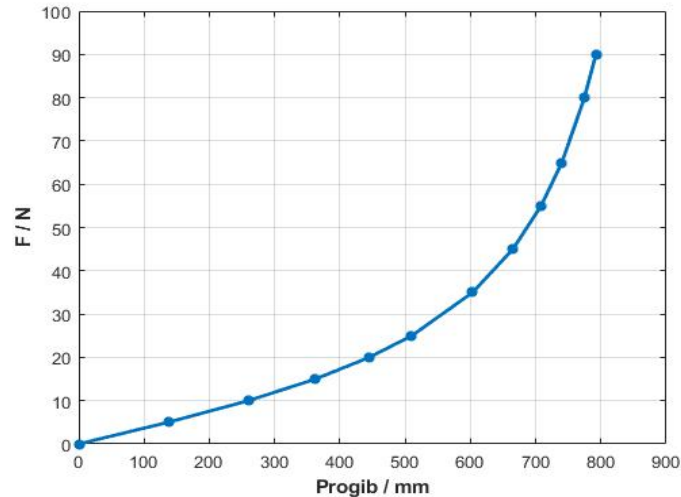
Za prva tri čvora diskretizacije je definiran rubni uvjet "3" prema tablici 7.2. Kao što je rečeno tip materijala ostaje isti kao i kod 2D štapa, tip 4 s istim svojstvima ($\rho = 0 \text{ kg m}^{-3}$, $\mu = 0,5 \text{ MPa}$, $\lambda = 0,667 \text{ MPa}$, $h = 0,1 \text{ m}$). Sila F djeluje u negativnom smjeru Y u čvoru 62, zato će progib čvora 62 odnosno vertikalni pomak biti referentan za deformaciju.

Tablica 7.12: Ulazni parametri 2D konzole za *FLagShyP* program

```

2-D konzola test
quad4
63
1 3 0.0 -0.05
2 3 0.0 0.0
3 3 0.0 0.05
...
63 0 1.0 0.05
40
1 1 1 4 5 2
2 1 2 5 6 3
...
40 1 59 62 63 60
1
1 4
0.0 0.5e+6 0.6667e+6 0.1
1 0 0 0.0 0.0
62 0.0 -90
20 1.0 1.0 20 1.0e-6 0.0 0.0 1 0.0 62 2

```

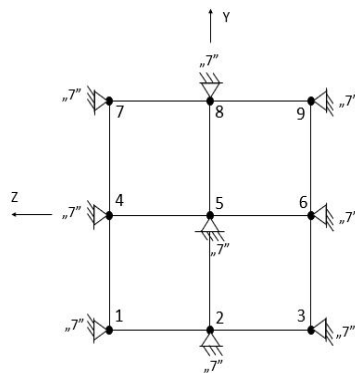


Slika 7.21: Rezultati savijanja 2D konzole

Rezultati pokazuju progresivnu nelinearnu vezu između sile savijanja F i progiba v . U početku je veza približno linearna, zatim za silu $F \approx 25$ N sila raste progresivno s progibom. Na maksimalnu vrijednost progiba od ≈ 800 mm (što je 80 % duljine konzole) utječe relativno mala sila savijanja od 90 N, te se može pretpostaviti da za veće vrijednosti sile dolazi do loma konzole.

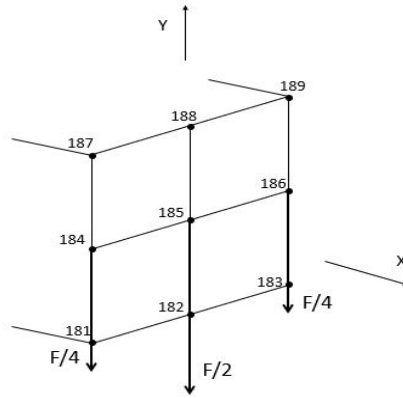
7.4.2. *FLagSHyP* proračun 3D konzole

Sada će se 2D konzola prikazati u svom ekvivalentnom 3D prikazu, s ekvivalentnim rubnim uvjetima i opterećenju. To znači da će geometrija biti ista kao i kod 3D štapa, uz promjenu rubnih uvjeta i opterećenja.



Slika 7.22: Rubni uvjeti 3D konzole

Diskretizacija je identična 3D štapa, s istim dimenzijama i odabirom KE (slika 7.14). Svi čvorovi ravnine YZ , $X = 0$ su definirani uvjetom "7" (tablica 7.2) što bi trebalo predstavljati uklještenje te ravnine. Sila savijanja je raspodijeljena po središnjim čvorovima zadnje YZ , $X = L$ ravnine, 184-186, što bi trebao biti ekvivalent opterećenja 2D konzole.



Slika 7.23: Raspodjela sile na 3D konzoli

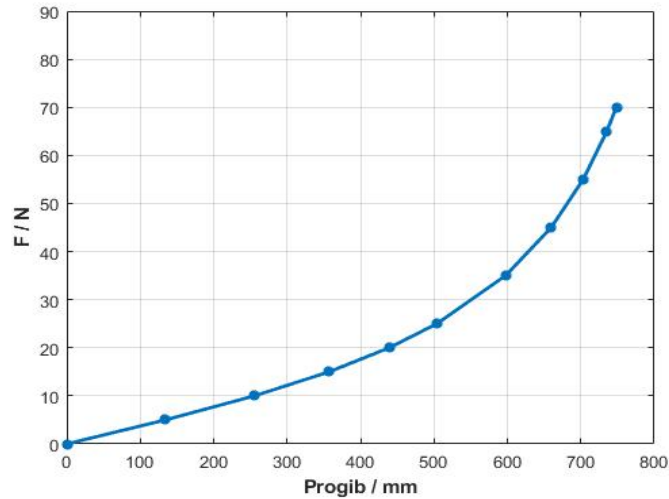
Tip materijala je isti kao kod 3D štapa, tip 3 s istim svojstvima kao i 3D štap. Referentni čvor za progib konzole će biti čvor 185.

Tablica 7.13: Ulazni parametri 3D konzole za FFlagShyP program

```

3-D konzola primjer
hexa8
189
1 7 0.0 -5.e-02 5.e-02
2 7 0.0 -5.0e-02 0.0
...
189 0 1.0e+00 5.0e-02 -5.0e-02
80
1 1 1 2 11 10 4 5 14 13
2 1 2 3 12 11 5 6 15 14
...
80 1 176 177 186 185 179 180 189 188
1
1 3
0.0 0.5e+6 0.6667e+6
3 0 0 0.0 0.0 0.0
184 0.0 -21.25 0.0
185 0.0 -42.5 0.0
186 0.0 -21.25 0.0
10 1 1 20 1.0e-5 0.0 0.0 1 0 185 2

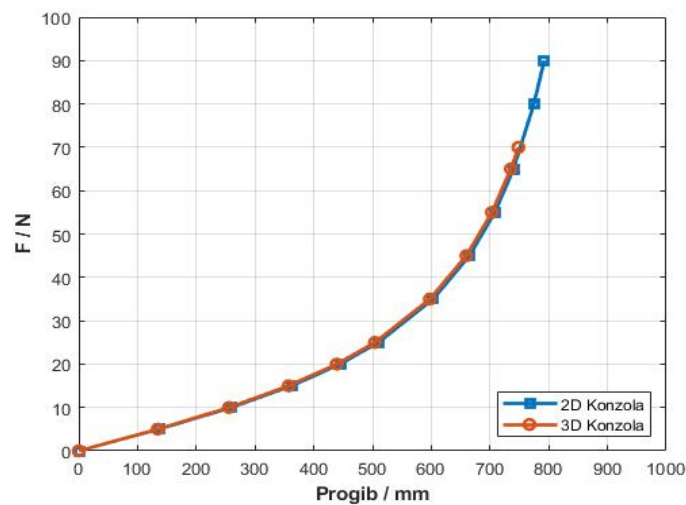
```



Slika 7.24: Rezultati savijanja 3D konzole

Kao i kod 2D konzole, javlja se ista progresivna nelinearna veza između sile savijanja F i progiba v . Veza je približno linearna do vrijednosti $F \approx 25$ N odakle počne progresivno rasti s progibom (identično kao i 2D štap). Maksimalni progib od ≈ 750 mm se postiže pri vrijednosti sile od ≈ 70 N.

7.4.3. Usporedba rezultata 2D i 3D konzole

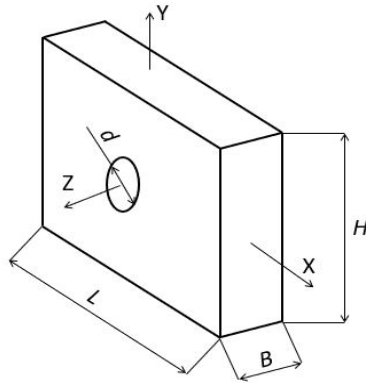


Slika 7.25: Rezultati savijanja 3D konzole

Krivulje ovisnosti dobivene su istim načinom kao kod štapova, inkrementalnim povećanjem sile F te izračunom odgovarajućeg rastezanja λ . Kao što se može vidjeti na gornjoj slici, rezultati savijanja konzola imaju identične karakteristike. Primjeri konzole su identični za 2D i 3D konfiguracije, zbog čega obe krivulje pokazuju podudaranje vrijednosti, inicijalni (približno) linearni oblik do $F \approx 25$ N te zatim progresivni nelinearni oblik krivulje. Ista razlika u maksimalnim deformacijama koja se javila kod štapova se javlja i kod konzola. 3D konzola ima najmanji maksimalni progib (≈ 750 mm), zatim 2D konzola (≈ 800 mm) u istom slijedu kao kod štapova. Iako su konzole definirane istim (približno istim) materijalom i svojstvima, javlja se isti uzorak rezultata kao kod štapova. Objašnjenje je isto kao i kod štapova, tj. porastom dimenzionalnog reda konzole raste složenost problema zbog čega je zadatak numerički nestabilniji u odnosu na problem manjeg dimenzionalnog reda prikaza.

7.5. Ploča s rupom

U sljedećem koraku razmatrati će se hiperelastična ploča s rupom u sredini. Takva ploča će se rastezati s dvije strane (simetrično opterećenje), te analizirati kako se ponaša ovakva hiperelastična geometrija.



Slika 7.26: Izometrijski prikaz ploče s rupom

Tablica 7.14: Dimenzije ploče s rupom

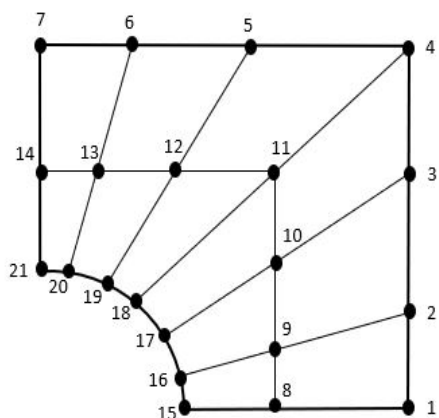
| Dimenzija | Vrijednost / mm |
|--------------|-----------------|
| Duljina, L | 60 |
| Visina, H | 60 |
| Širina, B | 20 |
| Promjer, D | 20 |

Vlak $p = 0,25$ MPa će djelovati kao vlačno opterećenje čija je rezultirajuća sila za danu geometriju $F = 30$ N. Rupa se nalazi na sredini ploče s koordinatama središta rupe $X = 30$ mm, $Y = 30$ mm, te prolazi cijelom dužinom ploče.

Kao dosada, ploča će se razmatrati u svojim 2D i 3D konfiguracijama.

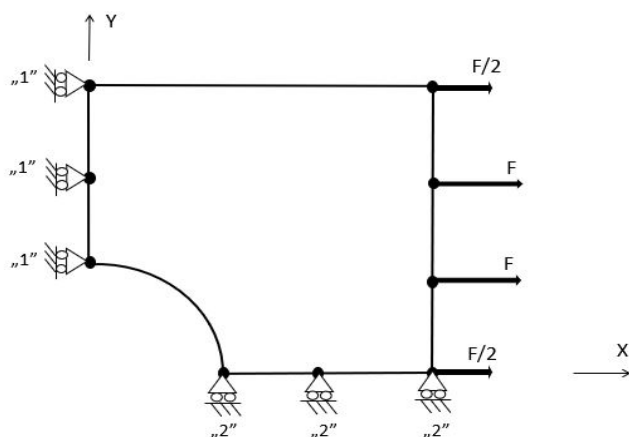
7.5.1. *FLagSHyP* proračun 2D ploče s rupom

Radi simetrije ploče promatrati će se jedna četvrtina ploče. Diskretizacija mreže četvrtinskog modela može se vidjeti na slici ispod:



Slika 7.27: Diskretizacija četvrtinskog modela 2D ploče s rupom

Cijela mreža sastoji se od 21 čvora i 12 KE, tipa quad4.



Slika 7.28: Opterećenje i rubni uvjeti 2D ploče s rupom

Sila rastezanja F uslijed vlakla p djeluje u svim čvorovima po stranicama ploče. Međutim, ovdje se radi o četvrtinskom modelu te silu tada treba raspodijeliti po čvorovima (slika 7.28). Rubni uvjet "1" je dan za donje oslonce duž X osi, a za oslonce duž Y osi definiran je uvjet "2" (tablica 7.2). Ploča će se razmatrati za dva stanja opterećenja: ravninsko stanje naprezanja (tip materijala 4) i ravninsko stanje deformacije (tip materijala 3). Svojstva materijala su:

$$\begin{aligned}\rho &= 0 \text{ kg m}^{-3} \\ \mu &= 0,5 \text{ MPa} \\ \lambda &= 0,667 \text{ MPa} \\ h &= 20 \text{ mm}\end{aligned}$$

Za ravninsko stanje deformacije debljina h teoretski je beskonačna, međutim program *FLagSHyP* usvoji jedničnu debljinu odnosno debljinu od 1 m. Zbog tog razloga sila u ravninskom stanju deformacije će se uvećati s 30 N na 1500 N odnosno $\times 50$ više jer debljina također poraste za $\times 50$ (s 20 mm na 1000mm).

Tablica 7.15: Ulazni parametri ravninskog stanja naprezanja četvrtinskog modela 2D ploče s rupom za FFlagShyP program

```

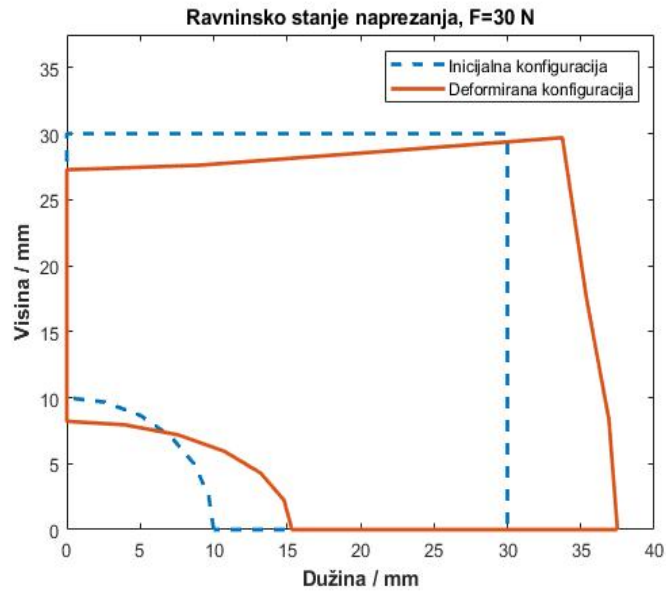
2d ploca s rupom - test
quad4
21
1 2 30 0
2 0 30 8.04
...
21 1 0 10
12
1 1 1 2 9 8
2 1 2 3 10 9
...
12 1 13 14 21 20
1
1 4
0.0 0.5 0.667 20
4 0 0 0.0 0.0
1 15 0
2 30 0
3 30 0
4 15 0
20 1 1 30 1.0e-5 -10.0 0.0 1 0.0 0 0
    
```

Ulazni parametri za ravninsko stanje deformacije su isti kao za ravninsko stanje naprezanja uz razliku definiranja tipa materijala i sile.

