Primjena HP Prime kalkulatora za inverzni model linearnog dinamičkog sustava

Kožar, I.[1]

Sažetak
Prije početka mjerenja konstukcija se nalazi u nekom stanju koje u pravilu nije stanje mirovanja pa problem pri uspoređivanju rezultata mjerenja i predviđanja modela može biti nepoznavanje početnih uvjeta konstrukcije (pomak i brzina točaka u kojima mjerimo).

U ovom radu se bavimo određivanjem početnih uvjeta oscilirajuće konstrukcije, iz mjerenja pomaka u vremenu, a koja u trenutku mjerenja nije pod djelovanjem sile. Problem se opisuje matrično, preko matrice mjerenja. Primjer koji se prikazuje je homogeni sustav s jednom masom, sa ili bez prigušenje u sistemu. Pretpostavka je da su mjerenja potpuno točna, tj., nemamo greške mjerenja. Postupak se može proširiti na sustave s više masa, na nehomogene probleme, uz uključen tretman greške mjerenja, ali se to proširenje, zbog ograničenja prostora, ovdje ne prikazuje.

Svi primjeri riješeni su na HP Prime kalkulatoru kao ilustracija upotrebljivosti sofisticiranog kalkulatora u nastavi na tehničkim fakultetima.

Ključne riječi: dinamička analiza, početni uvjeti, inverzni model, HP Prime kalkulator

[1] **Prof. Ivica Kožar, prof. U trajnom zvanju**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za modeliranje, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: ivica.kozar@gradri.uniri.hr

1 Homogeni sustav s 1 masom

Sustav s jednom masom a bez prigušenja i pobudne sile, opisan je linearnom diferencijalnom jednadžbom drugog reda koja, kada je podijelimo s masom 'm' izgleda ovako

$$\ddot{x}(\mathrm{t}) + \omega^2 \mathrm{x}(\mathrm{t}) = 0 \tag{1}$$

gdje je $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, a k i m su krutost i masa. Početni uvjeti su: za pomak, $x(t_0) = x_0$ i za brzinu $v(t_0) = v_0$, a obično je $t_0 = 0$.

Problem kojim se bavimo je određivanje upravo početnih uvjeta ako su nam poznata mjerenja pomaka sistema u vremenu od t_1 do t_2. Taj izmjereni vremenski niz može biti načinjen u proizvoljnim i nejednolikim vremenskim razmacima; na pr., provodimo dinamička mjerenja mosta kojeg smo uzbudili prelaskom vozila i snimamo pomake u vremenu nakon što je vozilo prešlo most (masa vozila nije pridodana masi mosta) [1].

Analitičko rješenje diferencijalne jednadžbe (1) je $x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$ pa lako možemo formulirati jednadžbu mjerenja koja povezuje mjerene i tražene veličine. Matrično formulirana jednadžba mjerenja je

$$\mathbb{y} = \mathbb{H}\, \mathbb{p} \tag{2}$$

gdje je $\mathbb{y}$ vektor mjerenih podataka, $\mathbb{H}$ matrica mjerenja, $\mathbb{p}$ vektor parametara koje tražimo (u našem primjeru to su početni uvjeti). Vektor je $\mathbb{p} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{Bmatrix}$ i matrica mjerenja je

$$\mathbb{H} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \cos(\omega t) & \frac{1}{\omega}\sin(\omega t) \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix} \tag{3}$$

Rješenje jednadžbe mjerenja možemo dobiti preko generalizirane inverzne matrice. U našem primjeru matrica $\mathbb{H}$ je popunjena i ima više redaka nego stupaca pa generaliziranu inverznu matricu dobijamo trivijalnim postupkom $\mathbb{H}^{\boldsymbol{G}} = (\mathbb{H}^{\boldsymbol{T}} * \mathbb{H})^{-\mathbf{1}} \mathbb{H}^{\boldsymbol{T}}$. Rješenje (aproksimacija) početnih uvjeta $\mathbb{p}^0$ je sada

$$\mathbb{p}^{\mathbf{0}} = \mathbb{H}^{\boldsymbol{G}} \mathbb{y} \tag{4}$$

U idealnom slučaju $\mathbb{p}^0 = \mathbb{p}$ (kao u našem slučaju gdje su mjerenja apsolutno točna).

