

Odnos elastičnih deformacija i greške koraka zuba zupčanika

Miler, D.¹, Hoić, M.² i Semenski, D.³

Sažetak

Prilikom proračuna zupčaničkih prijenosnika potrebno je uz ostale faktore u obzir uzeti i utjecaje netočnosti izrade. Kvaliteta će tako ovisiti o definiranom stupnju kvalitete izrade; viši stupanj osigurava manja odstupanja od teorijskih vrijednosti, osiguravajući ravnomjerniju razdiobu opterećenja na parove zubi u zahvatu. U ovom radu je prikazano preliminarno istraživanje utjecaja greške koraka ozubljenja na razdiobu opterećenja, koristeći kao primjer zubnu letvu s ravnim zubima. Cilj istraživanja je bio provjeriti mogu li i u kojoj mjeri elastične deformacije kompenzirati navedenu grešku. Prikazana su dva slučaja; u prvom je razmak zubi na obje letve idealan, dok je u drugom pretpostavljeno odstupanje koraka u skladu s odabranom IT kvalitetom (maksimalno dopušteno). Problem je riješen na tri načina, koristeći Euler-Bernoullijevu i Timoshenkovu teoriju greda te numerički (Abaqus). Rezultati dobiveni korištenjem Timoshenkove teorije savijanja greda pokazali su veliko poklapanje s numeričkim rezultatima. Odstupanje koraka zubne letve ima veliki utjecaj na razdiobu opterećenja na parove zubi, pri čemu elastične deformacije mogu kompenzirati greške za manja odstupanja.

Ključne riječi: zupčanici; teorija savijanja grede; greška ozubljenja; elastična deformacija zuba

¹ **Dr. sc. Daniel Miler, poslijedoktorand**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za motore i transportna sredstva, Ivana Lučića 5, 10002 Zagreb, e-mail: daniel.miler@fsb.hr

² **Doc. dr. sc. Matija Hoić, docent**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za motore i transportna sredstva, Ivana Lučića 5, 10002 Zagreb, e-mail: matija.hoić@fsb.hr

³ **Prof. dr. sc. Damir Semenski, redoviti profesor**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10002 Zagreb, e-mail: damir.semenski@fsb.hr

1 Uvod

Standard ISO 6336:2006 [1] predviđa dva tipa oštećenja kod čelnika s ravnim i kosim zubima – lom zuba uslijed opterećenja korijena na savijanje te gubitak cjelovitosti površine boka uslijed visokih Hertzovih pritisaka. Navedeni standard promatra zub čelnika kao konzolu čije se naprezanje približava stvarnom dodavanjem brojnih utjecajnih faktora. Opterećenje zupčanika je pritom složeno – pored utjecaja savijanja i smika, kao posljedica nagiba boka zuba pojavljuje se sila paralelna s osi simetrije koja tlači samo jedan bok zuba. Kako se pored navedenih opterećenja zuba pojavljuju i brojni lokalni utjecaji, pojednostavljenja su nužna.

Istovremeno u zahvatu može biti jedan ili više parova zubi, zbog čega će izračun razdiobe opterećenja na parove zubi u kontaktu omogućiti točnije proračune kako čvrstoće i stupnja djelovanja prijenosnika [2]. Razdioba opterećenja će ovisiti o krutosti parova zubi zupčanika – o apsolutnom progibu zuba i lokalnim deformacijama uslijed kontakta. S druge strane, korištenje numeričkih metoda daje točne rezultate, ali je nepraktično za budući da provjera svake kombinacije parametara zahtijeva mnogo vremena.

Navedeni problem moguće je riješiti na nekoliko načina; često se koriste teorije savijanja greda, poput Euler-Bernoullijeve i Timoshenkove [3]. Euler-Bernoullijeva teorija je zasnovana na pretpostavci da je progib posljedica isključivo opterećenja nosača na savijanje, zanemarujući pritom utjecaje ostalih opterećenja. Pritom su poprečni presjeci duž grede okomiti su na neutralnu liniju. Timoshenkova teorija [4] se nadovezuje na Euler-Bernoullijevu, no uz utjecaj momenata savijanja na progib, u obzir se uzima i pomak uzrokovan smikom. Zbog smika, koji uzrokuje klizanje poprečnih presjeka, poprečni presjeci neće biti okomiti na neutralnu liniju. Izračun je kompleksniji, no točniji pri proračunu kratkih greda [5]. Kako je omjer visine i duljine zuba malen, u kontekstu zupčanika za proračun progiba je primjerenija Timoshenkova teorija. Naposljetku, problem savijanja greda moguće je riješiti i korištenjem energetskih metoda poput Rayleigh-Ritzove, koja se zasniva na traženju minimuma potencijalne energije. No, problem rješavanja ovom metodom je što je potrebno poznavati oblik funkcije rješenja.

