

Friedrichsovi operatori kao dualni parovi

Marko Erceg

PMF-MO, Zagreb

Znanstveni kolokvij

Zagreb, π . 2018.

Zajednički rad s N. Antonićeom, K. Burazinom, I. Crnjac i A. Michelangelom



Na $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ promatramo diferencijalni operator A i pripadnu diferencijalnu jednačbu

$$Au = f. \quad (\text{npr. } A = -\Delta)$$

Želimo odrediti prostore $Y(\Omega)$ i $X(\Omega)$, te prostor $Z(\partial\Omega)$ u kojem zadajemo rubne uvjete (zadajemo funkciju u i/ili njene derivacije na rubu $\partial\Omega$) tako da za svaki $f \in Y(\Omega)$ postoji jedinstveno rješenje $u \in X(\Omega)$ koje zadovoljava postavljene rubne uvjete, te da je preslikavanje

$$Y(\Omega) \times Z(\partial\Omega) \ni (f, \gamma(u)) \mapsto u \in X(\Omega)$$

neprekidno, gdje je $\gamma(u)$ izraz ovisan o funkciji u i (eventualno) nekim njenim derivacijama (npr. trag funkcije u na $\partial\Omega$: $\gamma(u) = u|_{\partial\Omega}$).

Često u evolucijskim zadaćama (jednačbama koje ovise o vremenu t) posebno tretiramo vremensku varijablu t pa se gornja jednačba zapisuje u obliku

$$\partial_t u + Au = f,$$

gdje operator A nema derivacija po varijabli t , te često niti ne ovisi o t (koeficijenti diferencijalne jednačbe uz prostorne derivacije ne ovise o t).

Mi ćemo promatrati samo jednačbe gdje je A linearan operator (ali ne nužno omeđen), pa su gornje jednačbe linearne ili eventualno polilinearne ako f ovisi o u .

1 Klasični Friedrichsovi operatori

2 Apstraktni Friedrichsovi operatori

- Definicija
- Rezultat dobre postavljenosti
- Nestacionarna teorija Friedrichsovih operatora
- Reformulacija rezultata dobre postavljenosti
- Postojanje i kardinalost bijektivnih proširenja

3 Klasifikacija proširenja (realizacija) dualnih parova

- Grubbina klasifikacija
- Klasifikacija *pozitivnih* bijektivnih proširenja Friedrichsovih operatora
- Primjer operatora s točkovnim međudjelovanjem

Pretpostavke:

$d, r \in \mathbb{N}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ otvoren i omeđen s Lipschitzovim rubom;

$\mathbf{A}_k \in W^{1,\infty}(\Omega)^{r \times r}$, $k \in \{1, \dots, d\}$, i $\mathbf{C} \in L^\infty(\Omega)^{r \times r}$ zadovoljavaju (s.s. na Ω):

$$(F1) \quad \mathbf{A}_k = \mathbf{A}_k^* ;$$

$$(F2) \quad (\exists \mu_0 > 0) \quad \mathbf{C} + \mathbf{C}^* + \sum_{k=1}^d \partial_k \mathbf{A}_k \geq \mu_0 \mathbf{I} .$$

Definirajmo $\mathcal{L}, \tilde{\mathcal{L}} : L^2(\Omega)^r \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)^r$ s

$$\mathcal{L}u := \sum_{k=1}^d \partial_k (\mathbf{A}_k u) + \mathbf{C}u , \quad \tilde{\mathcal{L}}u := - \sum_{k=1}^d \partial_k (\mathbf{A}_k u) + \left(\mathbf{C}^* + \sum_{k=1}^d \partial_k \mathbf{A}_k \right) u .$$

Cilj: dodati rubne uvjete takve da za svaki $f \in L^2(\Omega)^r$ postoji jedinstveno rješenje jednadžbe $\mathcal{L}u = f$ (uz dane rubne uvjete).

Dobit: većina (polu)linearnih jednadžbi matematičke fizike može se ekvivalentno zapisati koristeći klasične Friedrichsove operatore.



K. O. Friedrichs: *Symmetric positive linear differential equations*, Commun. Pure Appl. Math. **11** (1958) 333–418.

- proučavanje parcijalnih diferencijalnih jednačbi mješovitog tipa poput Tricomijeve jednačbe (korištena u proučavanju toka stlačivih fluida):

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

koja je eliptička za $y > 0$, a hiperbolička za $y < 0$;

- dobiven okvir za proučavanje parcijalnih diferencijalnih jednačbi različitog tipa
- Doprinosi: C. Morawetz, P. Lax, L. Sarason, R. S. Phillips, J. Rauch, ...
- **u novije vrijeme:** *Friedrichsov zapis* jednačbi pogodan za numeričku analizu

Nedostaci:

- nema zadovoljavajućeg rezultata dobre postavljenosti
- zadavanje rubnih uvjeta nije intrinzično (jedninstveno određeno danim parametrima)

¹M. Jensen: *Discontinuous Galerkin Methods for Friedrichs Systems with Irregular Solutions*, Ph.D. thesis, University of Oxford, 2004, <http://sro.sussex.ac.uk/45497/1/thesisjensen.pdf>



K. O. Friedrichs: *Symmetric positive linear differential equations*, Commun. Pure Appl. Math. **11** (1958) 333–418.

- proučavanje parcijalnih diferencijalnih jednačbi mješovitog tipa poput Tricomijeve jednačbe (korištena u proučavanju toka stlačivih fluida):

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

koja je eliptička za $y > 0$, a hiperbolička za $y < 0$;

- dobiven okvir za proučavanje parcijalnih diferencijalnih jednačbi različitog tipa
- Doprinosi: C. Morawetz, P. Lax, L. Sarason, R. S. Phillips, J. Rauch, ...
- **u novije vrijeme:** *Friedrichsov zapis* jednačbi pogodan za numeričku analizu