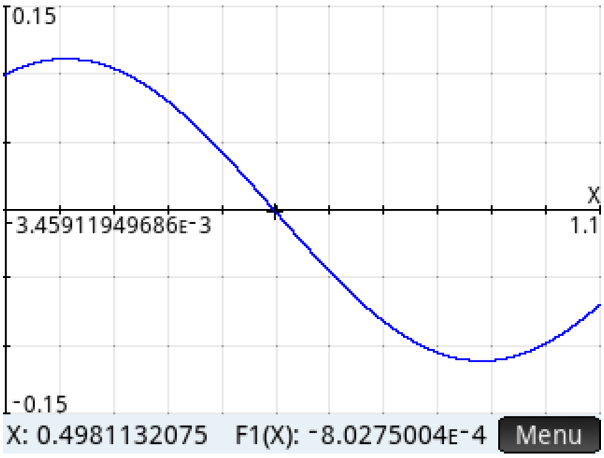
1.1 Primjer

Numerička rješenja svih primjera naćinjena su na HP Prime kalkulatoru kao ilustracija upotrebljivosti sofisticiranog kalkulatora u nastavi na tehničkim fakultetima [2].

Ulazni podaci su: krutost $k = 5.0$ kN/m, masa $m = 0.3$ t. Pretpostavit ćemo i početne uvjete, koje inače želimo odrediti (kao da ih ne znamo), $x_0 = 0.1$ m, $v_0 = 0.2$ m/s.

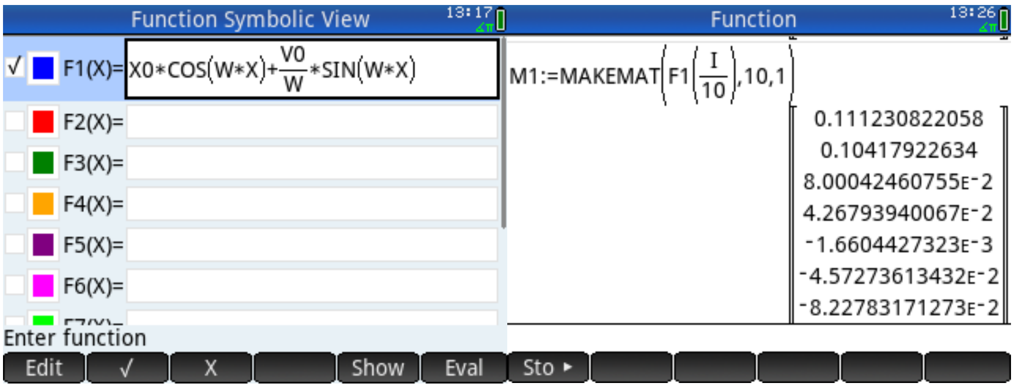
Ovim podacima dinamički sistem s jednom masom potpuno je određen i rješenje možemo naći analitički. To ćemo rješenje upotrijebiti da proizvedemo rezultate pomaka sistema u vremenskom intervalu od 1 sekunde, u razmacima od po 0.1 sekunde, $t = [0.1, 0.2, \ldots, 1.0]$.

Ti će analitički rezultati zamijeniti (simulirati) rezultate mjerenja; time smo uveli pretpostavku da nemamo greške mjerenja (za potrebe testiranja postupka, grešku možemo uvesti kasnije). Grafički prikaz vektora mjerenja je



Slika 1. Grafički prikaz pomaka mase u sustavu s 1 stupnjem slobode

Naravno, kada znademo analitičko rješenje, simulirano mjerenje jednostavno dobijemo preko funkcije rješenja u točkama (vremenima) koja nas zanimaju. Neka je analitičko rješenje programirano kao funkcija F1, a vektor mjerenja neka je u varijabli M1



Slika 2. Prikaz zadavanja funkcije pomaka i izračun vektora "mjerenja"

Prema jednadžbi (3) konstruirana je matrica mjerenja $\mathbb{H}$ i izračunat je njezin inverz $\mathbb{H}^G$dimenzije $[2\times m]$, gdje je m broj podataka mjerenja (u našem primjeru 10).
"Nepoznati" početni uvjet sada dobijemo jednostavnim množenjem matrice $\mathbb{H}^G$ i vektora mjerenih podataka $\mathbb{y}$. Rezultat je

$$\mathbb{p}^{\mathbf{0}} = \mathbb{H}^{G}\mathbb{y} = \begin{Bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

što je potpuno točno. Naravno, takvu točnost možemo očekivati samo u ovakvim školskim primjerima gdje su rezultati mjerenja bez ikakve greške.