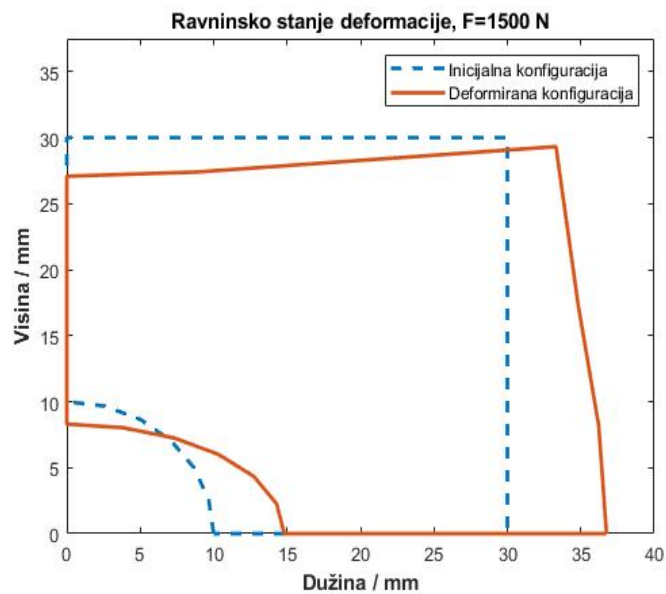
Tablica 7.16: Ulazni parametri ravninskog stanja deformacije četvrtinskog modela 2D ploče s rupom za FFlagShyP program

```

2d ploca s rupom - test
...
1
1 3
0.0 0.5 0.667
4 0 0 0.0 0.0
1 750 0
2 1500 0
3 1500 0
4 750 0
20 1 1 30 1.0e-5 -10.0 0.0 1 0.0 0 0
    
```

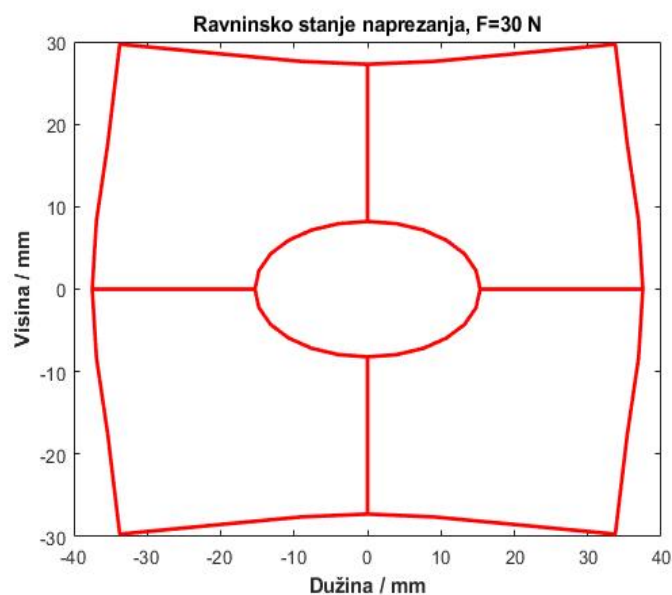


Slika 7.29: Rezultat rastezanja četvrtine 2D ploče silom $F = 30 \text{ N}$ za ravninsko stanje naprezanja

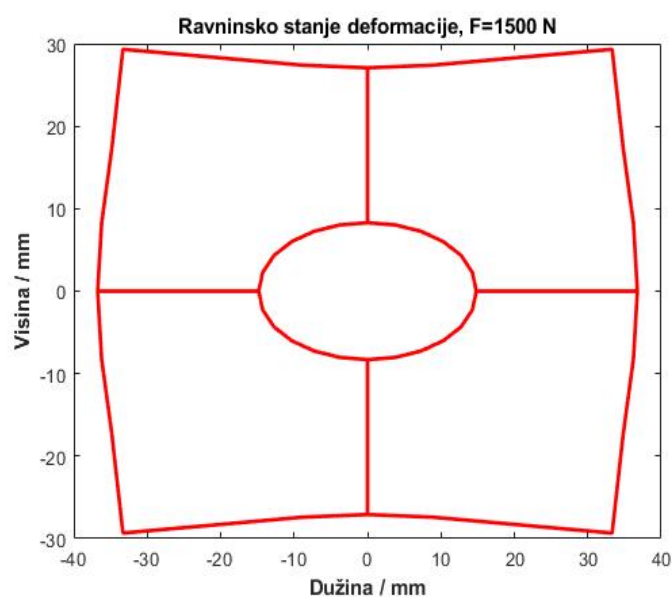


Slika 7.30: Rezultat rastezanja četvrtine 2D ploče silom $F = 1500 \text{ N}$ za ravninsko stanje deformacije

S obzirom na simetriju, prikazati će se rezultati čitave ploče tako što će se reflektirati gornji rezultati s ciljem vizualnog prikaza deformacija cijele ploče:



Slika 7.31: Rezultat rastezanja cijele 2D ploče silom $F = 30 \text{ N}$ za ravninsko stanje naprezanja



Slika 7.32: Rezultat rastezanja cijele 2D ploče silom $F = 1500 \text{ N}$ za ravninsko stanje deformacije

Vertikalna i horizontalna linija po sredini ploče na slici 7.31 definiraju osi simetrije. Nova visina h i duljina ploče l razmatrati će se duž tih linija. Nove vrijednosti h i l za pojedinu silu su:

Tablica 7.17: Nova referentna visina h i duljina l 2D ploče

| F / N | l / mm | h / mm |
|-----------------------------|-----------------|-----------------|
| 0 | 60 | 60 |
| 30 (ravn. stanje napr.) | 75 | 54,54 |
| 1500 (ravn. stanje deform.) | 73,5 | 54,16 |

Također će se razmatrati deformacija rupe na sredini ploče. U nedeformiranom stanju radilo se o

kružnici promjera 20 mm, no kao što se može vidjeti na slikama gore kružnica se deformira u elipsu. U tu svrhu iskazati će se poluosi elipse, pri čemu će se definirati da je a poluos duž osi x , a b poluos duž osi y (simetričnam problem pa su i deformacije simetrične).

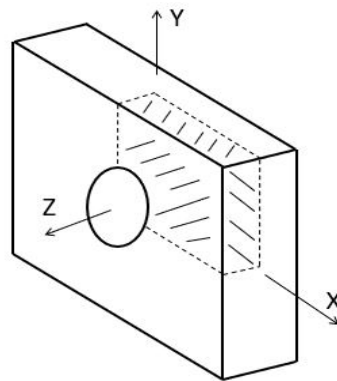
Tablica 7.18: Dimenzije poluosi deformirane rupe

| F / N | a / mm | b / mm |
|-----------------------------|-----------------|-----------------|
| 0 | 10 | 10 |
| 30 (ravn. stanje napr.) | 15,33 | 8,2 |
| 1500 (ravn. stanje deform.) | 14,81 | 8,3 |

Rezultati deformacija rupe su očekivani, inicijalna kružnica teži obliku elipse s velikom poluosi a i suženjem poluosi b

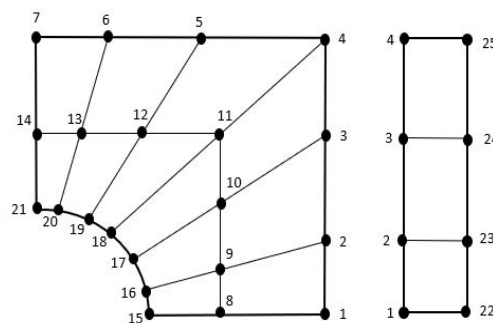
7.5.2. *FLagSHyP* proračun 3D ploče s rupom

Zbog simetričnosti primjera razmatrati će se jedna osmina cijele ploče, kako je prikazano na slici ispod. Domena osminskog modela je $X \in [0, 30]$, $Y \in [0, 30]$ i $Z \in [0, 10]$.

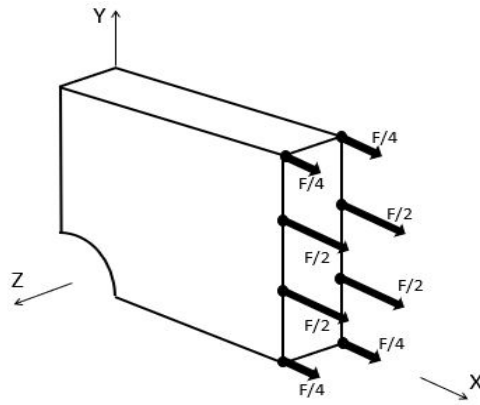


Slika 7.33: Razmatrana osmina 3D ploče s rupom

Osmiina ploče treba biti ekvivalentna četvrtinskom modelu 2D ploče.

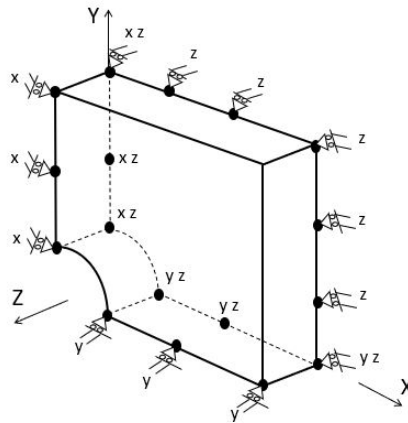


Slika 7.34: Diskretizacija 3D ploče s rupom



Slika 7.35: Opterećenje 3D ploče

Kad se uzme u obzir simetrija modela i ekvivalentnost 2D modelu ploče, sile su zadane tako da u ravnini YZ za $X = 30$ gornja dva i donja dva čvora djeluje $F/4$, dok u čvorovima između djeluje $F/2$ (slika 7.35). Sve sile djeluju u smjeru X .



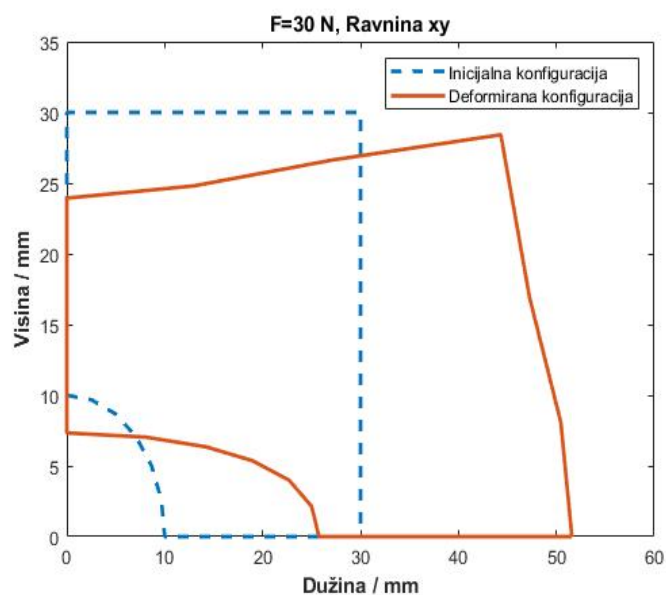
Slika 7.36: Rubni uvjeti osminskog modela 3D ploče

Što se tiče rubnih uvjeta, definirani su tako da odgovaraju ravninskom stanju naprezanja. Model bi se trebao sužavati uz uvjet da svi čvorovi u ravnini XY , $Z = 0$ nemaju pomake duž Z osi a ostalo je isto kao kod 2D četvrtinskog modela. Na slici 7.36 se vidi definiranje rubnih uvjeta čvorova, gdje se zbog relativno velikog broja čvorova uz svaki čvor navele fiksirane osi (osi duž kojih nema pomaka) umjesto dosada već viđenih kodova rubnih uvjeta (radi jednostavnosti prikaza). Referentne ravnine deformacije biti će ravnine oplošja osminskog modela, tj. XY za $Z = 10$, YZ za $X = 30$ te ZX za $Y = 30$.

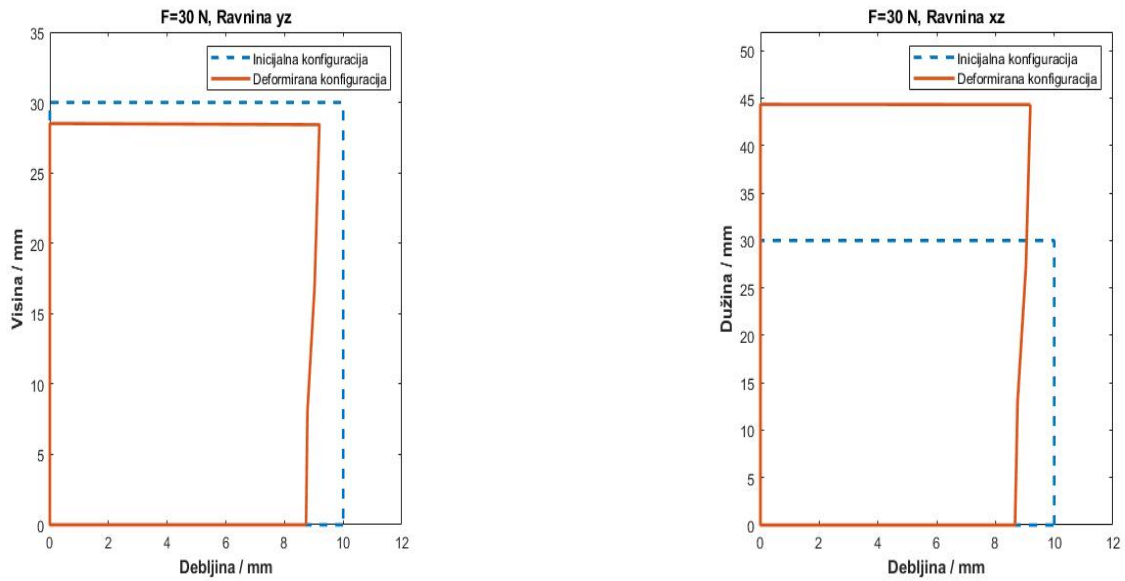
Tablica 7.19: Ulazni parametri osminskog modela 3D ploče s rupom za FFlagShyP program

```

3D ploca s rupom-test
hexa8
42
1 2 30 0 0
2 0 30 8.04 0
...
42 5 0 10 10
12
1 1 1 2 9 8 22 23 30 29
2 1 2 3 10 9 23 24 31 30
...
12 1 13 14 21 20 34 35 42 41
1
1 3
0.0 0.5 0.667
8 0 0 0.0 0.0 0.0
1 7.5 0.0 0.0
2 15 0.0 0.0
3 15 0.0 0.0
4 7.5 0.0 0.0
22 7.5 0.0 0.0
23 15 0.0 0.0
24 15 0.0 0.0
25 7.5 0.0 0.0
20 1 1 30 1.0e-5 -10.0 0.0 1 0.0 0 0
    
```

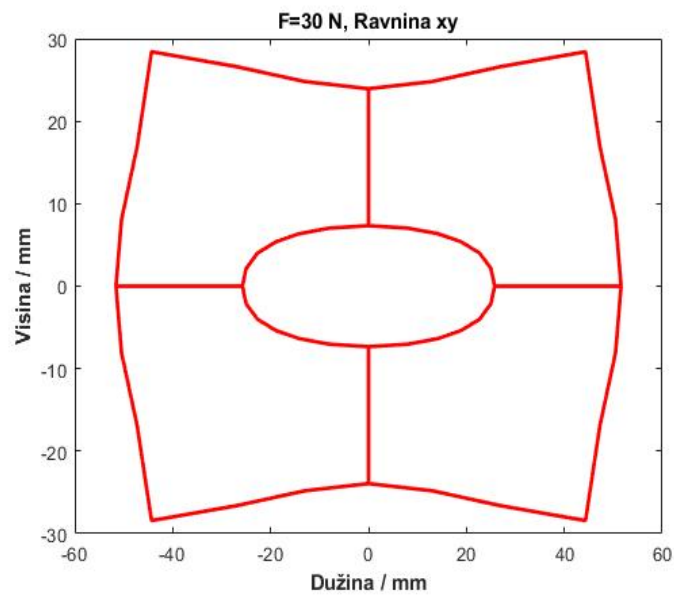


Slika 7.37: Rezultat rastezanja osminskog modela 3D ploče u xy ravнини za $F = 30$ N