Nedostaci:

- nema zadovoljavajućeg rezultata dobre postavljenosti
- zadavanje rubnih uvjeta nije intrinzično (jedninstveno određeno danim parametrima)

↔ razvoj apstraktne teorije

¹M. Jensen: *Discontinuous Galerkin Methods for Friedrichs Systems with Irregular Solutions*, Ph.D. thesis, University of Oxford, 2004, <http://sro.sussex.ac.uk/45497/1/thesisjensen.pdf>

$(L, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ kompleksan Hilbertov prostor ($L' \equiv L$), $\| \cdot \| := \sqrt{\langle \cdot | \cdot \rangle}$
 $\mathcal{D} \subseteq L$ gust potprostor

Definicija

Par $(T, \tilde{T}), T, \tilde{T} : \mathcal{D} \rightarrow L$, nazivamo *parom apstraktnih Friedrichsovih operatora* ako:

$$(T1) \quad (\forall \phi, \psi \in \mathcal{D}) \quad \langle T\phi | \psi \rangle = \langle \phi | \tilde{T}\psi \rangle;$$

$$(T2) \quad (\exists c > 0)(\forall \phi \in \mathcal{D}) \quad \|(T + \tilde{T})\phi\| \leq c\|\phi\|;$$

$$(T3) \quad (\exists \mu_0 > 0)(\forall \phi \in \mathcal{D}) \quad \langle (T + \tilde{T})\phi | \phi \rangle \geq \mu_0\|\phi\|^2.$$



A. Ern, J.-L. Guermont, G. Czaplain: *An intrinsic criterion for the bijectivity of Hilbert operators related to Friedrichs' systems*, Comm. Partial Diff. Eq. **32** (2007) 317–341.



N. Antić, K. Burazin: *Intrinsic boundary conditions for Friedrichs systems*, Comm. Partial Diff. Eq. **35** (2010) 1690–1715.



N. Antić, K. Burazin, I. Crnjac, M.E.: *Complex Friedrichs systems and applications*, Journal of Mathematical Physics **58** (2017) 101508, 22 pp.

$\mathbf{A}_k \in W^{1,\infty}(\Omega)^{r \times r}$ i $\mathbf{C} \in L^\infty(\Omega)^{r \times r}$ zadovoljavaju (F1)–(F2):

$$(F1) \quad \mathbf{A}_k = \mathbf{A}_k^* ;$$

$$(F2) \quad (\exists \mu_0 > 0) \quad \mathbf{C} + \mathbf{C}^* + \sum_{k=1}^d \partial_k \mathbf{A}_k \geq \mu_0 \mathbf{I}.$$

$\mathcal{D} := C_c^\infty(\Omega)^r$, $L := L^2(\Omega)^r$, te

$$T\mathbf{u} := \sum_{k=1}^d \partial_k (\mathbf{A}_k \mathbf{u}) + \mathbf{C} \mathbf{u} , \quad \tilde{T}\mathbf{u} := - \sum_{k=1}^d \partial_k (\mathbf{A}_k \mathbf{u}) + \left(\mathbf{C}^* + \sum_{k=1}^d \partial_k \mathbf{A}_k \right) \mathbf{u} .$$

$$(T1) \quad \langle T\mathbf{u} \mid \mathbf{v} \rangle_{L^2} = \left\langle \mathbf{u} \mid - \sum_{k=1}^d \partial_k (\mathbf{A}_k^* \mathbf{v}) + \left(\mathbf{C}^* + \sum_{k=1}^d \partial_k \mathbf{A}_k^* \right) \mathbf{v} \right\rangle_{L^2} \stackrel{(F1)}{=} \langle \mathbf{u} \mid \tilde{T}\mathbf{v} \rangle_{L^2} .$$

Iz $(T + \tilde{T})\mathbf{u} = \left(\mathbf{C} + \mathbf{C}^* + \sum_{k=1}^d \partial_k \mathbf{A}_k \right) \mathbf{u}$, dobivamo

$$(T2) \quad \|(T + \tilde{T})\mathbf{u}\|_{L^2} \leq \left(2\|\mathbf{C}\|_{L^\infty} + \sum_{k=1}^d \|\mathbf{A}_k\|_{W^{1,\infty}} \right) \|\mathbf{u}\|_{L^2} ,$$

$$(T3) \quad \langle (T + \tilde{T})\mathbf{u} \mid \mathbf{u} \rangle_{L^2} \stackrel{(F2)}{\geq} \mu_0 \|\mathbf{u}\|_{L^2}^2 .$$

Cilj: Za par apstraktnih Friedrichovih operatora (T, \tilde{T}) **pronaći** $V \supseteq \mathcal{D}$ ($\tilde{V} \supseteq \mathcal{D}$) takav da T (\tilde{T}) proširen na V (\tilde{V}) je linearna bijekcija.

↔ time posebno dobivamo dobru postavljenost klasičnih Friedrichsovih sustava

Postupak: Najprije proširiti operatore T i \tilde{T} (*maksimalni operatori*), a potom **restringirati** ta proširenja do linearnih bijekcija.

Definicija ($A : \text{dom } A \subseteq L \rightarrow L$, $B : \text{dom } B \subseteq L \rightarrow L$)

$A \subseteq B$ ako $\text{dom } A \subseteq \text{dom } B$ i za svaki $u \in \text{dom } A$ imamo $Bu = Au$.

Ern, Guernond, Caplain konstruiraju *maksimalne operatore* koristeći Banachove adjungirane operatore i dobivaju

$$\begin{aligned} T_1 : \text{dom } T_1 \subseteq L \rightarrow L, \quad T \subseteq T_1, \\ \tilde{T}_1 : \text{dom } \tilde{T}_1 \subseteq L \rightarrow L, \quad \tilde{T} \subseteq \tilde{T}_1, \quad \& \quad \text{dom } T_1 = \text{dom } \tilde{T}_1 =: W. \end{aligned}$$

Izvodimo alternativnu konstrukciju koristeći (Hilbertove) adjungirane operatore. Vratimo se najprije na definiciju para apstraktnih Friedrichsovih operatora.