U okviru ovog rada promatran je utjecaj greške ozubljenja na razdiobu opterećenja na zube u zahvatu, kao i uloga elastičnih deformacija. Problem je promatran na standardnoj zubnoj letvi profila A dimenzioniranoj prema ISO 53:1998 [6], koja se sastoji od dva zuba. Obradena su dva različita slučaja; u prvom je razmak zubi na obje letve idealan, dok je u drugom za odabranu IT kvalitetu pretpostavljeno maksimalno dopušteno odstupanje u koraku. Problem je riješen na tri načina, koristeći Euler-Bernoullijevu i Timoshenkovu teoriju greda te numerički.

2 Metoda

Modeli zubnih letvi korišteni prilikom rješavanja zadatka dimenzionirani su u skladu s važećom normom ISO 53:1998 [6]. Za visinu zuba odabrana je oznaka L , dok je širina na diobenom pravcu $\pi/2$ modula; širine tolerancijskih polja nisu razmatrane. Zubne letve su izrađene od čelika, odnosno $E = 210.000$ MPa, $\nu = 0,3$. Geometrijski su konzole promjenjivog poprečnog presjeka te je moguća primjena Euler-Bernoullijeve i Timoshenkove teorije savijanja greda. Teorije greda su odabrane budući da je za rješavanje Rayleigh-Ritzovom metodom i Airyjevom funkcijom potrebno pretpostaviti oblik funkcije rješenja koji u ovom slučaju nije poznat.

Odabrani profil prikazan je na slici 1. Vrijednost kuta nagiba bočne linije je $\alpha = 20^\circ$, tjemene visine zuba $h_{aP} = 1$ modul (m), podnožne visine zuba $h_{fP} = 1,25 m$ i radijusa zaobljenja

korijena $\rho_{FP} = 0,38 m$. Model se sastoji od dvije zubne letve s dva para zubi u zahvatu. Utjecaj odstupanja koraka na razdiobu opterećenja na parove zubi promatran je koristeći dva slučaja:

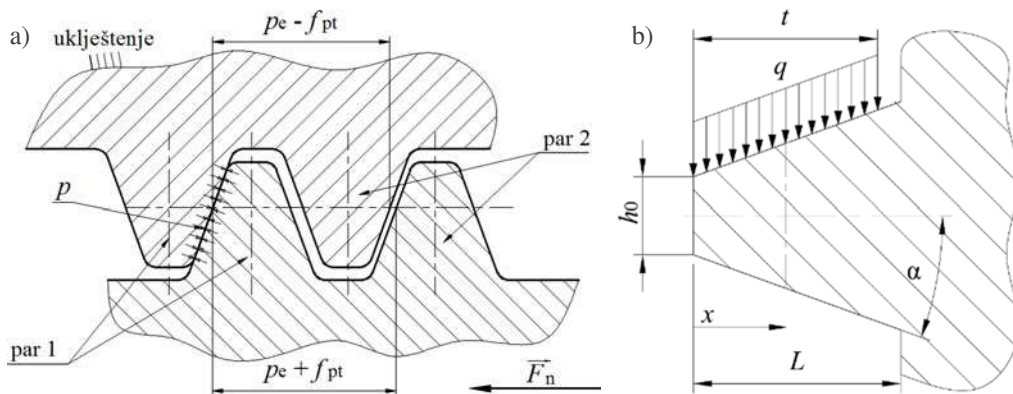
- zubne letve su identične i imaju korake jednake duljine ($p_{e1} = p_{e2}$),
- jedna zubna letva je izrađena na gornjoj granici tolerancijskog polja, a druga na donjoj, ($p_{e1} < p_{e2}$); pritom je $p_{e1} = p_{e2} - 2f_{pt}$, gdje je f_{pt} najveće dopušteno odstupanje koraka.

Nakon analitičkog izračuna progiba, rezultati su uspoređeni s numeričkim rješenjem dobivenim korištenjem metode konačnih elemenata. Analiza je provedena u programskom paketu Abaqus 6.13 te su korišteni su 3D elementi; postupak je prikazan u Poglavlju 3.3.