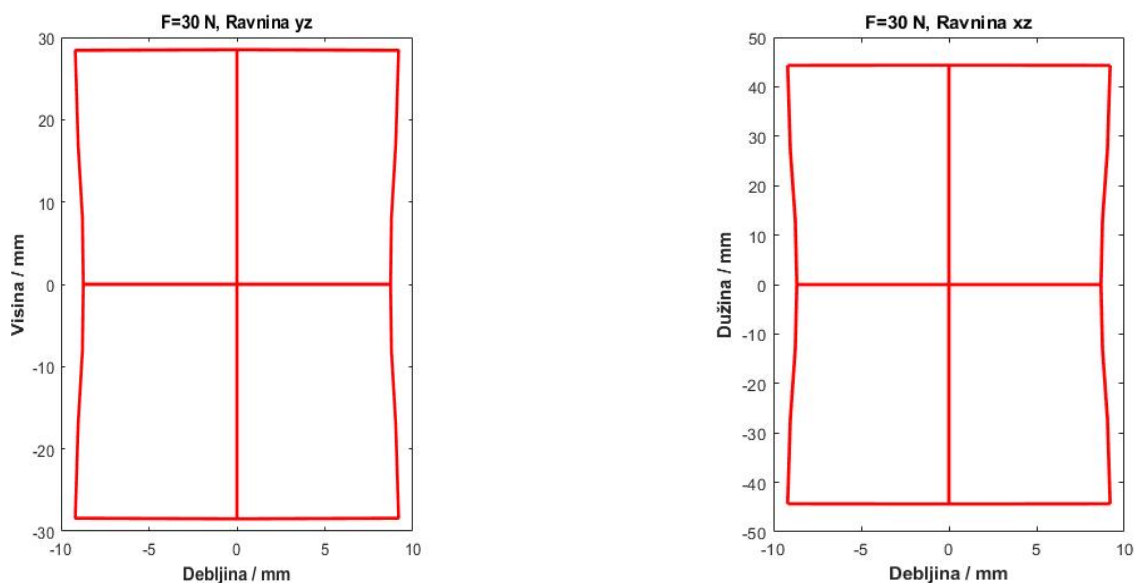


Slika 7.38: Rezultati rastezanja osminskog modela 3D ploče u yz (lijevo) i xz ravnini (desno) pri $F = 30 \text{ N}$

Zbog simetrije primjera, prikazati će se deformacije cijele ploče u svim referentnim ravninama:



Slika 7.39: Rezultat rastezanja cijele 3D ploče u xy ravnini za $F = 60 \text{ N}$



Slika 7.40: Rezultati rastezanja cijel 3D ploče u yz (lijevo) i xz ravnini (desno) pri $F = 30$ N

Rezultati u xy ravnini odnose se na pogled sprijeda cijele ploče na slici 7.26, yz ravnina odnosi se na pogled s boka a u xz ravnina na pogled od gore. Nova visina h i duljina l će se odrediti kao kod 2D ploče pomoću xy ravnine, dok će debljina b biti definirana iz yz ravnine pomoću središnje horizontalne linije s slike 7.40. Navedena linija predstavlja debljinu ploče duž z koordinate.

Tablica 7.20: Nove dimezije deformirane 3D ploče

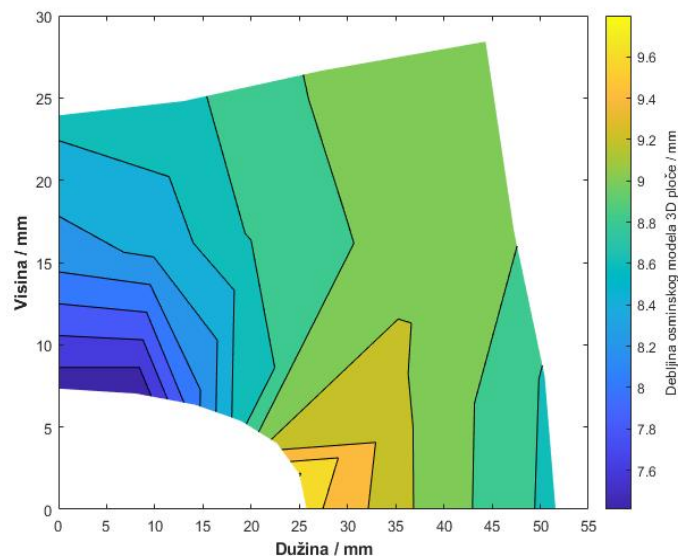
| F / N | l / mm | h / mm | b / mm |
|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 0 | 60 | 60 | 20 |
| 30 | 103,2 | 47,88 | 17,46 |

I za 3D ploču će se iskazati dimezije rupe nakon deformacije, odnosno eliptičnog cilindra. Poluosi a i b će se vidjeti u ravnini xy , dok će se za visinu cilindra uzeti debljina ploče u ravnini xz u presjeku $x = 0$ $y = 10$ odnosno razlika z koordinata čvorova 42 i 21.

Tablica 7.21: Dimezije poluosi deformirane rupe

| F / N | a / mm | b / mm | h_{el} / mm |
|----------------|-----------------|-----------------|----------------------|
| 0 | 10 | 10 | 20 |
| 30 | 20,29 | 7,77 | 14,93 |

Deformacije u xy ravnini prate očekivan uzorak pri povećanju sile. Referentna duljina l raste, dok se visina h i širina b smanjuju. Rupa također ima očekivan uzorak deformacija, gdje poluos a raste zbog rasta duljine l , poluos b se sužava zbog suženja visine te visina elipse h_{el} također ima negativan gradijent.

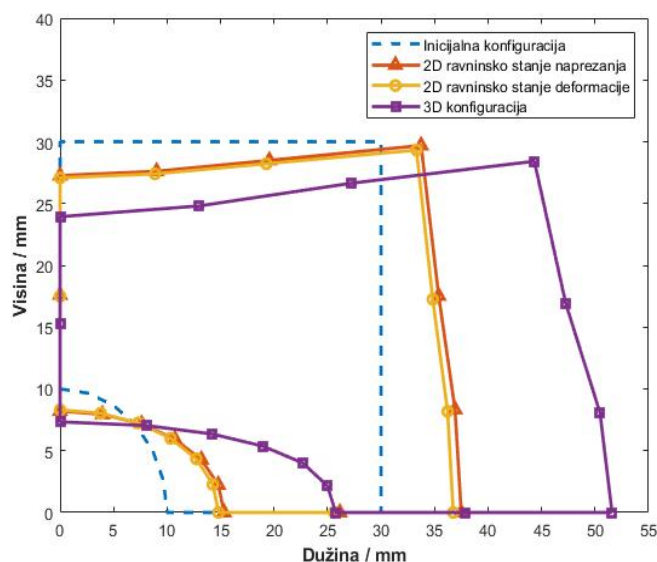


Slika 7.41: Polje debljine b osminskog modela 3D ploče u xy ravnini za $F = 30$ N

Gornja slika prikazuje kako se mijenja debljina b osminskog modela 3D ploče u xy ravnini, opterećen rastezanjem. Zbog simetričnosti problema lako se može vidjeti kako se debljina mijenja za cijelu ploču. Na slici se vidi da najveće smanjenje debljine ploče se događa na mjestu smanjenja poluosi b elipse, odnosno iznad i ispod rupe.

7.5.3. Usporedba rezultata 2D i 3D ploče

Za referencu usporedbe deformacija uzeti će se xy ravnina četvrtinskog 2D odnosno osminskog 3D modela:



Slika 7.42: Rezultati rastezanja ploče s rupom u xy ravnini za sve konfiguracije

U odnosu na prethodne primjere, u slučaju primjera ploče s rupom 3D konfiguracija pokazuje veće deformacije od 2D konfiguracija. Kod 2D primjera radi se o ravninskom stanju naprezanja i deformacije s debljinom $B = 20$ mm odnosno automatskom debljinom $B = 1000$ mm, dok je 3D primjer ploče osminski

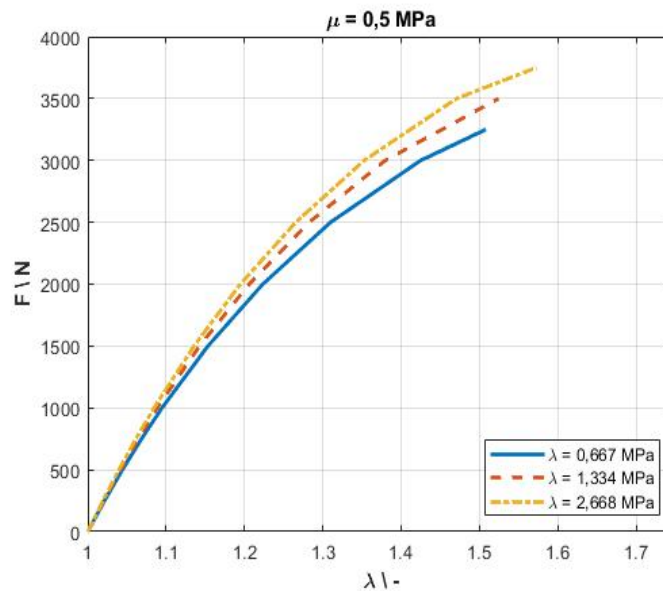
ekvivalent 2D ploči. Ravninski primjeri imaju približno jednake rezultate uz malo veće deformacije ravninskog stanja napreznja.

7.6. Utjecaj svojstva materijala

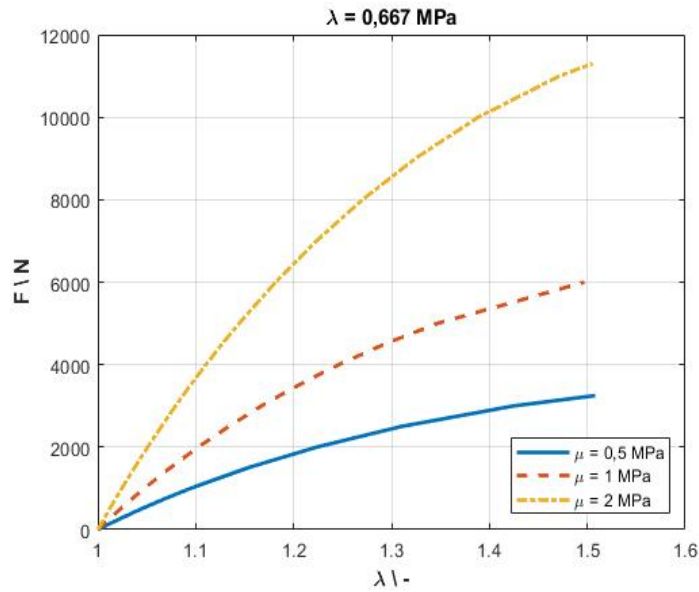
U kontekstu hiperelastičnih materijala, gdje se javljaju velike deformacije, postavlja se pitanje koliko doista utječu svojstva na ponašanje materijala? U tu svrhu će se uzeti 2D štap iz poglavlja 7.3.2, s već definiranim dimenzijama i diskretizacijom. Opteretiti će se na isti način kao u navedenom poglavlju, vlačnom silom. Zadržati će se isti tip materijala **3**, te će se varirati traženi parametri odnosno Lamé-ove konstante μ i λ da se dobije pregled njihova utjecaja.

Referentne vrijednosti parametara su $\mu = 0,5$ MPa i $\lambda = 0,667$ MPa. Za jednu referentnu vrijednost varirati će se drugi parametar. Tako će se za $\mu = 0,5$ MPa varirati tri vrijednosti λ i obratno. Vrijednosti parametara za svaku iteraciju biti će udvostručene:

$$\begin{aligned}\mu_0 &= 0,5 \text{ MPa}; & \lambda_0 &= 0,667 \text{ MPa} \\ \mu_1 &= 1 \text{ MPa}; & \lambda_1 &= 1,334 \text{ MPa} \\ \mu_2 &= 2 \text{ MPa}; & \lambda_2 &= 2,668 \text{ MPa}\end{aligned}$$



Slika 7.43: Utjecaj λ pri $\mu = \text{const.}$ za aksijalno opterećenje



Slika 7.44: Utjecaj μ pri $\lambda = const.$ za aksijalno opterećenje

Rezultati su prikazani u već viđenoj ovisnosti $F(\lambda)$.

Među svojstvima materijala najveći utjecaj na krutost materijala ima prva Lamé-ova konstanta μ , dok druga Lamé-ova konstanta λ ima manji utjecaj u usporedbi s μ . S povećanjem parametra λ krivulje $F(\lambda)$ zadržavaju približno isti oblik uz malo povećanje maksimalnog istežanja pri približno jednakim silama. Dok se pri povećanju parametra μ vidi velik utjecaj na iznos maksimalne sile pri približno jednakim istežanjima štapa. Za najveće istežanje $\lambda \approx 1,5$ pokazati će se iznosi maksimalnih vlačnih sila pri pojedinoj vrijednosti μ :

Tablica 7.22: Vrijednosti max. tlačnih i vlačnih sila za vrijednosti μ

| μ / MPa | $\lambda \approx 1,5$ |
|-------------|-----------------------|
| | F_{vlak} / N |
| 0,5 | 3250 |
| 1 | 6000 |
| 2 | 11300 |

Rastom parametra μ za dvostruku vrijednost, sile koje uzrokuju maksimalno rastezanje su skoro dvostruko veće u odnosu na prethodne. Za porast parametra μ s 0,5 MPa na 1 MPa maksimalna sila rastezanja poraste za 84,6%. Pri porastu μ s 1 MPa na 2 MPa sila rastezanja poraste za 88,3%. Naravno, svi iznosi sila za određenu vrijednost μ se odnose za istu vrijednost deformacije λ odnosno rastezanja.

8. ZAKLJUČAK

Cilj je ovoga rada pružiti uvid u nelinearnu mehaniku kontinuuma hiperelastičnih materijala u stanju ravnoteže. Sa tom svrhom prikazani se osnovni pojmovi vezani za gibanje deformabilnog tijela, jednadžbe ravnoteže te je navedeno više primjera naprezanja s njihovim konjugiranim deformacijama. Uz opis hiperelastičnih materijala i njihovih konstitutivnih jednadžbi, predložen je i postupak linearizacije njihovih jednadžbi ravnoteže i principa virtualnog rada. U konačnici, opisan je postupak diskretizacije nelinearne formulacije konačnih elemenata i upotreba *F*LagSHyP programa za rješavanje nelinearnih problema.

*F*LagSHyP program sadrži biblioteku potrebnih funkcija za diskretizaciju i rješavanje hiperelastičnih nelinearnih problema u MatLab-u. Kako bi se pokazalo ponašanje hiperelastičnih materijala pod raznim vrstama opterećenje, u radu su riješeni određeni statički primjeri. Prilikom toga, korišteni su KE i tipovi materijala koji se nalaze u sklopu biblioteci *F*LagSHyP.

Odabrani primjeri jesu 3D, 2D i 1D štapovi, opterećeni vlačnom silom, 3D i 2D konzola, 3D i 2D ploča s rupom opterećena rastezanjem. Definirani su istim materijalom, hiperelastičnost u glavnim smjerovima i jednakim svojstvima materijala. Bitno ograničenje za odabrani tip materijala jest izotropnost. Naposljetku, prikazan je utjecaj vrijednosti svojstva materijala na primjeru 2D štapa opterećenog tlačnom silom. Dimenzionalni prikazi pojedinog problema definirani su da budu ekvivalentni ostalim prikazima uz male razlike konstitutivnih jednadžbi.

Rezultati vezani uz razvlačenje štapova pokazuju nelinearna degresivnu ovisnost sile (naprezanja) o deformaciji. Za referentnu mjeru deformacije je usvojeno rastezanje λ , omjer početne i trenutne duljine. Krivulje *naprezanje-deformacija* su dobivene inkrementalnim porastom sile F i deformacijom uslijed pojedine vrijednosti sile. Uočeno je da materijal s porastom sile ima degresivnu karakteristiku porasta deformacija do određene vrijednosti maksimalne sile za pojedini dimenzionalni prikaz. Maksimalna sila deformacije ili istezanja, definirala se kao "asimptotska" sila. Teoretski, kako se nominalna sila opterećenja približava toj "asimptotskoj" sili, limes rastezanja teži u beskonačnost dok u stvarnosti najvjerojatnije dolazi do loma modela. Među dobivenim podacima, zanimljivo jest da je 1D štap imao najveću vrijednost maksimalne sile i istezanja, zatim 2D štap pa naposljetku 3D štap s najmanjim iznosom maksimalne sile i istezanja u odnosu na prethodna dva. Objašnjene ovakvog slijeda rezultata krije se u složenosti geometrije za štap većeg dimenzionalnog prikaza. Štap većeg reda dimenzije ima složenije KE, više konstitutivnih jednadžbi koje je potrebno riješiti te je zbog toga takav problem numerički nestabilniji i dolazi do prijevremenog prekida programa za rješavanje.