- (T1) $(\forall \phi, \psi \in \mathcal{D}) \quad \langle T\phi \mid \psi \rangle = \langle \phi \mid \tilde{T}\psi \rangle;$
- (T2) $(\exists c > 0)(\forall \phi \in \mathcal{D}) \quad \|(T + \tilde{T})\phi\| \leq c\|\phi\|;$
- (T3) $(\exists \mu_0 > 0)(\forall \phi \in \mathcal{D}) \quad \langle (T + \tilde{T})\phi \mid \phi \rangle \geq \mu_0\|\phi\|^2.$

Definicija ($A : \text{dom } A \subseteq L \rightarrow L$ gusto definiran)

- a) Postoji gusto definiran linearan operator $A^* : \text{dom } A \subseteq L \rightarrow L$ (*adjungiran operator operatora A*) pri čemu

$$\text{dom } A^* := \left\{ v \in L : (\exists z \in L)(\forall u \in \text{dom } A) \langle Au \mid v \rangle = \langle u \mid z \rangle \right\}, \quad A^*v := z.$$

- b) A je *zatvoren* ako $\text{dom } A \ni u_n \xrightarrow{L} u$ i $Au_n \rightarrow v$ povlači $u \in \text{dom } A$ i $Au = v$.

- c) A je *zatvoriv* ako $\text{dom } A \ni u_n \xrightarrow{L} 0$ i $Au_n \xrightarrow{L} v$ povlači $v = 0$. Tada definiramo

$$\text{dom } \bar{A} := \left\{ u \in L : (\exists (u_n) u \text{ dom } A) u_n \xrightarrow{L} u, (Au_n) \text{ konv. u } L \right\},$$

$$\bar{A}u := \lim_n Au_n.$$

$$\begin{aligned} \text{(T1)} \quad & \iff T \subseteq \tilde{T}^* \quad \& \quad \tilde{T} \subseteq T^* \\ & \implies T, \tilde{T} \text{ zatvorivi} \end{aligned}$$

- (T1) $(\forall \phi, \psi \in \mathcal{D}) \quad \langle T\phi \mid \psi \rangle = \langle \phi \mid \tilde{T}\psi \rangle;$
- (T2) $(\exists c > 0)(\forall \phi \in \mathcal{D}) \quad \|(T + \tilde{T})\phi\| \leq c\|\phi\|;$
- (T3) $(\exists \mu_0 > 0)(\forall \phi \in \mathcal{D}) \quad \langle (T + \tilde{T})\phi \mid \phi \rangle \geq \mu_0\|\phi\|^2.$

Teorem

a)

$$(T1) - (T3) \iff \begin{cases} T \subseteq \tilde{T}^* & \& \tilde{T} \subseteq T^*; \\ \overline{T + \tilde{T}} & \text{omeden, hermitski i strogo pozitivan na } L; \\ \text{dom } \overline{T} = \text{dom } \tilde{\tilde{T}} =: W_0 & \& \text{dom } T^* = \text{dom } \tilde{\tilde{T}}^* =: W. \end{cases}$$

b) $T_1 = \tilde{T}^*$ i $\tilde{T}_1 = T^*.$

- (T1) $(\forall \phi, \psi \in \mathcal{D}) \quad \langle T\phi \mid \psi \rangle = \langle \phi \mid \tilde{T}\psi \rangle;$
- (T2) $(\exists c > 0)(\forall \phi \in \mathcal{D}) \quad \|(T + \tilde{T})\phi\| \leq c\|\phi\|;$
- (T3) $(\exists \mu_0 > 0)(\forall \phi \in \mathcal{D}) \quad \langle (T + \tilde{T})\phi \mid \phi \rangle \geq \mu_0\|\phi\|^2.$

Teorem

a)

$$(T1) - (T3) \iff \begin{cases} T \subseteq \tilde{T}^* & \& \tilde{T} \subseteq T^*; \\ \overline{T + \tilde{T}} \text{ omeđen, hermitski i strogo pozitivan na } L; \\ \text{dom } \overline{T} = \text{dom } \overline{\tilde{T}} =: W_0 & \& \text{dom } T^* = \text{dom } \tilde{T}^* =: W. \end{cases}$$

b) $T_1 = \tilde{T}^*$ i $\tilde{T}_1 = T^*.$

Napomena

a) $T \subseteq \overline{T} \subseteq \tilde{T}^* \quad \& \quad \tilde{T} \subseteq \overline{\tilde{T}} \subseteq T^*$

b) $\overline{T} \subseteq \tilde{T}^* \implies (\tilde{T}^*)^* \subseteq (\overline{T})^* \implies \overline{\tilde{T}} \subseteq T^*$

$\overline{T}, \overline{\tilde{T}}$ minimalni operatori, \tilde{T}^*, T^* maksimalni operatori početnih operatora T, \tilde{T} .

$$\begin{aligned}\bar{T} &\subseteq \tilde{T}^* & \& \quad \tilde{\bar{T}} \subseteq T^* \\ W_0 &= \text{dom } \bar{T} = \text{dom } \tilde{\bar{T}} \\ W &= \text{dom } \tilde{T}^* = T^*\end{aligned}$$

Novi Cilj: Pronaći $W_0 \subseteq V$, $\tilde{V} \subseteq W$ takve da su restrikcije $\tilde{T}^*|_V : V \rightarrow L$, $T^*|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \rightarrow L$ linearne bijekcije.