Naposljetku, širine tolerancijskih polja koja definiraju dopuštena odstupanja u koraku odabrane su prema ISO 1328-1:1997 [7]. Greške ozubljenja posljedica su ponajprije neizbježnih grešaka proizvodnje i montaže. Kod parova zupčanika one utječu na sliku nošenja, odnosno razdiobu opterećenja duž linije zahvata, narušavajući pritom uvjete rada. Zbog toga proračuni čvrstoće nisu mogući bez poznavanja stupnja IT kvalitete ozubljenja, koji se preko raznih proračunskih faktora uključuje u izračune. Za svaki stupanj kvalitete su pored hrapavosti, definirana i odstupanja ozubljenja; za zupčanike s ravnim zubima ISO 1328-1:1997 [7] predviđa odstupanje koraka i profila. U okviru rada odabrana je kvaliteta IT7, koja za modul $m = 10$ mm dopušta odstupanje koraka $f_{pt} = \pm 19 \mu m$.

3 Analitičko rješenje

Prilikom rješavanja, prvo je potrebno odrediti razdiobu poprečnih sila i momenata savijanja duž konzole (slika 1) te je za ishodište koordinatnog sustava odabrano je tjeme zuba. Kontinuirano opterećenje nije raspoređeno cijelom dužinom, već samo jednim dijelom; stoga će rješavanje iziskivati dva područja integracije. Duž prvog područja integracije nalazi se kontinuirano opterećenje, zbog čega su dijagrami momenata savijanja i poprečnih sila kompleksniji u odnosu na drugo područje. Drugo područje moguće je zamisliti kao konzolu opterećenu koncentriranom silom iznosa $F = q \cdot t$ na mjestu $x = t$. Budući da su polinome raspodjele Q_y i M_z za stupanj niži, jednadžbe su jednostavnije. Naposljetku, moment tromosti $I(x)$ i površina presjeka $A(x)$ ovise o koordinati x . Odnos dužina L i t definiran je profilom ozubljenja i iznosi $L/t = 9/8$. Rubni uvjeti su postavljeni na krajevima te između područja integracije kako bi se osigurala cjelovitost.



Slika 1. Standardni profil oblika A prema ISO 53:1998 (a) i mehanički model (b)

Naposljetku, valja napomenuti da su pretpostavljena određena pojednostavljena:

- radijus korijena zuba iznosi 0; ima neznatan utjecaj na krutost, a time i progibe,
- bočni pritisak je jednoliko raspoređen (konstantno kontinuirano opterećenje),
- pretpostavljeni su mali pomaci,
- ozubljenje je izrađeno od izotropnog, linearno-elastičnog materijala,
- kontaktna naprezanja nisu uzeta u obzir,
- zanemarena je aksijalna komponenta opterećenja.

3.1 Timoshenkova teorija

Teorija se zasniva na sustavu od dvije diferencijalne jednačbe, koje za promatrani slučaj zbog promjenjive visine poprečnog presjeka glase [4]:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI_z(x) \frac{d\varphi}{dx} \right] = q(x); \quad \frac{dw}{dx} = \varphi - \frac{1}{\kappa A(x)G} \left[EI_z(x) \frac{d\varphi}{dx} \right] \quad (1)$$

gdje je pomak w u smjeru y -osi, dok se kut zakreta φ definira oko osi z . Nakon izračuna kutova zakreta te njihova deriviranja koristeći programski paket *Wolfram Mathematica 11.1*, te uvrštavanja u Timoshenkov izraz za progib, određene su sve vrijednosti osim korekcijskog faktora smicanja κ . U ovom radu odabrana je vrijednost prema izrazu koji je predložio Timoshenko te za promatrani slučaj iznosi 0,866.

3.2 Euler-Bernoullijeva teorija

Euler-Bernoullijeva teorija greda ne uzima u obzir utjecaj smika na progib i kut zakreta. Odnos opterećenja i progiba grede opisan je kao:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI_z(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right] = q. \quad (2)$$

integriranjem izraza (2) dva puta te uvrštavanjem rubnih uvjeta nakon svakog integriranja dobivaju se vrijednosti konstanti integracije $C_1 = C_2 = 0$. Integriranjem dobivenog izraza još dva puta, dobiven je konačni oblik funkcije progiba.