Konzola je prikazana u 2D i 3D ekvivalentnim konfiguracijama zbog toga što se kod 1D problema može koristiti samo štap (eng. "truss"). Pri savijanju konzola, dobivena je progresivna nelinearna ovisnost $F(\lambda)$. Kao i kod štapova, 2D konzola pokazivala je najveće vrijednosti maksimalne sile savijanja i progiba, a zatim i 3D konzola. Razlog tome je isti kao kod štapova, numerička stabilnost konfiguracije manjeg dimenzionalnog reda.

Kod ploče s rupom, radi simetrije su razmatrani četvrtinski model 2D ploče, te osminski model 3D ploče. 2D četvrtinski model razmatran je u ravninskom stanju naprezanja i deformacije. Oba dimenzionalna prikaza opterećana su s vlačnim opterećenjem $p = 0,25$ MPa čija je rezultirajuća vlačna sila $F = 30$ N osim slučaja ravninskog stanja deformacije gdje je debljina automatski porasla za 50 puta, te je zbog ekvivalentnosti 2D modela sila uvećana za 50 puta veću vrijednost, 1500 N. Rezultati su prikazani u odgovarajućim ravninama modela. Rezultati rastezanja ploče imali su očekivane vrijednosti deformacije i deformirani oblik geometrije modela. U odnosu na prošle primjere, 2D konfiguracije ploče (ravninsko stanje deformacije i naprezanja) imaju približno jednake rezultate te pokazuju manje deformacije od 3D ploče za ekvivalentnu vrijednost sile.

Kod analize utjecaja svojstva materijala, ispitan je 2D štap opterećen vlačnim silama s tipom materijala "hiperelastičnost u glavnim smjerovima". Dva bitna parametra kod opisa takvog tipa materijala jesu

Lamé-ove konstante, gdje prva Lamé konstanta, koja je ujedno i modul smicanja G , ima najveći utjecaj na krutost materijala.

Kod štapova i konzola korišten je N-R postupak, dok je zbog složenosti primjera ploče s rupom upotrijebljena *Linijaska metoda traženja* (eng. *Line Search Method*).

Kod definiranja tipa materijala, u praksi se koristi sasvim drugi pristup. Za dani tip materijala i njegova svojstva, u radu je ispitivano ponašanje određenog materijala pod raznim vrstama opterećenja. U praksi se pak koristi neki hiperelastični materijal (npr. guma, polimer itd.) koji se ispituje na kidalici na vlak i primjerenim uređajima na savijanje ili smicanje itd. S obzirom na rezultate deformacija i sila, odabire se neki model hiperelastičnog materijala (neo-Hook, Mooney-Rivlin, Ogden, Yeoh itd.) čije je ponašanje i funkcija akumulirane energije deformacije unaprijed poznata te se najbolje podudara s ispitanim materijalom. Na temelju vrijednosti ispitivanja, određuju se konstante akumulirane funkcije energije deformacije odabranog modela materijala koje će najbolje opisivati ispitivani materijal.

Za svaki tip riješenog primjera (štap, konzola, ploča s rupom), pri čemu su sve dimenzionalne konfiguracije ekvivalentne, dobivene su identične krivulje uz relativno velike razlike maksimalne sile i odgovarajuće deformacije. Zanimljiva je činjenica da je kod svih problema 1D konfiguracija imala najveće sile i deformacije, a nakon nje 2D pa 3D. Kod konzola, 2D konfiguracije imale su najveće sile i deformacije a nakon njih 3D. Jedini izuzetak ovakvog ponašanja rezultata se pojavio kod primjera ploče, gdje je 3D konfiguracija imala veće deformacije od 2D. Iako su sve konfiguracije ekvivalentne te imaju male razlike među konstitutivnim jednadžbama, najveće deformacije ostvarile su konfiguracije manjeg reda dimenzije osim u slučaju ploče. Modeli manjeg reda dimenzije su numerički stabilniji te ih program može rješavati za veće vrijednosti opterećenja od modela većeg reda dimenzije.

Na temelju svega rečenog, dobiveni su zanimljivi podatci koji otvaraju prostor za daljnja istraživanja.

LITERATURA

- [1] Bonet J., Gil A.J., Wood R.D.: „Nonlinear Solid Mechanics for Finite Element Analysis: Statics”, Cambridge University Press, University of Cambridge, UK, 2016
- [2] WELSIM, Finite Element Analysis Software: „Hyperelastic material model Arruda-Boyce for Nonlinear Finite Element Analysis”, s Interneta, <https://welsim.com/blogs/post/Pfsrf2CXMcMs3xC9i>, 15. studenog 2020.
- [3] Wikipedia: „Hyperelastic material”, s Interneta, https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperelastic_material, 5. prosinac 2020.
- [4] FLagSHyP softver: „Nonlinear Solid Mechanics for Finite Element Analysys: Statics - FLaGSHyP Software”, s Interneta, <http://www.flagshyp.com/>, 8. prosinac 2020.
- [5] Lozina Ž.: „Metoda Konačnih Elemenata”, Materijali s predavanja, Fakultet Elektrotehnike, Strojstva i Brodogradnje, Sveučilište u Splitu
- [6] Wikipedia: „Finite Strain Theory - Deformation tensors”, s Interneta, https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_strain_theory#Deformation_tensors, 15. prosinac 2020.
- [7] Dr. Kapania R.K.: „Constitutive relations”, Virginia polytechnic Institute and State University, Blacksburg, s Interneta, https://canvas.vt.edu/files/1286275/download?download_frd=1, 5. siječnja 2021
- [8] SciELO, Material Research: „Mechanical Characterization and FE Modelling of a Hyperelastic Material”, s Interneta, https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1516-14392015000500918, 5. siječnja 2021
- [9] FunctionBay, Tech Support: „What is the difference between a hyperelastic material and an elastic material in RecurDyn?”, s Interneta, <https://support.functionbay.com/en/faq/single/87/difference-hyperelastic-material-elastic-material-recurdyn>, 22. siječnja 2021
- [10] Wikipedia: „Nonlinear system”, s Interneta, https://en.wikipedia.org/wiki/Nonlinear_system, 10. veljače 2021.
- [11] Guo Z., Sluys L.J.: „Constitutive modelling od hyperelastic rubber-like materials”, s Interneta, <http://heronjournal.nl/53-3/1.pdf>, 20. veljače 2021.

POPIS MATEMATIČKIH OPERATORA, OZNAKA I KRATICA

| | |
|---------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ”.” | Skalarni produkt |
| ”×” | Vektorski produkt |
| ”⊗” | Tenzorski produkt, umnožak dvaju vektora čiji je rezultat tenzor ($\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} = \mathbf{vw}^T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (v_i w_j)$) |
| ”:” | Dupli produkt tenzora, magnituda invarijante definirana kao trag matrice ($\mathbf{A} : \mathbf{B} = tr(\mathbf{A}^T \mathbf{B})$) |
| „ <i>push – forward</i> ” | Operacija transformacije vektora iz materijalne u prostornu konfiguraciju |
| 1D | Jedno-dimenzionalni prostor |
| 2D | Dvo-dimenzionalni prostor |
| 3D | Tro-dimenzionalni prostor |
| eng. | engleski |
| GT | Gauss-ove točke numeričke integracije |
| KE | Konačni element |
| N-R | Newton-Raphson iterativni numerički postupak |
| VR | Virtualni rad |

SAŽETAK

ANALIZA DEFORMACIJA I NAPREZANJA ELEMENATA IZRAĐENIH OD HIPERELASTIČNIH MATERIJALA

U mehanici kontinuuma, posebno kod analize čvrstoće deformabilnih tijela, najveću zastupljenost imaju metali i njihove slitine čije su konstitutivne jednadžbe naprezanja i deformacija razrađene do najmanjih detalja. Međutim, u zadnjoj polovici 20. stoljeća hiperelastični materijali imaju sve veću zastupljenost u praksi zbog razvoja i porasta znanja o njihovim ponašanjima. Sadržaj ovog rada usmjeren je na nelinearnu mehaniku krutih tijela odnosno pojam hiperelastičnog materijala i njegovih karakteristika, zajedno s postupcima rješavanja.

Na samom početku predstavljeni su temeljni pojmovi vezani za gibanje i naprezanja tijela s velikim deformacijama i promjenama volumena. Opisane su bitne kinematske veličine iz teorije konačnih deformacija kao i njihovi intenziteti vremenskih promjena. Izvedene su jednadžbe naprezanja i stanja ravnoteže, uz opis i izvod jednadžbe virtualnog rada u materijalnoj i prostornoj konfiguraciji. Prikazani su alternativni prikazi naprezanja (prvo i drugo Piola-Kirchhoff-ovo naprezanje) te njima konjugirane veličine deformacije koje se koriste u formulaciji jednadžbe virtualnog rada. Uveden je pojam hiperelastičnog materijala uz izraze koji definiraju nelinearno ponašanje i velike deformacije. Također, ukratko su opisani neki od modela hiperelastičnih materijala te njihove odgovarajuće jednadžbe akumulirane funkcije energije deformacije iz kojih slijede izrazi za odgovarajuća naprezanja i tenzore elastičnosti. S obzirom na to da se radi o nelinearnom ponašanju materijala, potrebno je primijeniti linearizaciju konstitutivnih jednadžbi da bi se mogao implementirati Newton-Raphson iterativni postupak. U tu svrhu linearizirane su jednadžbe virtualnog rada u materijalnoj i prostornoj konfiguraciji. Pri tome, svaka linearizirana komponenta jednadžbe virtualnog rada predstavlja doprinos temeljnoj jednadžbi formulacije konačnih elemenata: $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}$. Objašnjena je nelinearna formulacija metode konačnih elemenata, uz diskretizaciju bitnih kinematskih veličina i jednadžbi ravnoteže s ciljem uspostave tangentne matrice krutosti \mathbf{K} i vektora ekvivalentnih čvornih sila.

Na samom kraju, za numeričku primjenu odabran je softver *F_LagSHyP* koji sadrži biblioteku potrebnih funkcija koje se koriste za rješavanje nelinearnih statičkih problema. Dane su kratke upute korištenja softvera te riješeni određeni primjeri kako bi se prikazale nelinearne ovisnosti između naprezanja i deformacije. Riješeni primjeri opisani su hiperelastičnim modelom materijala s jednakim svojstvima s namjerom utvrđivanja ponašanja određenog modela u različitim slučajevima opterećenja. Zaključno, pokazan je utjecaj svojstva hiperelastičnog materijala na njegovu krutost.

Ključne riječi:

TEORIJA KONAČNIH DEFORMACIJA, HIPERELASTIČNOST, NELINEARNOST, METODA KONAČNIH ELEMENATA, NEWTON-RAPHSON

SUMMARY

STRAIN AND STRESS ANALYSIS OF ELEMENTS MADE OF HYPERELASTIC MATERIALS

In continuum mechanics, particularly at solid mechanics analysis of deformable bodies, metals and their alloys have the largest share, whose constitutive stress and strain equations have been worked out to smallest detail. However, in the last half of 20th century, hyperelastic materials have an increasing presence in practice due to the development and thus increase of knowledge about their behaviours. Content of this thesis is focused on nonlinear solid mechanics respectively, on concept of hyperelastic material and its characteristics, together with resolution procedures.

Initially, basic terms related to motion and stresses of bodies with great deformations and volume change are introduced. Important kinematic quantities from the finite strain theory as well as their time change intensities are described. Stress and equilibrium equations have been derived, with description and derivation of principle of virtual work in material and spatial configuration. Alternative stress representations are shown (first and second Piola-Kirchhoff stress) and their conjugate deformation quantities which are used in formulation of principle of virtual work. The notion of hyperelastic material is introduced with expressions that define nonlinear behaviour and large deformations. Some models of hyperelastic materials are also briefly described and their corresponding stored strain energy functions, from which the expressions for corresponding stresses and elasticity tensors follow. Since it is a matter of nonlinear material behavior, it is necessary to apply linearization of constitutive equations in order to implement Newton-Raphson iterative procedure. For this purpose, virtual work equations in material and spatial configuration are linearized. Thereby, every component of linearized virtual work equation represents a contribution to the fundamental equation of finite element formulation: $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}$. The nonlinear finite element method formulation is explained, with discretization of essential kinematic quantities and equilibrium equations with the aim of establishing tangent stiffness matrix \mathbf{K} and vectors of equivalent nodal forces.

At the very end, the software *F*Lag*S*Hy*P* was selected for numerical application, which contains a library of necessary functions used to solve nonlinear static problems. Brief instructions regarding the use of software are given and certain examples are solved in order to show and explain nonlinear dependence between stress and strain. Solved examples are described by the same hyperelastic material model with the equal properties with the goal to present behavior of a certain model in different load cases. In conclusion, influence of the properties of hyperelastic material on its stiffness is shown.

Key words:

FINITE STRAIN THEORY, HYPERELASTICITY, NONLINEARITY, FINITE ELEMENT METHOD, NEWTON-RAPHSON

A. PRILOZI

1. MatLab kod za rješenje trokutastog KE teorijom elastičnosti, poglavlje 7.2.1

```
1  clc; clear all; close all;
2
3  %Inicijalizacija problema
4  x=[0 2 1];
5  y=[0 0 1.732];
6  E= 210e9;
7  v=0.3;
8  A=1.732;
9  t=0.2;
10 V=A*t;
11 F=10e3;
12
13 %Izracun komponenti matrice krutosti K [5]
14 delta = (x(2)*y(3)+x(3)*y(2))-(x(1)*y(3)-x(3)*y(1))+(x(1)*y(2)-x(2)*y(1));
15
16 B=1/delta * [ y(2)-y(3) 0 y(3)-y(1) 0 y(1)-y(2) 0;
17               0 x(3)-x(2) 0 x(1)-x(3) 0 x(2)-x(1);
18               x(3)-x(2) y(2)-y(3) x(1)-x(3) y(3)-y(1) x(2)-x(1) y(1)-y(2) 1;
19
20 d11 = E/(1-v^2);
21 d12 = E*v/(1-v^2);
22 d33 = E/(2*(1+v));
23
24 D = [ d11 d12 0; d12 d11 0 ; 0 0 d33];
25
26 K = B' *D*B*V;
27 K1 = zeros(6);
28
29 %Zamjena stupca 3 s stupcem 4 i retka 3 s retkom 4
30 K1(1:2,1:2) = K(1:2,1:2);
31 K1(1:2,3) =K(1:2,4);
32 K1(1:2,4) = K(1:2,3);
33 K1(1:2,5:6) = K(1:2,5:6);
34
35 K1(3,1:2) = K(4,1:2);
36 K1(3,3) = K(4,4);
37 K1(3,4) = K(4,3);
38 K1(3,5:6)=K(4,5:6);
39
40 K1(4,1:2)=K(3,1:2);
41 K1(4,3)= K(3,4);
42 K1(4,4) = K(3,3);
43 K1(4,5:6)=K(3,5:6);
44
45 K1(5:6,1:2)=K(5:6,1:2);
46 K1(5:6,3)=K(5:6,4);
47 K1(5:6,4)=K(5:6,3);
48 K1(5:6,5:6)=K(5:6,5:6);
49
50 %Vektori q i Q s poznatim vrijednostima
51 q1=[0 0 0]';
52 Q2=[0 F 0]';
53
54 %Rastav matrice K na cetiri dijela
55 k11 = K1(1:3,1:3);
56 k12 = K1(1:3,4:6);
57 k21 = K1(4:6,1:3);
```

```

58 k22 = K1(4:6,4:6);
59
60 %Izracun nepoznatim pomaka q i sila Q
61 q2 = k22\ (Q2 -k21*q1)
62 Q1 = k11*q1+k12*q2
63
64 %Konacna konfiguracija
65 x1 = [ x(1) x(2)+q2(1,1) x(3)+q2(2,1) ];
66 y1 = [ y(1) y(2) y(3)+q2(3,1) ];
67
68 plot ( [x(1) x(2) x(3) x(1) ], [y(1) y(2) y(3) y(1)], '--r', 'Linewidth', 2);
69 hold on
70 plot( [x1(1) x1(2) x1(3) x1(1)], [y1(1) y1(2) y1(3) y1(1)], 'b', 'Linewidth', 2);
71
72 legend('Pocetni polozej', 'Konacni polozej');
73
74 q_ekv = [ q1(1,1) q1(2,1) q2(1,1) q1(3,1) q2(2,1) q2(3,1) ]';
75
76 %Izracun naprezanja
77 sigma_ij = D*B*q_ekv;
78 sigma=[ sigma_ij(1,1) sigma_ij(3,1); sigma_ij(3,1) sigma_ij(2,1)]