Pitanja:

- 1) **Dovoljni** uvjeti na V
- 2) **Postojanje** takvog V
- 3) **Broj** takvih V
- 4) **Klasifikacija** takvih V

$$\bar{T} \subseteq \tilde{T}^* \quad \& \quad \overline{\tilde{T}} \subseteq T^*$$

$$W_0 = \text{dom } \bar{T} = \text{dom } \overline{\tilde{T}}$$

$$W = \text{dom } \tilde{T}^* = T^*$$

Novi Cilj: Pronaći $W_0 \subseteq V, \tilde{V} \subseteq W$ takve da su restrikcije $\tilde{T}^*|_V : V \rightarrow L, T^*|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \rightarrow L$ linearne bijekcije.

Pitanja:

- 1) **Dovoljni** uvjeti na V
 - dovoljni uvjeti na rubne uvjete uz koje imamo dobru postavljenost pripadne zadaće
- 2) **Postojanje** takvog V
- 3) **Broj** takvih V
- 4) **Klasifikacija** takvih V

$$\begin{aligned}\bar{T} &\subseteq \tilde{T}^* & \& \quad \bar{\tilde{T}} \subseteq T^* \\ W_0 &= \text{dom } \bar{T} = \text{dom } \bar{\tilde{T}} \\ W &= \text{dom } \tilde{T}^* = T^*\end{aligned}$$

Novi Cilj: Pronaći $W_0 \subseteq V$, $\tilde{V} \subseteq W$ takve da su restrikcije $\tilde{T}^*|_V : V \rightarrow L$, $T^*|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \rightarrow L$ linearne bijekcije.

Pitanja:

- 1) **Dovoljni** uvjeti na V
 - dovoljni uvjeti na rubne uvjete uz koje imamo dobru postavljenost pripadne zadaće
- 2) **Postojanje** takvog V
 - za pripadnu zadaću određujemo postoje li uopće neki rubni uvjeti tako da ona bude dobro postavljena
- 3) **Broj** takvih V
- 4) **Klasifikacija** takvih V

$$\begin{aligned}\bar{T} &\subseteq \tilde{T}^* & \& \quad \tilde{\bar{T}} \subseteq T^* \\ W_0 &= \text{dom } \bar{T} = \text{dom } \tilde{\bar{T}} \\ W &= \text{dom } \tilde{T}^* = T^*\end{aligned}$$

Novi Cilj: Pronaći $W_0 \subseteq V, \tilde{V} \subseteq W$ takve da su restrikcije $\tilde{T}^*|_V : V \rightarrow L, T^*|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \rightarrow L$ linearne bijekcije.

Pitanja:

- 1) **Dovoljni** uvjeti na V
 - dovoljni uvjeti na rubne uvjete uz koje imamo dobru postavljenost pripadne zadaće
- 2) **Postojanje** takvog V
 - za pripadnu zadaću određujemo postoje li uopće neki rubni uvjeti tako da ona bude dobro postavljena
- 3) **Broj** takvih V
 - ima li konačno ili beskonačno rubnih uvjeta uz koje je rubna zadaća dobro postavljena
- 4) **Klasifikacija** takvih V

$$\begin{aligned}\bar{T} &\subseteq \tilde{T}^* & \& \quad \tilde{\tilde{T}} &\subseteq T^* \\ W_0 &= \text{dom } \bar{T} = \text{dom } \tilde{\tilde{T}} \\ W &= \text{dom } \tilde{T}^* = T^*\end{aligned}$$

Novi Cilj: Pronaći $W_0 \subseteq V$, $\tilde{V} \subseteq W$ takve da su restrikcije $\tilde{T}^*|_{V_0} : V_0 \rightarrow L$, $T^*|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \rightarrow L$ linearne bijekcije.

Pitanja:

- 1) **Dovoljni** uvjeti na V
 - dovoljni uvjeti na rubne uvjete uz koje imamo dobru postavljenost pripadne zadaće
- 2) **Postojanje** takvog V
 - za pripadnu zadaću određujemo postoje li uopće neki rubni uvjeti tako da ona bude dobro postavljena
- 3) **Broj** takvih V
 - ima li konačno ili beskonačno rubnih uvjeta uz koje je rubna zadaća dobro postavljena
- 4) **Klasifikacija** takvih V
 - analiza svih *dobrih* rubnih uvjeta

$$\begin{aligned} \bar{T} &\subseteq \tilde{T}^* \quad \& \quad \tilde{\bar{T}} \subseteq T^* \\ W_0 &= \text{dom } \bar{T} = \text{dom } \tilde{\bar{T}} \\ W &= \text{dom } \tilde{T}^* = T^* \end{aligned}$$

Rubno preslikavanje (forma): $D : W \times W \rightarrow \mathbb{C}$, $(D[u, v] = \overline{D[v, u]})$
 $D[u, v] := \langle \tilde{T}^* u \mid v \rangle - \langle u \mid T^* v \rangle$.

Za $V, \tilde{V} \subseteq W$ uvodimo dva uvjeta:

$$\begin{aligned} \text{(V1)} \quad & (\forall u \in V) \quad D[u, u] \geq 0 \\ & (\forall v \in \tilde{V}) \quad D[v, v] \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(V2)} \quad & V = \{u \in W : (\forall v \in \tilde{V}) \quad D[v, u] = 0\} \\ & \tilde{V} = \{v \in W : (\forall u \in V) \quad D[u, v] = 0\} \end{aligned} \quad (\implies W_0 \subseteq V \cap \tilde{V})$$

Teorem (Ern, Guermond, Caplain, 2007)

$(T1)-(T3) + (V1)-(V2) \implies \tilde{T}^*|_V, T^*|_{\tilde{V}}$ linearne bijekcije

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $\mu > 0$ i $f \in L^2(\Omega)$ zadani.

$$-\Delta u + \mu u = f$$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $\mu > 0$ i $f \in L^2(\Omega)$ zadani.

$$-\Delta u + \mu u = f \iff -\operatorname{div} \nabla u + \mu u = f$$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $\mu > 0$ i $f \in L^2(\Omega)$ zadani.