2 Homogeni sustav s 1 masom i prigušenjem

Ukoliko u sustav dodamo viskozno prigušenje opisano koeficijentom prigušenja ξ, dobijemo jednadžbu

$$\ddot{x}(\mathrm{t}) + 2\xi\dot{x}(\mathrm{t}) + \omega^2\mathrm{x}(\mathrm{t}) = 0 \quad (6)$$

Rješavanje takvog sustava je složenije pa ćemo, radi sažetog pisanja, uvesti dodatne oznake (prema [3]):

$$\begin{gathered} \omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2} \qquad \bar{\xi} = \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \\ S(\mathrm{t}) = \sin(\omega_D \mathrm{t})\exp(-\omega t) \\ C(\mathrm{t}) = \cos(\omega_D \mathrm{t})\exp(-\omega t) \\ A_1(t) = C(t) + \bar{\xi}S(t) \qquad A_2 = \frac{S(t)}{\omega_D} \end{gathered} \quad (7)$$

Analitičko rješenje je u obliku $x(t) = x_0A_1(t) + v_0A_2(t)$.

Pri formiranju jednadžbe mjerenja, pretpostavit ćemo da nam je prigušenje ξ poznato (slučaj kada istovremeno s početnim uvjetima određujemo i prigušenje prikazat ćemo kasnije).

Jednadžba mjerenja (2) ostaje nepromijenjena, ali matrica mjerenja izgleda drugačije

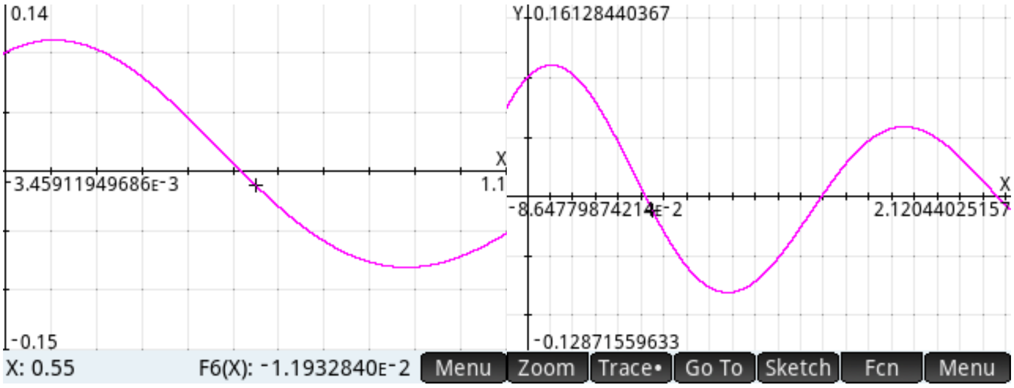
$$\mathbb{H} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \mathrm{A}(t) & A_2(t) \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix} \quad (8)$$

Vidimo da, kada znamo prigušenje ξ, nema suštinske promjene u odnosu na sistem s prigušenjem. Problem nastaje kada želimo iz mjerenja odrediti i prigušenje, koje ne možemo jednostavno parametrizirati jer se nalazi pod korijenom, unutar harmonijske funkcije i u eksponentu. U tom slučaju, matrica mjerenja je funkcija parametra prigušenja jer je $A_1(\xi,t)$ i $A_2(\xi,t)$. Postupci za rješavanje ovakvog problema su složeniji i bit će prikazani kasnije. Umjesto određivanja parametra ξ, može se prikazati osjetljivosti matrice mjerenja s obzirom na veličinu prigušenja.