```

2. Ulazni parametri 1D štapa za FFlagSHyP, poglavlje 7.3.1

```

1 1-D stap test
2 truss2
3 21
4 1 7 0.0 0.0 0.0
5 2 6 0.05 0.0 0.0
6 3 6 0.1 0.0 0.0
7 4 6 0.15 0.0 0.0
8 5 6 0.2 0.0 0.0
9 6 6 0.25 0.0 0.0
10 7 6 0.3 0.0 0.0
11 8 6 0.35 0.0 0.0
12 9 6 0.4 0.0 0.0
13 10 6 0.45 0.0 0.0
14 11 6 0.5 0.0 0.0
15 12 6 0.55 0.0 0.0
16 13 6 0.6 0.0 0.0
17 14 6 0.65 0.0 0.0
18 15 6 0.7 0.0 0.0
19 16 6 0.75 0.0 0.0
20 17 6 0.8 0.0 0.0
21 18 6 0.85 0.0 0.0
22 19 6 0.9 0.0 0.0
23 20 6 0.95 0.0 0.0
24 21 6 1.0 0.0 0.0
25 20
26 1 1 1 2
27 2 1 2 3
28 3 1 3 4
29 4 1 4 5
30 5 1 5 6
31 6 1 6 7
32 7 1 7 8
33 8 1 8 9
34 9 1 9 10
35 10 1 10 11
36 11 1 11 12
37 12 1 12 13
38 13 1 13 14

```

```

39 14 1 14 15
40 15 1 15 16
41 16 1 16 17
42 17 1 17 18
43 18 1 18 19
44 19 1 19 20
45 20 1 20 21
46 1
47 1 2
48 0.0 1.2857e+6 0.2857 0.01 3.0e+6 1.0
49 1 0 0 0.0 0.0 0.0
50 21 4600 0.0 0.0
51 20 1 1 40 1.0e-6 0.0 0.0 1 0.0 21 1

```

3. Ulazni parametri 2D štapa za FLagSHyP, poglavlje 7.3.2

```

1 2-D stap test
2 quad4
3 63
4 1 1 0.0 -0.05
5 2 3 0.0 0.0
6 3 1 0.0 0.05
7 4 0 0.05 -0.05
8 5 0 0.05 0.0
9 6 0 0.05 0.05
10 7 0 0.1 -0.05
11 8 0 0.1 0.0
12 9 0 0.1 0.05
13 10 0 0.15 -0.05
14 11 0 0.15 0.0
15 12 0 0.15 0.05
16 13 0 0.2 -0.05
17 14 0 0.2 0.0
18 15 0 0.2 0.05
19 16 0 0.25 -0.05
20 17 0 0.25 0.0
21 18 0 0.25 0.05
22 19 0 0.3 -0.05
23 20 0 0.3 0.0
24 21 0 0.3 0.05
25 22 0 0.35 -0.05
26 23 0 0.35 0.0
27 24 0 0.35 0.05
28 25 0 0.4 -0.05
29 26 0 0.4 0.0
30 27 0 0.4 0.05
31 28 0 0.45 -0.05
32 29 0 0.45 0.0
33 30 0 0.45 0.05
34 31 0 0.5 -0.05
35 32 0 0.5 0.0
36 33 0 0.5 0.05
37 34 0 0.55 -0.05
38 35 0 0.55 0.0
39 36 0 0.55 0.05
40 37 0 0.6 -0.05
41 38 0 0.6 0.0
42 39 0 0.6 0.05
43 40 0 0.65 -0.05
44 41 0 0.65 0.0
45 42 0 0.65 0.05
46 43 0 0.7 -0.05

```

47 44 0 0.7 0.0
48 45 0 0.7 0.05
49 46 0 0.75 -0.05
50 47 0 0.75 0.0
51 48 0 0.75 0.05
52 49 0 0.8 -0.05
53 50 0 0.8 0.0
54 51 0 0.8 0.05
55 52 0 0.85 -0.05
56 53 0 0.85 0.0
57 54 0 0.85 0.05
58 55 0 0.9 -0.05
59 56 0 0.9 0.0
60 57 0 0.9 0.05
61 58 0 0.95 -0.05
62 59 0 0.95 0.0
63 60 0 0.95 0.05
64 61 0 1.0 -0.05
65 62 0 1.0 0.0
66 63 0 1.0 0.05
67 40
68 1 1 1 4 5 2
69 2 1 2 5 6 3
70 3 1 4 7 8 5
71 4 1 5 8 9 6
72 5 1 7 10 11 8
73 6 1 8 11 12 9
74 7 1 10 13 14 11
75 8 1 11 14 15 12
76 9 1 13 16 17 14
77 10 1 14 17 18 15
78 11 1 16 19 20 17
79 12 1 17 20 21 18
80 13 1 19 22 23 20
81 14 1 20 23 24 21
82 15 1 22 25 26 23
83 16 1 23 26 27 24
84 17 1 25 28 29 26
85 18 1 26 29 30 27
86 19 1 28 31 32 29
87 20 1 29 32 33 30
88 21 1 31 34 35 32
89 22 1 32 35 36 33
90 23 1 34 37 38 35
91 24 1 35 38 39 36
92 25 1 37 40 41 38
93 26 1 38 41 42 39
94 27 1 40 43 44 41
95 28 1 41 44 45 42
96 29 1 43 46 47 44
97 30 1 44 47 48 45
98 31 1 46 49 50 47
99 32 1 47 50 51 48
100 33 1 49 52 53 50
101 34 1 50 53 54 51
102 35 1 52 55 56 53
103 36 1 53 56 57 54
104 37 1 55 58 59 56
105 38 1 56 59 60 57
106 39 1 58 61 62 59
107 40 1 59 62 63 60
108 1
109 1 4

```

110 0.0 0.5e+6 0.6667e+6 0.1
111 3 0 0 0.0 0.0
112 61 1175 0.0
113 62 2350 0.0
114 63 1175 0.0
115 20 1 1 40 1.0e-3 0.0 0.0 1 0.0 62 1

```

4. Ulazni parametri 3D štapa za FFlagSHyP, poglavlje [7.3.3](#)

```

1 3-D Stap primjer
2 hexa8
3 189
4 1 1 0.0000000e+00 -5.0000000e-02 5.0000000e-02
5 2 3 0.0000000e+00 -5.0000000e-02 0.0000000e+00
6 3 1 0.0000000e+00 -5.0000000e-02 -5.0000000e-02
7 4 0 0.0000000e+00 0.0000000e+00 5.0000000e-02
8 5 7 0.0000000e+00 0.0000000e+00 0.0000000e+00
9 6 0 0.0000000e+00 0.0000000e+00 -5.0000000e-02
10 7 1 0.0000000e+00 5.0000000e-02 5.0000000e-02
11 8 3 0.0000000e+00 5.0000000e-02 0.0000000e+00
12 9 1 0.0000000e+00 5.0000000e-02 -5.0000000e-02
13 10 0 5.0000000e-02 -5.0000000e-02 5.0000000e-02
14 11 0 5.0000000e-02 -5.0000000e-02 0.0000000e+00
15 12 0 5.0000000e-02 -5.0000000e-02 -5.0000000e-02
16 13 0 5.0000000e-02 0.0000000e+00 5.0000000e-02
17 14 0 5.0000000e-02 0.0000000e+00 0.0000000e+00
18 15 0 5.0000000e-02 0.0000000e+00 -5.0000000e-02
19 16 0 5.0000000e-02 5.0000000e-02 5.0000000e-02
20 17 0 5.0000000e-02 5.0000000e-02 0.0000000e+00
21 18 0 5.0000000e-02 5.0000000e-02 -5.0000000e-02
22 19 0 1.0000000e-01 -5.0000000e-02 5.0000000e-02
23 20 0 1.0000000e-01 -5.0000000e-02 0.0000000e+00
24 21 0 1.0000000e-01 -5.0000000e-02 -5.0000000e-02
25 22 0 1.0000000e-01 0.0000000e+00 5.0000000e-02
26 23 0 1.0000000e-01 0.0000000e+00 0.0000000e+00
27 24 0 1.0000000e-01 0.0000000e+00 -5.0000000e-02
28 25 0 1.0000000e-01 5.0000000e-02 5.0000000e-02
29 26 0 1.0000000e-01 5.0000000e-02 0.0000000e+00
30 27 0 1.0000000e-01 5.0000000e-02 -5.0000000e-02
31 28 0 1.5000000e-01 -5.0000000e-02 5.0000000e-02
32 29 0 1.5000000e-01 -5.0000000e-02 0.0000000e+00
33 30 0 1.5000000e-01 -5.0000000e-02 -5.0000000e-02
34 31 0 1.5000000e-01 0.0000000e+00 5.0000000e-02
35 32 0 1.5000000e-01 0.0000000e+00 0.0000000e+00
36 33 0 1.5000000e-01 0.0000000e+00 -5.0000000e-02
37 34 0 1.5000000e-01 5.0000000e-02 5.0000000e-02
38 35 0 1.5000000e-01 5.0000000e-02 0.0000000e+00
39 36 0 1.5000000e-01 5.0000000e-02 -5.0000000e-02
40 37 0 2.0000000e-01 -5.0000000e-02 5.0000000e-02
41 38 0 2.0000000e-01 -5.0000000e-02 0.0000000e+00
42 39 0 2.0000000e-01 -5.0000000e-02 -5.0000000e-02
43 40 0 2.0000000e-01 0.0000000e+00 5.0000000e-02
44 41 0 2.0000000e-01 0.0000000e+00 0.0000000e+00
45 42 0 2.0000000e-01 0.0000000e+00 -5.0000000e-02
46 43 0 2.0000000e-01 5.0000000e-02 5.0000000e-02
47 44 0 2.0000000e-01 5.0000000e-02 0.0000000e+00
48 45 0 2.0000000e-01 5.0000000e-02 -5.0000000e-02
49 46 0 2.5000000e-01 -5.0000000e-02 5.0000000e-02
50 47 0 2.5000000e-01 -5.0000000e-02 0.0000000e+00
51 48 0 2.5000000e-01 -5.0000000e-02 -5.0000000e-02
52 49 0 2.5000000e-01 0.0000000e+00 5.0000000e-02
53 50 0 2.5000000e-01 0.0000000e+00 0.0000000e+00

```

| | | | | | |
|-----|-----|---|---------------|----------------|----------------|
| 54 | 51 | 0 | 2.5000000e-01 | 0.0000000e+00 | -5.0000000e-02 |
| 55 | 52 | 0 | 2.5000000e-01 | 5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 56 | 53 | 0 | 2.5000000e-01 | 5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 57 | 54 | 0 | 2.5000000e-01 | 5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 58 | 55 | 0 | 3.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 59 | 56 | 0 | 3.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 60 | 57 | 0 | 3.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 61 | 58 | 0 | 3.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | 5.0000000e-02 |
| 62 | 59 | 0 | 3.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | 0.0000000e+00 |
| 63 | 60 | 0 | 3.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | -5.0000000e-02 |
| 64 | 61 | 0 | 3.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 65 | 62 | 0 | 3.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 66 | 63 | 0 | 3.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 67 | 64 | 0 | 3.5000000e-01 | -5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 68 | 65 | 0 | 3.5000000e-01 | -5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 69 | 66 | 0 | 3.5000000e-01 | -5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 70 | 67 | 0 | 3.5000000e-01 | 0.0000000e+00 | 5.0000000e-02 |
| 71 | 68 | 0 | 3.5000000e-01 | 0.0000000e+00 | 0.0000000e+00 |
| 72 | 69 | 0 | 3.5000000e-01 | 0.0000000e+00 | -5.0000000e-02 |
| 73 | 70 | 0 | 3.5000000e-01 | 5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 74 | 71 | 0 | 3.5000000e-01 | 5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 75 | 72 | 0 | 3.5000000e-01 | 5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 76 | 73 | 0 | 4.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 77 | 74 | 0 | 4.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 78 | 75 | 0 | 4.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 79 | 76 | 0 | 4.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | 5.0000000e-02 |
| 80 | 77 | 0 | 4.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | 0.0000000e+00 |
| 81 | 78 | 0 | 4.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | -5.0000000e-02 |
| 82 | 79 | 0 | 4.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 83 | 80 | 0 | 4.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 84 | 81 | 0 | 4.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 85 | 82 | 0 | 4.5000000e-01 | -5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 86 | 83 | 0 | 4.5000000e-01 | -5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 87 | 84 | 0 | 4.5000000e-01 | -5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 88 | 85 | 0 | 4.5000000e-01 | 0.0000000e+00 | 5.0000000e-02 |
| 89 | 86 | 0 | 4.5000000e-01 | 0.0000000e+00 | 0.0000000e+00 |
| 90 | 87 | 0 | 4.5000000e-01 | 0.0000000e+00 | -5.0000000e-02 |
| 91 | 88 | 0 | 4.5000000e-01 | 5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 92 | 89 | 0 | 4.5000000e-01 | 5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 93 | 90 | 0 | 4.5000000e-01 | 5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 94 | 91 | 0 | 5.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 95 | 92 | 0 | 5.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 96 | 93 | 0 | 5.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 97 | 94 | 0 | 5.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | 5.0000000e-02 |
| 98 | 95 | 0 | 5.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | 0.0000000e+00 |
| 99 | 96 | 0 | 5.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | -5.0000000e-02 |
| 100 | 97 | 0 | 5.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 101 | 98 | 0 | 5.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 102 | 99 | 0 | 5.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 103 | 100 | 0 | 5.5000000e-01 | -5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 104 | 101 | 0 | 5.5000000e-01 | -5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 105 | 102 | 0 | 5.5000000e-01 | -5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 106 | 103 | 0 | 5.5000000e-01 | 0.0000000e+00 | 5.0000000e-02 |
| 107 | 104 | 0 | 5.5000000e-01 | 0.0000000e+00 | 0.0000000e+00 |
| 108 | 105 | 0 | 5.5000000e-01 | 0.0000000e+00 | -5.0000000e-02 |
| 109 | 106 | 0 | 5.5000000e-01 | 5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 110 | 107 | 0 | 5.5000000e-01 | 5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 111 | 108 | 0 | 5.5000000e-01 | 5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 112 | 109 | 0 | 6.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 113 | 110 | 0 | 6.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 114 | 111 | 0 | 6.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 115 | 112 | 0 | 6.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | 5.0000000e-02 |
| 116 | 113 | 0 | 6.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | 0.0000000e+00 |