$$-\Delta u + \mu u = f \iff -\operatorname{div} \nabla u + \mu u = f \iff \begin{cases} \nabla u + \mathbf{p} = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{p} + \mu u = f \end{cases}$$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $\mu > 0$ i $f \in L^2(\Omega)$ zadani.

$$\begin{aligned}
 -\Delta u + \mu u = f &\iff -\operatorname{div} \nabla u + \mu u = f \iff \begin{cases} \nabla u + \mathbf{p} = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{p} + \mu u = f \end{cases} \\
 &\iff T\mathbf{v} := \sum_{k=1}^d \partial_k (\mathbf{A}_k \mathbf{v}) + \mathbf{C}\mathbf{v} = \mathbf{g},
 \end{aligned}$$

pri čemu $\mathbf{v} := [\mathbf{p} \ u]^\top$, $\mathbf{g} := [0 \ f]^\top$, $(\mathbf{A}_k)_{ij} := \delta_{i,k} \delta_{j,d+1} + \delta_{i,d+1} \delta_{j,k}$,
 $\mathbf{C} := \operatorname{diag}\{1, \dots, 1, \mu\}$.

Pretpostavke (F1) i (F2) su zadovoljene.

Primjer (skalarna eliptička jednačnja)

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $\mu > 0$ i $f \in L^2(\Omega)$ zadani.

$$\begin{aligned} -\Delta u + \mu u = f &\iff -\operatorname{div} \nabla u + \mu u = f \iff \begin{cases} \nabla u + \mathbf{p} = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{p} + \mu u = f \end{cases} \\ &\iff T\mathbf{v} := \sum_{k=1}^d \partial_k (\mathbf{A}_k \mathbf{v}) + \mathbf{C}\mathbf{v} = \mathbf{g}, \end{aligned}$$

pri čemu $\mathbf{v} := [\mathbf{p} \ u]^\top$, $\mathbf{g} := [0 \ f]^\top$, $(\mathbf{A}_k)_{ij} := \delta_{i,k} \delta_{j,d+1} + \delta_{i,d+1} \delta_{j,k}$,
 $\mathbf{C} := \operatorname{diag}\{1, \dots, 1, \mu\}$.

Pretpostavke (F1) i (F2) su zadovoljene.

$$L = L^2(\Omega)^{d+1}, \quad W = L^2_{\operatorname{div}}(\Omega) \times H^1(\Omega) \quad (L^2_{\operatorname{div}}(\Omega) := \{\mathbf{p} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^d) : \operatorname{div} \mathbf{p} \in L^2(\Omega)\})$$

- $V = L^2_{\operatorname{div}}(\Omega) \times H^1_0(\Omega) \dots$ Diricheltov rubni uvjet ($u = 0$ on Γ)
- $V = L^2_{\operatorname{div},0}(\Omega) \times H^1(\Omega) \dots$ Neumannov rubni uvjet ($\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\nu} = \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ on Γ)

$$\begin{aligned} \bar{T} &\subseteq \tilde{T}^* & \& \quad \bar{\tilde{T}} \subseteq T^* \\ W_0 &= \text{dom } \bar{T} = \text{dom } \bar{\tilde{T}} \\ W &= \text{dom } \tilde{T}^* = T^* \end{aligned}$$

$$(P) \quad \begin{cases} u'(t) + \tilde{T}^* u(t) = f \\ u(0) = u_0 \end{cases},$$

gdje je $u : [0, \tau] \rightarrow L$, za $\tau > 0$, nepoznata funkcija, dok su desna strana $f : \langle 0, \tau \rangle \rightarrow L$ (ili $f : \langle 0, \tau \rangle \times L \rightarrow L$ u polulinearnom slučaju), početni uvjet $u_0 \in L$ i (proširen) Friedrichsov operator \tilde{T}^* dani.

Theorem

Neka zatvoreni operator S , $\bar{T} \subseteq S \subseteq \tilde{T}^$, zadovoljava (V1). Tada je $-S$ infinitezimalni generator kontrakcijske C_0 -polugrupe na L .*

$$\begin{aligned} \bar{T} &\subseteq \tilde{T}^* & \bar{\tilde{T}} &\subseteq T^* \\ W_0 &= \text{dom } \bar{T} = \text{dom } \bar{\tilde{T}} \\ W &= \text{dom } \tilde{T}^* = T^* \end{aligned}$$

$$(P) \quad \begin{cases} u'(t) + Su(t) = f \\ u(0) = u_0 \end{cases},$$

gdje je $u : [0, \tau] \rightarrow L$, za $\tau > 0$, nepoznata funkcija, dok su desna strana $f : \langle 0, \tau \rangle \rightarrow L$ (ili $f : \langle 0, \tau \rangle \times L \rightarrow L$ u polulinearom slučaju), početni uvjet $u_0 \in L$ i (proširen) Friedrichsov operator \tilde{T}^* dani.

Theorem

Neka zatvoreni operator S , $\bar{T} \subseteq S \subseteq \tilde{T}^$, zadovoljava (V1). Tada je $-S$ infinitezimalni generator kontrakcijske C_0 -polugrupe na L .*

Neka je S kao u prethodnom teoremu. Označimo $V := \text{dom } S$.

$$(P) \quad \begin{cases} u'(t) + Su(t) = f \\ u(0) = u_0 \end{cases}.$$

Theorem

- a) Ako $f \in L^1(\langle 0, \tau \rangle; L)$, tada za svaki $u_0 \in L$ zadaća (P) ima jedinstveno *blago (slabo) rješenje* $u \in C([0, \tau]; L)$ dano s

$$u(t) = \mathcal{Z}(t)u_0 + \int_0^t \mathcal{Z}(t-s)f(s)ds, \quad t \in [0, \tau],$$

gdje je $(\mathcal{Z}(t))_{t \geq 0}$ kontrakcijska C_0 -polugrupa generirana s $-S$.