3.3 Numeričko rješenje

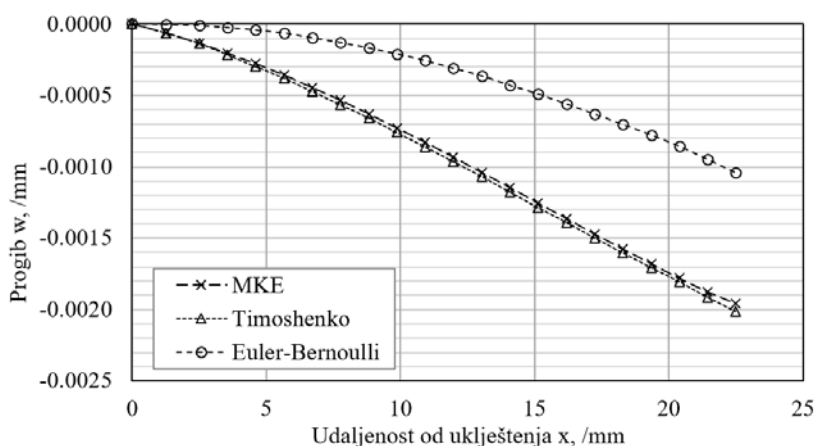
Nakon analitičkog rješavanja, izračun je proveden numerički kako bi se validirali rezultati. Korišten je programski paket Abaqus 6.13 kojim je provedena analiza naprezanja koristeći metodu konačnih elemenata. Pretpostavljen je statički tip opterećenja te je odabran je 3D model tijela te je odabrana je linearna geometrija. Za to su bila dva razloga; prvo, ne očekuju se velike deformacije te drugo, razmatranja su ograničena na linearnu teoriju elastičnosti. Opterećenje je postavljeno kao *surface traction*, jednoliko raspoređeno u smjeru y -osi, i postavljeno u x - y ravnini, dok je na korijen zuba postavljeno uklještenje. Kontinuirano opterećenje je postavljeno isključivo na dio tijela na kojemu su parovi zubi u kontaktu. Za rješavanje su korišteni heksaedarski konačni elementi drugog reda s reduciranom integracijom C3D20R.

4 Rezultati i diskusija

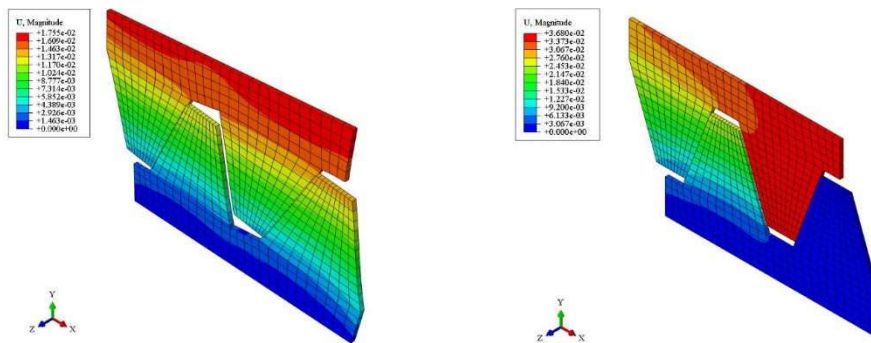
U svrhu verifikacije, u dijagramu na slici 2 preklapljena su dva analitička i numeričko rješenje. Timoshenkovo rješenje dobiveno direktnim integriranjem jednadžbi pokazuje dobre rezultate u usporedbi s numeričkim rješenjem dobivenim korištenjem metode konačnih elemenata (MKE). Najveća relativna greška Timoshenkove teorije u odnosu na rješenje MKE iznosi 6.39% i nalazi se na čvoru udaljenom 5.66 mm od uklještenja. Usporedimo li rezultate Timoshenkove teorije s Euler-Bernoullijevom, relativna greška je najveća na dijelu zuba najbližem uklještenju. Jedan od razloga je maksimalni iznos poprečne sile Q_y blizu uklještenju koji uzrokuje oštiri nagib srednje linije. Bitno je naglasiti da smik u promatranom slučaju neće uzrokovati jednoliku deformaciju pošto je poprečna sila Q_y na prvom intervalu promjenjiva uslijed kontinuiranog opterećenja. Drugi razlog je promjenjivi poprečni presjek, odgovoran za promjenjivu krutost duž zuba. Relativna razlika između progiba na slobodnom kraju između dvije teorije je 48,82%.