| | | | | | |
|-----|-----|---|---------------|----------------|----------------|
| 117 | 114 | 0 | 6.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | -5.0000000e-02 |
| 118 | 115 | 0 | 6.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 119 | 116 | 0 | 6.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 120 | 117 | 0 | 6.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 121 | 118 | 0 | 6.5000000e-01 | -5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 122 | 119 | 0 | 6.5000000e-01 | -5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 123 | 120 | 0 | 6.5000000e-01 | -5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 124 | 121 | 0 | 6.5000000e-01 | 0.0000000e+00 | 5.0000000e-02 |
| 125 | 122 | 0 | 6.5000000e-01 | 0.0000000e+00 | 0.0000000e+00 |
| 126 | 123 | 0 | 6.5000000e-01 | 0.0000000e+00 | -5.0000000e-02 |
| 127 | 124 | 0 | 6.5000000e-01 | 5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 128 | 125 | 0 | 6.5000000e-01 | 5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 129 | 126 | 0 | 6.5000000e-01 | 5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 130 | 127 | 0 | 7.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 131 | 128 | 0 | 7.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 132 | 129 | 0 | 7.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 133 | 130 | 0 | 7.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | 5.0000000e-02 |
| 134 | 131 | 0 | 7.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | 0.0000000e+00 |
| 135 | 132 | 0 | 7.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | -5.0000000e-02 |
| 136 | 133 | 0 | 7.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 137 | 134 | 0 | 7.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 138 | 135 | 0 | 7.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 139 | 136 | 0 | 7.5000000e-01 | -5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 140 | 137 | 0 | 7.5000000e-01 | -5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 141 | 138 | 0 | 7.5000000e-01 | -5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 142 | 139 | 0 | 7.5000000e-01 | 0.0000000e+00 | 5.0000000e-02 |
| 143 | 140 | 0 | 7.5000000e-01 | 0.0000000e+00 | 0.0000000e+00 |
| 144 | 141 | 0 | 7.5000000e-01 | 0.0000000e+00 | -5.0000000e-02 |
| 145 | 142 | 0 | 7.5000000e-01 | 5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 146 | 143 | 0 | 7.5000000e-01 | 5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 147 | 144 | 0 | 7.5000000e-01 | 5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 148 | 145 | 0 | 8.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 149 | 146 | 0 | 8.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 150 | 147 | 0 | 8.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 151 | 148 | 0 | 8.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | 5.0000000e-02 |
| 152 | 149 | 0 | 8.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | 0.0000000e+00 |
| 153 | 150 | 0 | 8.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | -5.0000000e-02 |
| 154 | 151 | 0 | 8.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 155 | 152 | 0 | 8.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 156 | 153 | 0 | 8.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 157 | 154 | 0 | 8.5000000e-01 | -5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 158 | 155 | 0 | 8.5000000e-01 | -5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 159 | 156 | 0 | 8.5000000e-01 | -5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 160 | 157 | 0 | 8.5000000e-01 | 0.0000000e+00 | 5.0000000e-02 |
| 161 | 158 | 0 | 8.5000000e-01 | 0.0000000e+00 | 0.0000000e+00 |
| 162 | 159 | 0 | 8.5000000e-01 | 0.0000000e+00 | -5.0000000e-02 |
| 163 | 160 | 0 | 8.5000000e-01 | 5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 164 | 161 | 0 | 8.5000000e-01 | 5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 165 | 162 | 0 | 8.5000000e-01 | 5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 166 | 163 | 0 | 9.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 167 | 164 | 0 | 9.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 168 | 165 | 0 | 9.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 169 | 166 | 0 | 9.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | 5.0000000e-02 |
| 170 | 167 | 0 | 9.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | 0.0000000e+00 |
| 171 | 168 | 0 | 9.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | -5.0000000e-02 |
| 172 | 169 | 0 | 9.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 173 | 170 | 0 | 9.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 174 | 171 | 0 | 9.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 175 | 172 | 0 | 9.5000000e-01 | -5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 176 | 173 | 0 | 9.5000000e-01 | -5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 177 | 174 | 0 | 9.5000000e-01 | -5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 178 | 175 | 0 | 9.5000000e-01 | 0.0000000e+00 | 5.0000000e-02 |
| 179 | 176 | 0 | 9.5000000e-01 | 0.0000000e+00 | 0.0000000e+00 |


```

180 177 0 9.5000000e-01 0.0000000e+00 -5.0000000e-02
181 178 0 9.5000000e-01 5.0000000e-02 5.0000000e-02
182 179 0 9.5000000e-01 5.0000000e-02 0.0000000e+00
183 180 0 9.5000000e-01 5.0000000e-02 -5.0000000e-02
184 181 0 1.0000000e+00 -5.0000000e-02 5.0000000e-02
185 182 0 1.0000000e+00 -5.0000000e-02 0.0000000e+00
186 183 0 1.0000000e+00 -5.0000000e-02 -5.0000000e-02
187 184 0 1.0000000e+00 0.0000000e+00 5.0000000e-02
188 185 0 1.0000000e+00 0.0000000e+00 0.0000000e+00
189 186 0 1.0000000e+00 0.0000000e+00 -5.0000000e-02
190 187 0 1.0000000e+00 5.0000000e-02 5.0000000e-02
191 188 0 1.0000000e+00 5.0000000e-02 0.0000000e+00
192 189 0 1.0000000e+00 5.0000000e-02 -5.0000000e-02
193 80
194 1 1 1 2 11 10 4 5 14 13
195 2 1 2 3 12 11 5 6 15 14
196 3 1 4 5 14 13 7 8 17 16
197 4 1 5 6 15 14 8 9 18 17
198 5 1 10 11 20 19 13 14 23 22
199 6 1 11 12 21 20 14 15 24 23
200 7 1 13 14 23 22 16 17 26 25
201 8 1 14 15 24 23 17 18 27 26
202 9 1 19 20 29 28 22 23 32 31
203 10 1 20 21 30 29 23 24 33 32
204 11 1 22 23 32 31 25 26 35 34
205 12 1 23 24 33 32 26 27 36 35
206 13 1 28 29 38 37 31 32 41 40
207 14 1 29 30 39 38 32 33 42 41
208 15 1 31 32 41 40 34 35 44 43
209 16 1 32 33 42 41 35 36 45 44
210 17 1 37 38 47 46 40 41 50 49
211 18 1 38 39 48 47 41 42 51 50
212 19 1 40 41 50 49 43 44 53 52
213 20 1 41 42 51 50 44 45 54 53
214 21 1 46 47 56 55 49 50 59 58
215 22 1 47 48 57 56 50 51 60 59
216 23 1 49 50 59 58 52 53 62 61
217 24 1 50 51 60 59 53 54 63 62
218 25 1 55 56 65 64 58 59 68 67
219 26 1 56 57 66 65 59 60 69 68
220 27 1 58 59 68 67 61 62 71 70
221 28 1 59 60 69 68 62 63 72 71
222 29 1 64 65 74 73 67 68 77 76
223 30 1 65 66 75 74 68 69 78 77
224 31 1 67 68 77 76 70 71 80 79
225 32 1 68 69 78 77 71 72 81 80
226 33 1 73 74 83 82 76 77 86 85
227 34 1 74 75 84 83 77 78 87 86
228 35 1 76 77 86 85 79 80 89 88
229 36 1 77 78 87 86 80 81 90 89
230 37 1 82 83 92 91 85 86 95 94
231 38 1 83 84 93 92 86 87 96 95
232 39 1 85 86 95 94 88 89 98 97
233 40 1 86 87 96 95 89 90 99 98
234 41 1 91 92 101 100 94 95 104 103
235 42 1 92 93 102 101 95 96 105 104
236 43 1 94 95 104 103 97 98 107 106
237 44 1 95 96 105 104 98 99 108 107
238 45 1 100 101 110 109 103 104 113 112
239 46 1 101 102 111 110 104 105 114 113
240 47 1 103 104 113 112 106 107 116 115
241 48 1 104 105 114 113 107 108 117 116
242 49 1 109 110 119 118 112 113 122 121

```

```

243 50 1 110 111 120 119 113 114 123 122
244 51 1 112 113 122 121 115 116 125 124
245 52 1 113 114 123 122 116 117 126 125
246 53 1 118 119 128 127 121 122 131 130
247 54 1 119 120 129 128 122 123 132 131
248 55 1 121 122 131 130 124 125 134 133
249 56 1 122 123 132 131 125 126 135 134
250 57 1 127 128 137 136 130 131 140 139
251 58 1 128 129 138 137 131 132 141 140
252 59 1 130 131 140 139 133 134 143 142
253 60 1 131 132 141 140 134 135 144 143
254 61 1 136 137 146 145 139 140 149 148
255 62 1 137 138 147 146 140 141 150 149
256 63 1 139 140 149 148 142 143 152 151
257 64 1 140 141 150 149 143 144 153 152
258 65 1 145 146 155 154 148 149 158 157
259 66 1 146 147 156 155 149 150 159 158
260 67 1 148 149 158 157 151 152 161 160
261 68 1 149 150 159 158 152 153 162 161
262 69 1 154 155 164 163 157 158 167 166
263 70 1 155 156 165 164 158 159 168 167
264 71 1 157 158 167 166 160 161 170 169
265 72 1 158 159 168 167 161 162 171 170
266 73 1 163 164 173 172 166 167 176 175
267 74 1 164 165 174 173 167 168 177 176
268 75 1 166 167 176 175 169 170 179 178
269 76 1 167 168 177 176 170 171 180 179
270 77 1 172 173 182 181 175 176 185 184
271 78 1 173 174 183 182 176 177 186 185
272 79 1 175 176 185 184 178 179 188 187
273 80 1 176 177 186 185 179 180 189 188
274 1
275 1 3
276 0.0 0.5e+6 0.6667e+6
277 9 0 0 0.0 0.0 0.0
278 181 281.25 0.0 0.0
279 182 562.5 0.0 0.0
280 183 281.25 0.0 0.0
281 184 562.5 0.0 0.0
282 185 1125 0.0 0.0
283 186 562.5 0.0 0.0
284 187 281.25 0.0 0.0
285 188 562.5 0.0 0.0
286 189 281.25 0.0 0.0
287 10 1 1 40 1.0e-6 0.0 0.0 1 0 185 1

```

5. Ulazni parametri 2D konzole za FLagSHyP, poglavlje 7.4.1

```

1 2-D konzola test
2 quad4
3 63
4 1 3 0.0 -0.05
5 2 3 0.0 0.0
6 3 3 0.0 0.05
7 4 0 0.05 -0.05
8 5 0 0.05 0.0
9 6 0 0.05 0.05
10 7 0 0.1 -0.05
11 8 0 0.1 0.0
12 9 0 0.1 0.05
13 10 0 0.15 -0.05
14 11 0 0.15 0.0

```

15 12 0 0.15 0.05
16 13 0 0.2 -0.05
17 14 0 0.2 0.0
18 15 0 0.2 0.05
19 16 0 0.25 -0.05
20 17 0 0.25 0.0
21 18 0 0.25 0.05
22 19 0 0.3 -0.05
23 20 0 0.3 0.0
24 21 0 0.3 0.05
25 22 0 0.35 -0.05
26 23 0 0.35 0.0
27 24 0 0.35 0.05
28 25 0 0.4 -0.05
29 26 0 0.4 0.0
30 27 0 0.4 0.05
31 28 0 0.45 -0.05
32 29 0 0.45 0.0
33 30 0 0.45 0.05
34 31 0 0.5 -0.05
35 32 0 0.5 0.0
36 33 0 0.5 0.05
37 34 0 0.55 -0.05
38 35 0 0.55 0.0
39 36 0 0.55 0.05
40 37 0 0.6 -0.05
41 38 0 0.6 0.0
42 39 0 0.6 0.05
43 40 0 0.65 -0.05
44 41 0 0.65 0.0
45 42 0 0.65 0.05
46 43 0 0.7 -0.05
47 44 0 0.7 0.0
48 45 0 0.7 0.05
49 46 0 0.75 -0.05
50 47 0 0.75 0.0
51 48 0 0.75 0.05
52 49 0 0.8 -0.05
53 50 0 0.8 0.0
54 51 0 0.8 0.05
55 52 0 0.85 -0.05
56 53 0 0.85 0.0
57 54 0 0.85 0.05
58 55 0 0.9 -0.05
59 56 0 0.9 0.0
60 57 0 0.9 0.05
61 58 0 0.95 -0.05
62 59 0 0.95 0.0
63 60 0 0.95 0.05
64 61 0 1.0 -0.05
65 62 0 1.0 0.0
66 63 0 1.0 0.05
67 40
68 1 1 1 4 5 2
69 2 1 2 5 6 3
70 3 1 4 7 8 5
71 4 1 5 8 9 6
72 5 1 7 10 11 8
73 6 1 8 11 12 9
74 7 1 10 13 14 11
75 8 1 11 14 15 12
76 9 1 13 16 17 14
77 10 1 14 17 18 15

```

78 11 1 16 19 20 17
79 12 1 17 20 21 18
80 13 1 19 22 23 20
81 14 1 20 23 24 21
82 15 1 22 25 26 23
83 16 1 23 26 27 24
84 17 1 25 28 29 26
85 18 1 26 29 30 27
86 19 1 28 31 32 29
87 20 1 29 32 33 30
88 21 1 31 34 35 32
89 22 1 32 35 36 33
90 23 1 34 37 38 35
91 24 1 35 38 39 36
92 25 1 37 40 41 38
93 26 1 38 41 42 39
94 27 1 40 43 44 41
95 28 1 41 44 45 42
96 29 1 43 46 47 44
97 30 1 44 47 48 45
98 31 1 46 49 50 47
99 32 1 47 50 51 48
100 33 1 49 52 53 50
101 34 1 50 53 54 51
102 35 1 52 55 56 53
103 36 1 53 56 57 54
104 37 1 55 58 59 56
105 38 1 56 59 60 57
106 39 1 58 61 62 59
107 40 1 59 62 63 60
108 1
109 1 4
110 0.0 0.5e+6 0.6667e+6 0.1
111 1 3 0 0.0 0.0
112 62 0.0 -90
113 61 2 -0.001
114 62 2 -0.001
115 63 2 -0.001
116 20 1.0 1.0 20 1.0e-6 0.0 0.0 1 0.0 62 2

```

6. Ulazni parametri 3D konzole za FLagSHyP, poglavlje [7.4.2](#)

```

1 3-D konzola primjer
2 hexa8
3 189
4 1 7 0.0000000e+00 -5.0000000e-02 5.0000000e-02
5 2 7 0.0000000e+00 -5.0000000e-02 0.0000000e+00
6 3 7 0.0000000e+00 -5.0000000e-02 -5.0000000e-02
7 4 7 0.0000000e+00 0.0000000e+00 5.0000000e-02
8 5 7 0.0000000e+00 0.0000000e+00 0.0000000e+00
9 6 7 0.0000000e+00 0.0000000e+00 -5.0000000e-02
10 7 7 0.0000000e+00 5.0000000e-02 5.0000000e-02
11 8 7 0.0000000e+00 5.0000000e-02 0.0000000e+00
12 9 7 0.0000000e+00 5.0000000e-02 -5.0000000e-02
13 10 0 5.0000000e-02 -5.0000000e-02 5.0000000e-02
14 11 0 5.0000000e-02 -5.0000000e-02 0.0000000e+00
15 12 0 5.0000000e-02 -5.0000000e-02 -5.0000000e-02
16 13 0 5.0000000e-02 0.0000000e+00 5.0000000e-02
17 14 0 5.0000000e-02 0.0000000e+00 0.0000000e+00
18 15 0 5.0000000e-02 0.0000000e+00 -5.0000000e-02
19 16 0 5.0000000e-02 5.0000000e-02 5.0000000e-02
20 17 0 5.0000000e-02 5.0000000e-02 0.0000000e+00