- b) Ako je dodatno $u_0 \in V$ i $f \in W^{1,1}(\langle 0, \tau \rangle; L) \cup (C([0, \tau]; L) \cap L(\langle 0, \tau \rangle; V))$, pri čemu je V opskrbljen s graf normom $\|\cdot\|_S := \|\cdot\| + \|S \cdot\|$, tada je gornje slabo rješenje *klasično* na $[0, \tau]$.
- c) Ako je $f : [0, \tau] \times L \rightarrow L$ neprekinuta i lokalno Lipschitzova po zadnjoj varijabli (jednoliko po t), tada za svaki $u_0 \in L$ postoji τ_{max} , takav da polulinerna zadaća (P) ima jedinstveno *slabo rješenje* $u \in C([0, \tau_{max}]; L)$.

$$\bar{T} \subseteq \tilde{T}^* \quad \& \quad \bar{\tilde{T}} \subseteq T^*$$

$$W_0 = \text{dom } \bar{T} = \text{dom } \bar{\tilde{T}}$$

$$W = \text{dom } \tilde{T}^* = T^*$$

(V2)

$$V = \{u \in W : (\forall v \in \tilde{V}) \quad D[v, u] = 0\}$$

$$\tilde{V} = \{v \in W : (\forall u \in V) \quad D[u, v] = 0\}$$

Teorem

$$(V2) \iff \begin{cases} W_0 \subseteq V, \tilde{V} \subseteq W \\ (\tilde{T}^*|_V)^* = T^*|_{\tilde{V}} \\ (T^*|_{\tilde{V}})^* = \tilde{T}^*|_V. \end{cases}$$

$$\bar{T} \subseteq \tilde{T}^*|_V \subseteq \tilde{T}^* \quad \implies \quad \bar{\tilde{T}} \subseteq (\tilde{T}^*|_V)^* \subseteq T^*$$

$$\xrightarrow{(V2)} \quad \bar{\tilde{T}} \subseteq T^*|_{\tilde{V}} \subseteq T^*$$

$$\begin{aligned}\bar{T} &\subseteq \tilde{T}^* & \& \quad \tilde{\bar{T}} \subseteq T^* \\ W_0 &= \text{dom } \bar{T} = \text{dom } \tilde{\bar{T}} \\ W &= \text{dom } \tilde{T}^* = T^*\end{aligned}$$

Neka je S zatvoren operator takav da

$$\bar{T} \subseteq S \subseteq \tilde{T}^* .$$

Razrađena pitanja:

- 1) **Dovoljni** uvjeti na S da bude linearna bijekcija
 - **Odgovor:** Ako $(\text{dom } S, \text{dom } S^*)$ zadovoljava (V1) tada su S i S^* linearne bijekcije.
- 2) **Postojanje** S iz (1)
- 3) **Beskonačnost ili konačnost** S iz (1)
- 4) **Klasifikacija** svih S koji su linearne bijekcije (posebno onih koji zadovoljavaju (V1))

Teorem

Neka (T, \tilde{T}) zadovoljavaju (T1)–(T3).

(i) **Postoji** zatvoreni S , $\bar{T} \subseteq S \subseteq \tilde{T}^*$, takav da $(\text{dom } S, \text{dom } S^*)$ zadovoljava (V1).
Posebno, S i S^* su linearne bijekcije.

(ii)

$\ker \tilde{T}^* \neq \{0\}$ i $\ker T^* \neq \{0\} \implies$ neprebrojivo mnogo operatora S iz (i)

$\ker \tilde{T}^* = \{0\}$ ili $\ker T^* = \{0\} \implies$ samo jedan operator S iz (i)
($S = \tilde{T}^*$ ili $S = T^*$, redom)

Teorem

Neka (T, \tilde{T}) zadovoljavaju (T1)–(T3).

(i) **Postoji** zatvoreni S , $\bar{T} \subseteq S \subseteq \tilde{T}^*$, takav da $(\text{dom } S, \text{dom } S^*)$ zadovoljava (V1).
Posebno, S i S^* su linearne bijekcije.

(ii)

$\ker \tilde{T}^* \neq \{0\}$ i $\ker T^* \neq \{0\} \implies$ neprebrojivo mnogo operatora S iz (i)
samo jedan operator S iz (i)
 $\ker \tilde{T}^* = \{0\}$ ili $\ker T^* = \{0\} \implies$ ($S = \tilde{T}^*$ ili $S = T^*$, redom)

Ideja dokaza: $(\widehat{W}, [\cdot | \cdot])$ je Kreĭnov prostor, gdje $\widehat{W} := W/W_0$, te za $u, v \in W$

$$[u + W_0 | v + W_0] := D[u, v] = \langle \tilde{T}^* u | v \rangle - \langle u | T^* v \rangle.$$

Dakle, postoje $X_+, X_- \subseteq \widehat{W}$ takvi da $\widehat{W} = X_+[+]X_-$, te su $(X_+, [\cdot | \cdot])$ i $(X_-, -[\cdot | \cdot])$ Hilbertovi prostori (kanonska ili fundamentalna dekompozicija Kreĭnovih prostora).

Svaki odabir X_+, X_- određuje V, \tilde{V} koji zadovoljavaju (V1)–(V2), pa definiramo $S := \tilde{T}^*|_V$.

Za (T, \tilde{T}) koji zadovoljavaju (T1)–(T3) imamo

$$\overline{T} \subseteq \tilde{T}^* \quad \text{and} \quad \widetilde{\tilde{T}} \subseteq T^* ,$$

dok po prethodnom teoremu postoji zatvoreni operator T_r takav da

- $\overline{T} \subseteq T_r \subseteq \tilde{T}^* \quad (\iff \widetilde{\tilde{T}} \subseteq T_r^* \subseteq T^*)$,
- $T_r : \text{dom } T_r \rightarrow L$ linearna bijekcija,
- $(T_r)^{-1} : L \rightarrow \text{dom } T_r$ omeđen.