2.1 Primjer

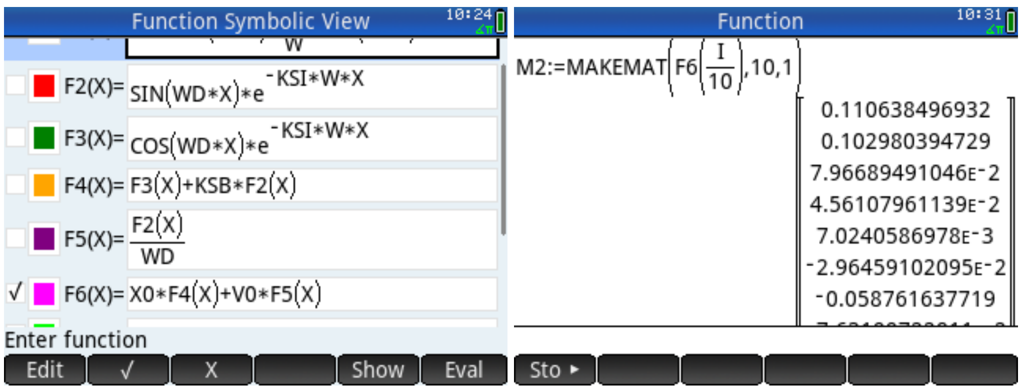
Ulazni podaci su: krutost k = 5.0 kN/m, masa m = 0.3 t, prigušenje ξ = 0.1. Pretpostavit ćemo iste početne uvjete, koje inače želimo odrediti (kao da ih ne znamo), x0 = 0.1 m, v0 = 0.2 m/s.

Ovim podacima dinamički sistem potpuno je određen i rješenje možemo naći analitički. To ćemo rješenje upotrijebiti da proizvedemo rezultate pomaka sistema u vremenskom intervalu od 1 sekunde, u razmacima od po 0.1 sekunde; tako ćemo simulirati mjerenje (bez greške). Grafički prikaz vektora mjerenja je



Slika 3. Grafički prikaz pomaka mase s prigušenjem u sustavu s 1 stupnjem slobode

Matrica mjerenja načinjena je prema jednadžbi (8)



Slika 4. Prikaz zadavanja funkcije pomaka i izračun vektora "mjerenja" za sustav s prigušenjem

Ponovo je načinjena matrica mjerenja $\mathbb{H}$ prema jednadžbi (3) i izračunat je njezin inverz $\mathbb{H}^G$ dimenzije $[2\times m]$. "Nepoznati" početni uvjet je umnožak matrice $\mathbb{H}^G$ i vektora mjerenih podataka $\mathbb{y}$. Rezultat je točan, rješenje je kao u jednadžbi (5)!

3 Diskusija

Prikazan je postupak rješavanja inverznog dinamičkog problema, uz upotrebu programabilnog kalkulatora HP Prime (besplatna aplikacija za računala) za sve numeričke izračune.

Vidljiva su određena ograničenja kalkulatora, na pr., nazivi funkcija počinju velikim slovom ”F”, varijable imenovane velikim slovima i sl. Ta je ograničenja moguće zaobići ali to podrazumijeva nešto višu razinu poznavanja rada i programiranja HP Prime kalkulatora [2].

4 Zaključak

Izložen je postupak rekonstrukcije nepoznatih početnih uvjeta jednostavnog dinamičkog problema. Glavna karakteristika predloženog postupka je da pretpostavlja poznato rješenje problema iz kojeg se onda formulira inverzni postupak za određivanje parametara koji se mogu mjeriti. Postupak odgovara rekonstrukciji nepoznatog statičkog opterećenja na konstrukciju [4].

Daljnji rad uključuje analizu utjecaja greške i prikaz postupaka koji smanjuju utjecaj greške mjerenja na točnost rezultata. Postupak se može proširiti za istovremeno određivanje početnih uvjeta i prigušenja.

Proširivanje analize na sustave s više stupnjeva slobode, kod kojih nemamo rješenje u analitičkom obliku, traži primjenu numeričkih inverznih metoda i predstavlja zaseban problem.

Zahvale

Autor se zahvaljuje na potpori za izradu ovog rada: projekt MZO i SAFU KK.01.1.1.04.0056 ”Zaštita cjelovitosti konstrukcija u energetici i transportu”, projekt HRZZ 7926 ”Separation of parameter influence in engineering modelling and parameter identification”.

Literatura

[1] Kožar, I. i Torić Malić, N.; Spectral method in realistic modelling of bridges under moving vehicles; Engineering Structures; 2013; 50; 149-157.

[2] Kožar, I; *Uvod u upotrebu i programiranje HP Prime kalkulatora*; Rijeka; 2020.

[3] Wilson, E.; *Static & Dynamic Analysis of Structures*; Berkeley; 2004.

[4] Kožar, I.; Procjena parametara i opterećenja iz mjerenja na konstrukcijama i modelima; Numerički postupci. Zbornik radova mini – simpozija; GF Zagreb; https://doi.org/10.5592/CO/YODA.2019