```

| | | | | | |
|----|----|---|---------------|----------------|----------------|
| 21 | 18 | 0 | 5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 22 | 19 | 0 | 1.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 23 | 20 | 0 | 1.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 24 | 21 | 0 | 1.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 25 | 22 | 0 | 1.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | 5.0000000e-02 |
| 26 | 23 | 0 | 1.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | 0.0000000e+00 |
| 27 | 24 | 0 | 1.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | -5.0000000e-02 |
| 28 | 25 | 0 | 1.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 29 | 26 | 0 | 1.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 30 | 27 | 0 | 1.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 31 | 28 | 0 | 1.5000000e-01 | -5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 32 | 29 | 0 | 1.5000000e-01 | -5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 33 | 30 | 0 | 1.5000000e-01 | -5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 34 | 31 | 0 | 1.5000000e-01 | 0.0000000e+00 | 5.0000000e-02 |
| 35 | 32 | 0 | 1.5000000e-01 | 0.0000000e+00 | 0.0000000e+00 |
| 36 | 33 | 0 | 1.5000000e-01 | 0.0000000e+00 | -5.0000000e-02 |
| 37 | 34 | 0 | 1.5000000e-01 | 5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 38 | 35 | 0 | 1.5000000e-01 | 5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 39 | 36 | 0 | 1.5000000e-01 | 5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 40 | 37 | 0 | 2.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 41 | 38 | 0 | 2.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 42 | 39 | 0 | 2.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 43 | 40 | 0 | 2.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | 5.0000000e-02 |
| 44 | 41 | 0 | 2.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | 0.0000000e+00 |
| 45 | 42 | 0 | 2.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | -5.0000000e-02 |
| 46 | 43 | 0 | 2.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 47 | 44 | 0 | 2.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 48 | 45 | 0 | 2.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 49 | 46 | 0 | 2.5000000e-01 | -5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 50 | 47 | 0 | 2.5000000e-01 | -5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 51 | 48 | 0 | 2.5000000e-01 | -5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 52 | 49 | 0 | 2.5000000e-01 | 0.0000000e+00 | 5.0000000e-02 |
| 53 | 50 | 0 | 2.5000000e-01 | 0.0000000e+00 | 0.0000000e+00 |
| 54 | 51 | 0 | 2.5000000e-01 | 0.0000000e+00 | -5.0000000e-02 |
| 55 | 52 | 0 | 2.5000000e-01 | 5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 56 | 53 | 0 | 2.5000000e-01 | 5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 57 | 54 | 0 | 2.5000000e-01 | 5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 58 | 55 | 0 | 3.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 59 | 56 | 0 | 3.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 60 | 57 | 0 | 3.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 61 | 58 | 0 | 3.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | 5.0000000e-02 |
| 62 | 59 | 0 | 3.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | 0.0000000e+00 |
| 63 | 60 | 0 | 3.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | -5.0000000e-02 |
| 64 | 61 | 0 | 3.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 65 | 62 | 0 | 3.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 66 | 63 | 0 | 3.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 67 | 64 | 0 | 3.5000000e-01 | -5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 68 | 65 | 0 | 3.5000000e-01 | -5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 69 | 66 | 0 | 3.5000000e-01 | -5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 70 | 67 | 0 | 3.5000000e-01 | 0.0000000e+00 | 5.0000000e-02 |
| 71 | 68 | 0 | 3.5000000e-01 | 0.0000000e+00 | 0.0000000e+00 |
| 72 | 69 | 0 | 3.5000000e-01 | 0.0000000e+00 | -5.0000000e-02 |
| 73 | 70 | 0 | 3.5000000e-01 | 5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 74 | 71 | 0 | 3.5000000e-01 | 5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 75 | 72 | 0 | 3.5000000e-01 | 5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 76 | 73 | 0 | 4.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 77 | 74 | 0 | 4.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |
| 78 | 75 | 0 | 4.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 |
| 79 | 76 | 0 | 4.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | 5.0000000e-02 |
| 80 | 77 | 0 | 4.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | 0.0000000e+00 |
| 81 | 78 | 0 | 4.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | -5.0000000e-02 |
| 82 | 79 | 0 | 4.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 |
| 83 | 80 | 0 | 4.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 |

| | | | | | |
|-----|-----|---|--------------|---------------|---------------|
| 84 | 81 | 0 | 4.000000e-01 | 5.000000e-02 | -5.000000e-02 |
| 85 | 82 | 0 | 4.500000e-01 | -5.000000e-02 | 5.000000e-02 |
| 86 | 83 | 0 | 4.500000e-01 | -5.000000e-02 | 0.000000e+00 |
| 87 | 84 | 0 | 4.500000e-01 | -5.000000e-02 | -5.000000e-02 |
| 88 | 85 | 0 | 4.500000e-01 | 0.000000e+00 | 5.000000e-02 |
| 89 | 86 | 0 | 4.500000e-01 | 0.000000e+00 | 0.000000e+00 |
| 90 | 87 | 0 | 4.500000e-01 | 0.000000e+00 | -5.000000e-02 |
| 91 | 88 | 0 | 4.500000e-01 | 5.000000e-02 | 5.000000e-02 |
| 92 | 89 | 0 | 4.500000e-01 | 5.000000e-02 | 0.000000e+00 |
| 93 | 90 | 0 | 4.500000e-01 | 5.000000e-02 | -5.000000e-02 |
| 94 | 91 | 0 | 5.000000e-01 | -5.000000e-02 | 5.000000e-02 |
| 95 | 92 | 0 | 5.000000e-01 | -5.000000e-02 | 0.000000e+00 |
| 96 | 93 | 0 | 5.000000e-01 | -5.000000e-02 | -5.000000e-02 |
| 97 | 94 | 0 | 5.000000e-01 | 0.000000e+00 | 5.000000e-02 |
| 98 | 95 | 0 | 5.000000e-01 | 0.000000e+00 | 0.000000e+00 |
| 99 | 96 | 0 | 5.000000e-01 | 0.000000e+00 | -5.000000e-02 |
| 100 | 97 | 0 | 5.000000e-01 | 5.000000e-02 | 5.000000e-02 |
| 101 | 98 | 0 | 5.000000e-01 | 5.000000e-02 | 0.000000e+00 |
| 102 | 99 | 0 | 5.000000e-01 | 5.000000e-02 | -5.000000e-02 |
| 103 | 100 | 0 | 5.500000e-01 | -5.000000e-02 | 5.000000e-02 |
| 104 | 101 | 0 | 5.500000e-01 | -5.000000e-02 | 0.000000e+00 |
| 105 | 102 | 0 | 5.500000e-01 | -5.000000e-02 | -5.000000e-02 |
| 106 | 103 | 0 | 5.500000e-01 | 0.000000e+00 | 5.000000e-02 |
| 107 | 104 | 0 | 5.500000e-01 | 0.000000e+00 | 0.000000e+00 |
| 108 | 105 | 0 | 5.500000e-01 | 0.000000e+00 | -5.000000e-02 |
| 109 | 106 | 0 | 5.500000e-01 | 5.000000e-02 | 5.000000e-02 |
| 110 | 107 | 0 | 5.500000e-01 | 5.000000e-02 | 0.000000e+00 |
| 111 | 108 | 0 | 5.500000e-01 | 5.000000e-02 | -5.000000e-02 |
| 112 | 109 | 0 | 6.000000e-01 | -5.000000e-02 | 5.000000e-02 |
| 113 | 110 | 0 | 6.000000e-01 | -5.000000e-02 | 0.000000e+00 |
| 114 | 111 | 0 | 6.000000e-01 | -5.000000e-02 | -5.000000e-02 |
| 115 | 112 | 0 | 6.000000e-01 | 0.000000e+00 | 5.000000e-02 |
| 116 | 113 | 0 | 6.000000e-01 | 0.000000e+00 | 0.000000e+00 |
| 117 | 114 | 0 | 6.000000e-01 | 0.000000e+00 | -5.000000e-02 |
| 118 | 115 | 0 | 6.000000e-01 | 5.000000e-02 | 5.000000e-02 |
| 119 | 116 | 0 | 6.000000e-01 | 5.000000e-02 | 0.000000e+00 |
| 120 | 117 | 0 | 6.000000e-01 | 5.000000e-02 | -5.000000e-02 |
| 121 | 118 | 0 | 6.500000e-01 | -5.000000e-02 | 5.000000e-02 |
| 122 | 119 | 0 | 6.500000e-01 | -5.000000e-02 | 0.000000e+00 |
| 123 | 120 | 0 | 6.500000e-01 | -5.000000e-02 | -5.000000e-02 |
| 124 | 121 | 0 | 6.500000e-01 | 0.000000e+00 | 5.000000e-02 |
| 125 | 122 | 0 | 6.500000e-01 | 0.000000e+00 | 0.000000e+00 |
| 126 | 123 | 0 | 6.500000e-01 | 0.000000e+00 | -5.000000e-02 |
| 127 | 124 | 0 | 6.500000e-01 | 5.000000e-02 | 5.000000e-02 |
| 128 | 125 | 0 | 6.500000e-01 | 5.000000e-02 | 0.000000e+00 |
| 129 | 126 | 0 | 6.500000e-01 | 5.000000e-02 | -5.000000e-02 |
| 130 | 127 | 0 | 7.000000e-01 | -5.000000e-02 | 5.000000e-02 |
| 131 | 128 | 0 | 7.000000e-01 | -5.000000e-02 | 0.000000e+00 |
| 132 | 129 | 0 | 7.000000e-01 | -5.000000e-02 | -5.000000e-02 |
| 133 | 130 | 0 | 7.000000e-01 | 0.000000e+00 | 5.000000e-02 |
| 134 | 131 | 0 | 7.000000e-01 | 0.000000e+00 | 0.000000e+00 |
| 135 | 132 | 0 | 7.000000e-01 | 0.000000e+00 | -5.000000e-02 |
| 136 | 133 | 0 | 7.000000e-01 | 5.000000e-02 | 5.000000e-02 |
| 137 | 134 | 0 | 7.000000e-01 | 5.000000e-02 | 0.000000e+00 |
| 138 | 135 | 0 | 7.000000e-01 | 5.000000e-02 | -5.000000e-02 |
| 139 | 136 | 0 | 7.500000e-01 | -5.000000e-02 | 5.000000e-02 |
| 140 | 137 | 0 | 7.500000e-01 | -5.000000e-02 | 0.000000e+00 |
| 141 | 138 | 0 | 7.500000e-01 | -5.000000e-02 | -5.000000e-02 |
| 142 | 139 | 0 | 7.500000e-01 | 0.000000e+00 | 5.000000e-02 |
| 143 | 140 | 0 | 7.500000e-01 | 0.000000e+00 | 0.000000e+00 |
| 144 | 141 | 0 | 7.500000e-01 | 0.000000e+00 | -5.000000e-02 |
| 145 | 142 | 0 | 7.500000e-01 | 5.000000e-02 | 5.000000e-02 |
| 146 | 143 | 0 | 7.500000e-01 | 5.000000e-02 | 0.000000e+00 |

| | | | | | | | | | | |
|-----|-----|---|---------------|----------------|----------------|----|----|----|----|----|
| 147 | 144 | 0 | 7.5000000e-01 | 5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 | | | | | |
| 148 | 145 | 0 | 8.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 | | | | | |
| 149 | 146 | 0 | 8.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 | | | | | |
| 150 | 147 | 0 | 8.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 | | | | | |
| 151 | 148 | 0 | 8.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | 5.0000000e-02 | | | | | |
| 152 | 149 | 0 | 8.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | 0.0000000e+00 | | | | | |
| 153 | 150 | 0 | 8.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | -5.0000000e-02 | | | | | |
| 154 | 151 | 0 | 8.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 | | | | | |
| 155 | 152 | 0 | 8.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 | | | | | |
| 156 | 153 | 0 | 8.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 | | | | | |
| 157 | 154 | 0 | 8.5000000e-01 | -5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 | | | | | |
| 158 | 155 | 0 | 8.5000000e-01 | -5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 | | | | | |
| 159 | 156 | 0 | 8.5000000e-01 | -5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 | | | | | |
| 160 | 157 | 0 | 8.5000000e-01 | 0.0000000e+00 | 5.0000000e-02 | | | | | |
| 161 | 158 | 0 | 8.5000000e-01 | 0.0000000e+00 | 0.0000000e+00 | | | | | |
| 162 | 159 | 0 | 8.5000000e-01 | 0.0000000e+00 | -5.0000000e-02 | | | | | |
| 163 | 160 | 0 | 8.5000000e-01 | 5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 | | | | | |
| 164 | 161 | 0 | 8.5000000e-01 | 5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 | | | | | |
| 165 | 162 | 0 | 8.5000000e-01 | 5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 | | | | | |
| 166 | 163 | 0 | 9.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 | | | | | |
| 167 | 164 | 0 | 9.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 | | | | | |
| 168 | 165 | 0 | 9.0000000e-01 | -5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 | | | | | |
| 169 | 166 | 0 | 9.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | 5.0000000e-02 | | | | | |
| 170 | 167 | 0 | 9.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | 0.0000000e+00 | | | | | |
| 171 | 168 | 0 | 9.0000000e-01 | 0.0000000e+00 | -5.0000000e-02 | | | | | |
| 172 | 169 | 0 | 9.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 | | | | | |
| 173 | 170 | 0 | 9.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 | | | | | |
| 174 | 171 | 0 | 9.0000000e-01 | 5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 | | | | | |
| 175 | 172 | 0 | 9.5000000e-01 | -5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 | | | | | |
| 176 | 173 | 0 | 9.5000000e-01 | -5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 | | | | | |
| 177 | 174 | 0 | 9.5000000e-01 | -5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 | | | | | |
| 178 | 175 | 0 | 9.5000000e-01 | 0.0000000e+00 | 5.0000000e-02 | | | | | |
| 179 | 176 | 0 | 9.5000000e-01 | 0.0000000e+00 | 0.0000000e+00 | | | | | |
| 180 | 177 | 0 | 9.5000000e-01 | 0.0000000e+00 | -5.0000000e-02 | | | | | |
| 181 | 178 | 0 | 9.5000000e-01 | 5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 | | | | | |
| 182 | 179 | 0 | 9.5000000e-01 | 5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 | | | | | |
| 183 | 180 | 0 | 9.5000000e-01 | 5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 | | | | | |
| 184 | 181 | 0 | 1.0000000e+00 | -5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 | | | | | |
| 185 | 182 | 0 | 1.0000000e+00 | -5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 | | | | | |
| 186 | 183 | 0 | 1.0000000e+00 | -5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 | | | | | |
| 187 | 184 | 0 | 1.0000000e+00 | 0.0000000e+00 | 5.0000000e-02 | | | | | |
| 188 | 185 | 0 | 1.0000000e+00 | 0.0000000e+00 | 0.0000000e+00 | | | | | |
| 189 | 186 | 0 | 1.0000000e+00 | 0.0000000e+00 | -5.0000000e-02 | | | | | |
| 190 | 187 | 0 | 1.0000000e+00 | 5.0000000e-02 | 5.0000000e-02 | | | | | |
| 191 | 188 | 0 | 1.0000000e+00 | 5.0000000e-02 | 0.0000000e+00 | | | | | |
| 192 | 189 | 0 | 1.0000000e+00 | 5.0000000e-02 | -5.0000000e-02 | | | | | |
| 193 | 80 | | | | | | | | | |
| 194 | 1 | 1 | 1 | 2 | 11 | 10 | 4 | 5 | 14 | 13 |
| 195 | 2 | 1 | 2 | 3 | 12 | 11 | 5 | 6 | 15 | 14 |
| 196 | 3 | 1 | 4 | 5 | 14 | 13 | 7 | 8 | 17 | 16 |
| 197 | 4 | 1 | 5 | 6 | 15 | 14 | 8 | 9 | 18 | 17 |
| 198 | 5 | 1 | 10 | 11 | 20 | 19 | 13 | 14 | 23 | 22 |
| 199 | 6 | 1 | 11 | 12 | 21 | 20 | 14 | 15 | 24 | 23 |
| 200 | 7 | 1 | 13 | 14 | 23 | 22 | 16 | 17 | 26 | 25 |
| 201 | 8 | 1 | 14 | 15 | 24 | 23 | 17 | 18 | 27 | 26 |
| 202 | 9 | 1 | 19 | 20 | 29 | 28 | 22 | 23 | 32 | 31 |
| 203 | 10 | 1 | 20 | 21 | 30 | 29 | 23 | 24 | 33 | 32 |
| 204 | 11 | 1 | 22 | 23 | 32 | 31 | 25 | 26 | 35 | 34 |
| 205 | 12 | 1 | 23 | 24 | 33 | 32 | 26 | 27 | 36 | 35 |
| 206 | 13 | 1 | 28 | 29 | 38 | 37 | 31 | 32 | 41 | 40 |
| 207 | 14 | 1 | 29 | 30 | 39 | 38 | 32 | 33 | 42 | 41 |
| 208 | 15 | 1 | 31 | 32 | 41 | 40 | 34 | 35 | 44 | 43 |
| 209 | 16 | 1 | 32 | 33 | 42 | 41 | 35 | 36 | 45 | 44 |