Najveći izračunati progib zuba nalazi se na slobodnom kraju i uz opterećenje od 5 N/mm² iznosi 2 μ m prema Timoshenkovoj teoriji i numeričkom rješenju metodom konačnih elemenata. Valja napomenuti da pri navedenom opterećenju specifična sila na bok zuba (sila po jedinici širine) iznosi 100 N/mm. Usporedimo li najveće odstupanje vrha, koji u realnom slučaju možda ne bi bio u kontaktu uslijed zakreta zuba, sa širinom tolerancijskog polja za slučaj kvalitete IT7 (19 μ m), vidimo da nisu istog reda veličine. Drugim riječima, elastična deformacija ne bi mogla kompenzirati grešku u koraku.

No, budući da je ovisnost progiba o veličini kontinuiranog opterećenja linearna, odnosno s povećanjem q progib se razmjerno povećava, za razmatranje je opterećenje povećano 10 puta (specifično opterećenje zuba 1000 N/mm). Tada numeričko rješenje, kao i rješenje Timoshenkovom teorijom, daju za rezultat progib slobodnog kraja od 20 μ m, što je usporedivo sa širinom tolerancijskog polja. Također treba uzeti u obzir da će se, pod uvjetom da su potpuno jednaki, oba zuba u paru jednako deformirati; to jest, imat ćemo dvostruku vrijednost progiba. Usporedimo najveći mogući razmak između bokova para 2 kada je par 1 već ušao u kontakt, koji iznosi 38 μ m, s najvećim mogućim progibom para (kada se zubi dodiruju na vrhovima) od 40 μ m. Kako je vrijednost progiba veća od širine tolerancijskog polja, možemo zaključiti da će u ovom slučaju postojati mala mogućnost da par 2 prenosi dio opterećenja (slika 3).



Slika 2. Usporedba analitičkih i numeričkog rješenja



Slika 3. Utjecaj greške u koraku na razdiobu opterećenja; idealni (a) slučaj i najveća greška (b)

5 Zaključak

U radu je promatran utjecaj odstupanja koraka na razdiobu opterećenja na parove zubi dvije zubne letve u zahvatu. Korištene su analitičke metode (Euler-Bernoullijeva i Timoshenkova teorija savijanja greda), nakon čega su rezultati verificirani numerički, metodom konačnih elemenata. Prvi korak je bio primjena navedenih metoda na izolirani zub kako bi se odredila najpovoljnija. Zbog najvećeg preklapanja s rješenjem metode konačnih elemenata, odabrana je Timoshenkova teorija. Dobivena je najveća vrijednost progiba konzole (na slobodnom kraju) iznosa $20 \mu\text{m}$, dok je širina tolerancijskog polja za odabrani slučaj $19 \mu\text{m}$. Budući da kontakt između zubi zasigurno neće biti samo u slobodnom kraju, relevantni progib je manji. To znači će da za najveće razlike u odstupanjima koraka jedan par zubi nositi cijelokupno opterećenje. Zaključak je potvrđen numeričkim rješenjem, koje je bilo u skladu s navedenim. Ako su greške u koraku nepostojeće na obje zubne letve, uz iste uvjete opterećenja na oba zuba, progibi će biti jednaki, odnosno svaki par će nositi pola ukupnog opterećenja.

Literatura

- [1] International Organization for Standardization; ISO 6336:2006 – Calculation of load capacity of spur and helical gears — Application for industrial gears; ISO; 2006.
- [2] Diez-Ibarbia, A., del Rincon, A.F., Iglesias, M., de-Juan, A. i sur.; Efficiency analysis of spur gears with a shifting profile; Meccanica; 2016; 51; 707–723.
- [3] Wang, C., Reddy, J. i Lee, K.; Shear deformable beams and plates - Relationships with classical solutions; Elsevier; Oxford, UK; 2000.
- [4] Timoshenko, S.; Strength of Materials - Part I Elementary Theory and Problems; Van Nostrand Company; Lancaster, UK; 1940.
- [5] Romano, F.; Deflections of Timoshenko Beam with Varying Cross-Section; International Journal of Mechanical Science; 1996; 38(8-9); 1017-1035.
- [6] International Organization for Standardization; ISO 53:1998 – Cylindrical gears for general and heavy engineering -- Standard basic rack tooth profile; ISO; 1998.
- [7] International Organization for Standardization; ISO 1328-1:1997 – Cylindrical gears - ISO system of accuracy (Part 1); ISO; 1998.