Dakle, možemo primijeniti **univerzalnu klasifikaciju** (klasifikacija dualnih parova).

Koristili smo Grubbinu teoriju univerzalne klasifikacije



G. Grubb: *A characterization of the non-local boundary value problems associated with an elliptic operator*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **22** (1968) 425–513.

Rezultat: potpuna klasifikacija svih zatvorenih operatora S , $\overline{T} \subseteq S \subseteq \tilde{T}^*$, takavih da $(\text{dom } S, \text{dom } S^*)$ zadovoljava (V1).

Još za napraviti: primijeniti ovaj rezultat na općenite klasične Friedrichsove operatore

$$T \subseteq \tilde{T}^* =: T_1 \quad \text{i} \quad \tilde{T} \subseteq T^* =: \tilde{T}_1 .$$

T_r, T_r^* zatvoreni, zadovoljavaju $T \subseteq T_r \subseteq T_1$, ekvivalentno $\tilde{T} \subseteq T_r^* \subseteq \tilde{T}_1$, te su invertibilni s omeđenim inverzima $\overline{T_r^{-1}}$ i $(T_r^*)^{-1}$.

$$\begin{aligned} \text{dom } T_1 &= \text{dom } T_r \dot{+} \ker T_1 & \text{i} & \quad \text{dom } \tilde{T}_1 = \text{dom } T_r^* \dot{+} \ker \tilde{T}_1 \\ p_r &= T_r^{-1} T_1, & p_{\tilde{r}} &= (T_r^*)^{-1} \tilde{T}_1, \\ p_k &= \mathbb{1} - p_r, & p_{\tilde{k}} &= \mathbb{1} - p_{\tilde{r}}, \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} (S, S^*) \\ T \subseteq S \subseteq T_1 \\ \tilde{T} \subseteq S^* \subseteq \tilde{T}_1 \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (B, B^*) \\ \mathcal{V} \subseteq \ker T_1 \text{ zatvoren} \\ \mathcal{W} \subseteq \ker \tilde{T}_1 \text{ zatvoren} \\ B : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W} \text{ gusto definiran} \end{array} \right.$$

$$B \mapsto S_B : \quad \text{dom } S_B = \left\{ u \in \text{dom } T_1 : p_k u \in \text{dom } B, P_{\mathcal{W}}(T_1 u) = B(p_k u) \right\},$$

$$S \mapsto B_S : \quad \text{dom } B_S = p_k \text{dom } S, \quad \mathcal{V} = \overline{\text{dom } B_S}, \quad B_S(p_k u) = P_{\mathcal{W}}(T_1 u),$$

gdje je $P_{\mathcal{W}}$ ortogonalna projekcija s L na \mathcal{W} .

Važno: S je injekcija/surjekcija/bijekcija ako i samo ako je B injek./surj./bije.

Za dani B neka je S_B kao gore. Tada

$$\text{dom } S_B = \left\{ w_0 + (A_r)^{-1}(B\nu + \tilde{\nu}) + \nu \left| \begin{array}{l} w_0 \in \text{dom } A_0 \\ \nu \in \text{dom } B \\ \tilde{\nu} \in \ker \tilde{T}_1 \ominus \mathcal{W} \end{array} \right. \right\},$$

$$S_B(w_0 + (A_r)^{-1}(B\nu + \tilde{\nu}) + \nu) = A_0 w_0 + B\nu + \tilde{\nu}$$



G. Grubb: *A characterization of the non-local boundary value problems associated with an elliptic operator*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **22** (1968) 425–513.

Ovaj rezultat primjenjujemo u slučaju kad je (T, \tilde{T}) par apstraktnih Friedrichsovih operatora.

$$(1) \quad \langle \nu \mid \tilde{T}_1 \nu \rangle - 2 \Re \langle p_{\tilde{k}} \nu \mid B \nu \rangle \leq 0, \quad \nu \in \text{dom } B, \\ p_{\tilde{k}}(\text{dom } B) \subseteq \mathcal{W}.$$

$$(2) \quad \langle T_1 \tilde{\mu} \mid \tilde{\mu} \rangle - 2 \Re \langle B^* \tilde{\mu} \mid p_k \tilde{\mu} \rangle \leq 0, \quad \tilde{\mu} \in \text{dom } B^*, \\ p_k(\text{dom } B^*) \subseteq \mathcal{V}.$$

Theorem

$$\left. \begin{array}{l} (1) \ \& \ (2) \\ \textit{ili} \\ (1) \ \& \ B : \text{dom } B \rightarrow \mathcal{W} \text{ bijekcija} \\ \textit{ili} \\ (2) \ \& \ B^* : \text{dom } B^* \rightarrow \mathcal{V} \text{ bijekcija} \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} S_B \text{ linearna bijekcija i} \\ (\text{dom } S, \text{dom } S^*) \text{ zadovoljava (V1)} \end{array}$$

Ako je dodatno $\text{dom } T_r = \text{dom } T_r^*$, tada u gornjoj tvrdnji vrijedi i obrat.

Na $L^2(\mathbb{R})$ promatramo

$$\mathring{H} := -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \text{dom } \mathring{H} := C_c^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

\mathring{H} simetričan, ali nije omeđen, pa ne može zadovoljavati (T2).

Na $L^2(\mathbb{R})$ promatramo

$$\mathring{H} := -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \text{dom } \mathring{H} := C_c^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

\mathring{H} simetričan, ali nije omeđen, pa ne može zadovoljavati (T2).