| | | | | | | | | | | |
|-----|----|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 210 | 17 | 1 | 37 | 38 | 47 | 46 | 40 | 41 | 50 | 49 |
| 211 | 18 | 1 | 38 | 39 | 48 | 47 | 41 | 42 | 51 | 50 |
| 212 | 19 | 1 | 40 | 41 | 50 | 49 | 43 | 44 | 53 | 52 |
| 213 | 20 | 1 | 41 | 42 | 51 | 50 | 44 | 45 | 54 | 53 |
| 214 | 21 | 1 | 46 | 47 | 56 | 55 | 49 | 50 | 59 | 58 |
| 215 | 22 | 1 | 47 | 48 | 57 | 56 | 50 | 51 | 60 | 59 |
| 216 | 23 | 1 | 49 | 50 | 59 | 58 | 52 | 53 | 62 | 61 |
| 217 | 24 | 1 | 50 | 51 | 60 | 59 | 53 | 54 | 63 | 62 |
| 218 | 25 | 1 | 55 | 56 | 65 | 64 | 58 | 59 | 68 | 67 |
| 219 | 26 | 1 | 56 | 57 | 66 | 65 | 59 | 60 | 69 | 68 |
| 220 | 27 | 1 | 58 | 59 | 68 | 67 | 61 | 62 | 71 | 70 |
| 221 | 28 | 1 | 59 | 60 | 69 | 68 | 62 | 63 | 72 | 71 |
| 222 | 29 | 1 | 64 | 65 | 74 | 73 | 67 | 68 | 77 | 76 |
| 223 | 30 | 1 | 65 | 66 | 75 | 74 | 68 | 69 | 78 | 77 |
| 224 | 31 | 1 | 67 | 68 | 77 | 76 | 70 | 71 | 80 | 79 |
| 225 | 32 | 1 | 68 | 69 | 78 | 77 | 71 | 72 | 81 | 80 |
| 226 | 33 | 1 | 73 | 74 | 83 | 82 | 76 | 77 | 86 | 85 |
| 227 | 34 | 1 | 74 | 75 | 84 | 83 | 77 | 78 | 87 | 86 |
| 228 | 35 | 1 | 76 | 77 | 86 | 85 | 79 | 80 | 89 | 88 |
| 229 | 36 | 1 | 77 | 78 | 87 | 86 | 80 | 81 | 90 | 89 |
| 230 | 37 | 1 | 82 | 83 | 92 | 91 | 85 | 86 | 95 | 94 |
| 231 | 38 | 1 | 83 | 84 | 93 | 92 | 86 | 87 | 96 | 95 |
| 232 | 39 | 1 | 85 | 86 | 95 | 94 | 88 | 89 | 98 | 97 |
| 233 | 40 | 1 | 86 | 87 | 96 | 95 | 89 | 90 | 99 | 98 |
| 234 | 41 | 1 | 91 | 92 | 101 | 100 | 94 | 95 | 104 | 103 |
| 235 | 42 | 1 | 92 | 93 | 102 | 101 | 95 | 96 | 105 | 104 |
| 236 | 43 | 1 | 94 | 95 | 104 | 103 | 97 | 98 | 107 | 106 |
| 237 | 44 | 1 | 95 | 96 | 105 | 104 | 98 | 99 | 108 | 107 |
| 238 | 45 | 1 | 100 | 101 | 110 | 109 | 103 | 104 | 113 | 112 |
| 239 | 46 | 1 | 101 | 102 | 111 | 110 | 104 | 105 | 114 | 113 |
| 240 | 47 | 1 | 103 | 104 | 113 | 112 | 106 | 107 | 116 | 115 |
| 241 | 48 | 1 | 104 | 105 | 114 | 113 | 107 | 108 | 117 | 116 |
| 242 | 49 | 1 | 109 | 110 | 119 | 118 | 112 | 113 | 122 | 121 |
| 243 | 50 | 1 | 110 | 111 | 120 | 119 | 113 | 114 | 123 | 122 |
| 244 | 51 | 1 | 112 | 113 | 122 | 121 | 115 | 116 | 125 | 124 |
| 245 | 52 | 1 | 113 | 114 | 123 | 122 | 116 | 117 | 126 | 125 |
| 246 | 53 | 1 | 118 | 119 | 128 | 127 | 121 | 122 | 131 | 130 |
| 247 | 54 | 1 | 119 | 120 | 129 | 128 | 122 | 123 | 132 | 131 |
| 248 | 55 | 1 | 121 | 122 | 131 | 130 | 124 | 125 | 134 | 133 |
| 249 | 56 | 1 | 122 | 123 | 132 | 131 | 125 | 126 | 135 | 134 |
| 250 | 57 | 1 | 127 | 128 | 137 | 136 | 130 | 131 | 140 | 139 |
| 251 | 58 | 1 | 128 | 129 | 138 | 137 | 131 | 132 | 141 | 140 |
| 252 | 59 | 1 | 130 | 131 | 140 | 139 | 133 | 134 | 143 | 142 |
| 253 | 60 | 1 | 131 | 132 | 141 | 140 | 134 | 135 | 144 | 143 |
| 254 | 61 | 1 | 136 | 137 | 146 | 145 | 139 | 140 | 149 | 148 |
| 255 | 62 | 1 | 137 | 138 | 147 | 146 | 140 | 141 | 150 | 149 |
| 256 | 63 | 1 | 139 | 140 | 149 | 148 | 142 | 143 | 152 | 151 |
| 257 | 64 | 1 | 140 | 141 | 150 | 149 | 143 | 144 | 153 | 152 |
| 258 | 65 | 1 | 145 | 146 | 155 | 154 | 148 | 149 | 158 | 157 |
| 259 | 66 | 1 | 146 | 147 | 156 | 155 | 149 | 150 | 159 | 158 |
| 260 | 67 | 1 | 148 | 149 | 158 | 157 | 151 | 152 | 161 | 160 |
| 261 | 68 | 1 | 149 | 150 | 159 | 158 | 152 | 153 | 162 | 161 |
| 262 | 69 | 1 | 154 | 155 | 164 | 163 | 157 | 158 | 167 | 166 |
| 263 | 70 | 1 | 155 | 156 | 165 | 164 | 158 | 159 | 168 | 167 |
| 264 | 71 | 1 | 157 | 158 | 167 | 166 | 160 | 161 | 170 | 169 |
| 265 | 72 | 1 | 158 | 159 | 168 | 167 | 161 | 162 | 171 | 170 |
| 266 | 73 | 1 | 163 | 164 | 173 | 172 | 166 | 167 | 176 | 175 |
| 267 | 74 | 1 | 164 | 165 | 174 | 173 | 167 | 168 | 177 | 176 |
| 268 | 75 | 1 | 166 | 167 | 176 | 175 | 169 | 170 | 179 | 178 |
| 269 | 76 | 1 | 167 | 168 | 177 | 176 | 170 | 171 | 180 | 179 |
| 270 | 77 | 1 | 172 | 173 | 182 | 181 | 175 | 176 | 185 | 184 |
| 271 | 78 | 1 | 173 | 174 | 183 | 182 | 176 | 177 | 186 | 185 |
| 272 | 79 | 1 | 175 | 176 | 185 | 184 | 178 | 179 | 188 | 187 |


```

273 80 1 176 177 186 185 179 180 189 188
274 1
275 1 3
276 0.0 0.5e+6 0.6667e+6
277 3 0 0 0.0 0.0 0.0
278 184 0.0 -21.25 0.0
279 185 0.0 -42.5 0.0
280 186 0.0 -21.25 0.0
281 10 1 1 20 1.0e-5 0.0 0.0 1 0 185 2

```

7. Ulazni parametri ravninskog stanja naprezanja 2D ploče s rupom za FFlagSHyP, poglavlje 7.5.1

```

1 2d ploca s rupom - test
2 quad4
3 21
4 1 2 30 0
5 2 0 30 8.04
6 3 0 30 17.32
7 4 0 30 30
8 5 0 17.32 30
9 6 0 8.04 30
10 7 1 0 30
11 8 2 20 0
12 9 0 20 5.36
13 10 0 20 11.54
14 11 0 20 20
15 12 0 11.54 20
16 13 0 5.36 20
17 14 1 0 20
18 15 2 10 0
19 16 0 9.66 2.58
20 17 0 8.66 5
21 18 0 7.07 7.07
22 19 0 5 8.66
23 20 0 2.58 9.66
24 21 1 0 10
25 12
26 1 1 1 2 9 8
27 2 1 2 3 10 9
28 3 1 3 4 11 10
29 4 1 4 5 12 11
30 5 1 5 6 13 12
31 6 1 6 7 14 13
32 7 1 8 9 16 15
33 8 1 9 10 17 16
34 9 1 10 11 18 17
35 10 1 11 12 19 18
36 11 1 12 13 20 19
37 12 1 13 14 21 20
38 1
39 1 4
40 0.0 0.5 0.667 20
41 4 0 0 0.0 0.0
42 1 15 0
43 2 30 0
44 3 30 0
45 4 15 0
46 20 1 1 30 1.0e-5 -10.0 0.0 1 0.0 0 0

```

8. Ulazni parametri ravninskog stanja deformacije 2D ploče s rupom za FFlagSHyP,

poglavlje 7.5.1

```
1 2d ploca s rupom - test
2 quad4
3 21
4 1      2      30e-3    0
5 2      0      30e-3    8.04e-3
6 3      0      30e-3    17.32e-3
7 4      0      30e-3    30e-3
8 5      0      17.32e-3 30e-3
9 6      0      8.04e-3   30e-3
10 7     1      0      30e-3
11 8     2      20e-3    0
12 9     0      20e-3    5.36e-3
13 10    0      20e-3    11.54e-3
14 11    0      20e-3    20e-3
15 12    0      11.54e-3 20e-3
16 13    0      5.36e-3   20e-3
17 14    1      0      20e-3
18 15    2      10e-3    0
19 16    0      9.66e-3   2.58e-3
20 17    0      8.66e-3   5e-3
21 18    0      7.07e-3   7.07e-3
22 19    0      5e-3      8.66e-3
23 20    0      2.58e-3   9.66e-3
24 21    1      0      10e-3
25 12
26 1     1     1     2     9     8
27 2     1     2     3     10    9
28 3     1     3     4     11    10
29 4     1     4     5     12    11
30 5     1     5     6     13    12
31 6     1     6     7     14    13
32 7     1     8     9     16    15
33 8     1     9     10    17    16
34 9     1    10    11    18    17
35 10    1    11    12    19    18
36 11    1    12    13    20    19
37 12    1    13    14    21    20
38 1
39 1 3
40 0.0 0.5e+6 0.667e+6
41 4 0 0 0.0 0.0
42 1 750 0
43 2 1500 0
44 3 1500 0
45 4 750 0
46 20 1 1 30 1.0e-5 0.0 0.0 1 0.0 0 0
```

9. Ulazni parametri 3D ploče s rupom za FFlagSHyP, poglavlje 7.5.2

```
1 3D ploca s rupom-test
2 hexa8
3 42
4 1      2      30      0      0
5 2      0      30      8.04    0
6 3      0      30      17.32   0
7 4      0      30      30      0
8 5      0      17.32   30      0
9 6      0      8.04    30      0
10 7     1      0      30      0
11 8     2      20      0      0
```

| | | | | | | | | | | | |
|----|-----|-----|-------|-------|--------|-------|-----|----|-----|----|---|
| 12 | 9 | 0 | 20 | 5.36 | 0 | | | | | | |
| 13 | 10 | 0 | 20 | 11.54 | 0 | | | | | | |
| 14 | 11 | 0 | 20 | 20 | 0 | | | | | | |
| 15 | 12 | 0 | 11.54 | 20 | 0 | | | | | | |
| 16 | 13 | 0 | 5.36 | 20 | 0 | | | | | | |
| 17 | 14 | 1 | 0 | 20 | 0 | | | | | | |
| 18 | 15 | 2 | 10 | 0 | 0 | | | | | | |
| 19 | 16 | 0 | 9.66 | 2.58 | 0 | | | | | | |
| 20 | 17 | 0 | 8.66 | 5 | 0 | | | | | | |
| 21 | 18 | 0 | 7.07 | 7.07 | 0 | | | | | | |
| 22 | 19 | 0 | 5 | 8.66 | 0 | | | | | | |
| 23 | 20 | 0 | 2.58 | 9.66 | 0 | | | | | | |
| 24 | 21 | 1 | 0 | 10 | 0 | | | | | | |
| 25 | 22 | 6 | 30 | 0 | 10 | | | | | | |
| 26 | 23 | 4 | 30 | 8.04 | 10 | | | | | | |
| 27 | 24 | 4 | 30 | 17.32 | 10 | | | | | | |
| 28 | 25 | 4 | 30 | 30 | 10 | | | | | | |
| 29 | 26 | 4 | 17.32 | 30 | 10 | | | | | | |
| 30 | 27 | 4 | 8.04 | 30 | 10 | | | | | | |
| 31 | 28 | 5 | 0 | 30 | 10 | | | | | | |
| 32 | 29 | 6 | 20 | 0 | 10 | | | | | | |
| 33 | 30 | 0 | 20 | 5.36 | 10 | | | | | | |
| 34 | 31 | 0 | 20 | 11.54 | 10 | | | | | | |
| 35 | 32 | 0 | 20 | 20 | 10 | | | | | | |
| 36 | 33 | 0 | 11.54 | 20 | 10 | | | | | | |
| 37 | 34 | 0 | 5.36 | 20 | 10 | | | | | | |
| 38 | 35 | 5 | 0 | 20 | 10 | | | | | | |
| 39 | 36 | 6 | 10 | 0 | 10 | | | | | | |
| 40 | 37 | 0 | 9.66 | 2.58 | 10 | | | | | | |
| 41 | 38 | 0 | 8.66 | 5 | 10 | | | | | | |
| 42 | 39 | 0 | 7.07 | 7.07 | 10 | | | | | | |
| 43 | 40 | 0 | 5 | 8.66 | 10 | | | | | | |
| 44 | 41 | 0 | 2.58 | 9.66 | 10 | | | | | | |
| 45 | 42 | 5 | 0 | 10 | 10 | | | | | | |
| 46 | 12 | | | | | | | | | | |
| 47 | 1 | 1 | 2 | 9 | 8 | 22 | 23 | 30 | 29 | | |
| 48 | 2 | 1 | 2 | 3 | 10 | 9 | 23 | 24 | 31 | 30 | |
| 49 | 3 | 1 | 3 | 4 | 11 | 10 | 24 | 25 | 32 | 31 | |
| 50 | 4 | 1 | 4 | 5 | 12 | 11 | 25 | 26 | 33 | 32 | |
| 51 | 5 | 1 | 5 | 6 | 13 | 12 | 26 | 27 | 34 | 33 | |
| 52 | 6 | 1 | 6 | 7 | 14 | 13 | 27 | 28 | 35 | 34 | |
| 53 | 7 | 1 | 8 | 9 | 16 | 15 | 29 | 30 | 37 | 36 | |
| 54 | 8 | 1 | 9 | 10 | 17 | 16 | 30 | 31 | 38 | 37 | |
| 55 | 9 | 1 | 10 | 11 | 18 | 17 | 31 | 32 | 39 | 38 | |
| 56 | 10 | 1 | 11 | 12 | 19 | 18 | 32 | 33 | 40 | 39 | |
| 57 | 11 | 1 | 12 | 13 | 20 | 19 | 33 | 34 | 41 | 40 | |
| 58 | 12 | 1 | 13 | 14 | 21 | 20 | 34 | 35 | 42 | 41 | |
| 59 | 1 | | | | | | | | | | |
| 60 | 1 | 3 | | | | | | | | | |
| 61 | 0.0 | 0.5 | 0.667 | | | | | | | | |
| 62 | 8 | 0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | | | | | | |
| 63 | 1 | 7.5 | 0.0 | 0.0 | | | | | | | |
| 64 | 2 | 15 | 0.0 | 0.0 | | | | | | | |
| 65 | 3 | 15 | 0.0 | 0.0 | | | | | | | |
| 66 | 4 | 7.5 | 0.0 | 0.0 | | | | | | | |
| 67 | 22 | 7.5 | 0.0 | 0.0 | | | | | | | |
| 68 | 23 | 15 | 0.0 | 0.0 | | | | | | | |
| 69 | 24 | 15 | 0.0 | 0.0 | | | | | | | |
| 70 | 25 | 7.5 | 0.0 | 0.0 | | | | | | | |
| 71 | 20 | 1 | 1 | 30 | 1.0e-5 | -10.0 | 0.0 | 1 | 0.0 | 0 | 0 |