Snižavanje reda

$$f = \mathring{H}u \iff \begin{pmatrix} \dot{u} \\ f \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{d}{dx} \\ \frac{d}{dx} & 0 \end{pmatrix}}_{=: S} \begin{pmatrix} -\dot{u} \\ u \end{pmatrix}$$

$(S, -S)$ zadovoljava (T1) i (T2), ali ne i uvjet koercitivnosti (T3), pa konačno na $L := L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R})$ definiramo

$$\begin{aligned} T &:= S + \mathbb{1} \\ \tilde{T} &:= -S + \mathbb{1} \end{aligned}, \quad \text{dom } T := \text{dom } \tilde{T} := C_c^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \oplus C_c^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Na $L^2(\mathbb{R})$ promatramo

$$\mathring{H} := -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \text{dom } \mathring{H} := C_c^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

\mathring{H} simetričan, ali nije omeđen, pa ne može zadovoljavati (T2).

Snižavanje reda

$$f = \mathring{H}u \iff \begin{pmatrix} \dot{u} \\ f \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{d}{dx} \\ \frac{d}{dx} & 0 \end{pmatrix}}_{=:S} \begin{pmatrix} -\dot{u} \\ u \end{pmatrix}$$

$(S, -S)$ zadovoljava (T1) i (T2), ali ne i uvjet koercitivnosti (T3), pa konačno na $L := L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R})$ definiramo

$$\begin{aligned} T &:= S + \mathbb{1} \\ \tilde{T} &:= -S + \mathbb{1} \end{aligned}, \quad \text{dom } T := \text{dom } \tilde{T} := C_c^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \oplus C_c^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Kako se vratimo na operator drugog reda?

Definicija

$$\Phi : \mathfrak{L}(L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R})) \longrightarrow \mathfrak{L}(L^2(\mathbb{R})),$$

$$\text{dom } \Phi(A) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}) : (\exists! v_u \in L^2(\mathbb{R})) \begin{pmatrix} v_u \\ u \end{pmatrix} \in \text{dom } A \cap \ker P_1 A \right\},$$

$$\Phi(A)u := P_2 A \begin{pmatrix} v_u \\ u \end{pmatrix},$$

pri čemu je $\mathfrak{L}(X)$ prostor linearnih (ne nužno omeđenih) preslikavanja na vektorskom prostoru X , dok su $P_j : L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, $j \in \{1, 2\}$, ortogonalne projekcije na j -tu komponentu L .

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \in \ker P_1 T &\iff u' + v = 0 \iff -u' = v =: v_u \\ &\implies \Phi(T)u = v'_u + u = -u'' + u \end{aligned}$$

Lema

- (i) (T, \tilde{T}) zadovoljava (T1)–(T3)
- (ii) $\text{dom } \Phi(T) = C_c^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ i $\Phi(T_\lambda) = \hat{H} + \mathbb{1}$.

$$\begin{aligned} T^* &:= -S + \mathbb{1} \\ \tilde{T}^* &:= S + \mathbb{1} \end{aligned}, \quad \text{dom } T^* := \text{dom } \tilde{T}^* := H^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \oplus H^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

$\dim T^* = \dim \tilde{T}^* = 2 \implies$ četveroparametarska familija proširenja

Promatramo u daljnjem samo posebnu jednoparametarsku podfamiliju proširenja ($z \in \mathbb{C}$):

$T_z := \tilde{T}^*|_{\text{dom } T_z}$, gdje

$$\text{dom } T_z = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in H^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \oplus H^1(\mathbb{R}) : u_1(0^+) - u_1(0^-) = \frac{2}{z+1} u_2(0) \right\}.$$

$T_z^* = T^*|_{\text{dom } T_z^*}$, gdje

$$\text{dom } T_z^* = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in H^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \oplus H^1(\mathbb{R}) : u_1(0^+) - u_1(0^-) = \frac{-2}{\bar{z}+1} u_2(0) \right\}.$$

$$\text{dom } T_z = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in H^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \oplus H^1(\mathbb{R}) : u_1(0^+) - u_1(0^-) = \frac{2}{z+1} u_2(0) \right\}$$

$$\text{dom } T_z^* = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in H^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \oplus H^1(\mathbb{R}) : u_1(0^+) - u_1(0^-) = \frac{-2}{\bar{z}+1} u_2(0) \right\}$$

Djelovanjem s Φ dobivamo ($u_2 \rightarrow u$, $u_1 \rightarrow -u'$)

$$\text{dom } \Phi(T_z) = \left\{ u \in H^2(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap H^1(\mathbb{R}) : u'(0^+) - u'(0^-) = \frac{-2}{z+1} u(0) \right\}$$

$$\Phi(T_z) u = -u'' + u,$$

te analogno za T_z^* ($u_2 \rightarrow u$, $u_1 \rightarrow u'$)

$$\text{dom } \Phi(T_z^*) = \left\{ u \in H^2(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap H^1(\mathbb{R}) : u'(0^+) - u'(0^-) = \frac{-2}{\bar{z}+1} u(0) \right\}$$

$$\Phi(T_z^*) u = -u'' + u;$$

U našem slučaju se može pokazati da Φ čuva hermitičnost (samoadjungiranost), i.e.

$$\Phi(T_z)^* = \Phi(T_z^*) \implies \left(\Phi(T_z) = \Phi(T_z)^* \iff z \in \mathbb{R} \right)$$

...hvala puno na pažnji :)



N. Antić, M.E., A. Michelangeli: *Friedrichs systems in a Hilbert space framework: solvability and multiplicity*, J. Differential Equations 263 (2017) 8264-8294.



N. Antić, K. Burazin, I. Crnjac, M.E.: *Complex Friedrichs systems and applications*, Journal of Mathematical Physics **58** (2017) 101508, 22 pp.



M.E., A. Michelangeli: *On contact interactions realised as Friedrichs systems*, SISSA;48/2017/MATE



K. Burazin, M.E.: *Non-stationary abstract Friedrichs systems*, Mediterranean Journal of Mathematics **13** (2016) 3777-3796.