Čime se bavi filozofija matematike?

Metodički ogledi
Pregledni članak
UDK 101.1: 165.0

Majda Trobok
Filozofski fakultet, Rijeka

Sažetak
Cilj je ovoga teksta predstavljanje osnovnih pravaca u filozofiji matematike i najplauzibilnijih odgovora na pitanja o postojanju i prirodi matematičkih objekata kao i mogućnostima njihove spoznaje.
Predstavljeni pravci podijeljeni su u dvije osnovne skupine: realizam i antirealizam. U tekstu su predstavljene glavne teze tih dvaju skupina i njihovih predstavnika.
U dijelu o realizmu predstavljen je platonizam i problemi koji se javljaju kod platonizma kao i modalni i 'skupovno-teorijski' realizam.
Osnovne antirealistički pravci predstavljeni u tekstu su: intuicionizam, nominalizam i formalizam.
Koji je pravac najplauzibilniji još uvijek ostaje otvoreno pitanje; problemi u filozofiji matematike još uvijek traže odgovore i rješenja a rasprava danas nije ništa manje zanimljiva od one koja se vodila kroz stoljeća.

1. Uvod

Svi se mi susrećemo sa matematikom već od najranijeg djetinjstva, od prvog razreda osnovne škole pa nadalje, barem još u narednih desetak godina. Tijekom tih dugih godina uporabljujemo tvrdnje kao što su "Istina je da je 2+2=4", "Očito je da kroz dvije točke prolazi jedan i samo jedan pravac", "Postoji beskonačno mnogo prim brojeva" itd. i smatramo ih ne-problematičnima.

Pobliža analiza međutim otkriva bezbroj problema: u kojem to smislu postoje prim brojevi (i općenito brojevi), postoje li oni poput stolica ili zvijezda? Ukoliko postoje, gdje se oni nalaze s obzirom da ih u svijetu koji nas okružuje nema? I kako ih spoznajemo? I kako nam uopće mogu biti očite tvrdnje o entitetima koje ne možemo percipirati u onom smislu u kojemu to možemo objekte fizikalnog svijeta? Ukoliko pak pokušamo riješiti problem tvrdeći da je matematika plod naše mašte, postavlja se pitanje kako je onda moguće da je ona nužna osnova za fizikalne teorije, kako obrazložiti nezaobilaznost matematike u teorijama kojima pokušavamo objasniti fizikalne fenomene?

Sve su to pitanja kojima se bavi i na koje pokušava odgovoriti filozofija matematike.

Cilj je ovoga teksta predstavljanje osnovnih pravaca u filozofiji matematike i najplauzibilnijih odgovora na pitanja o postojanju i prirodi matematičkih objekata kao i mogućnostima njihove spoznaje. Predstavljeni pravci mogu se podijeliti u dvije osnovne skupine: realizam i antirealizam. Pogledajmo pobliže u čemu se sastoje glavne teze tih dvaju skupina i njihovih predstavnika.

2. Realizam u filozofiji matematike

Realizam općenito. Neka je zadana određena grupa rečenica odnosno sudova koje se tiču fizikalnog svijeta, mentalnih stanja, matematičkih sudova, ili čak rečenica koje govore o prošlim ili budućim događanjima. Realizam u filozofiji je pozicija koja smatra da sudovi posjeduju istinosnu vrijednost nezavisno o našoj spoznaji ili mogućnosti spoznaje njihovih istinosnih vrijednosti. Njihova istinosna vrijednost ovisi o tome kakva je realnost. Postojanje takve realnosti nezavisno je od nas.

Realizam u pogledu **matematike** doktrina je prema kojoj matematički entiteti kao što su brojevi, funkcije, skupovi, itd. objektivno postoje. Matematički su sudovi istiniti ili lažni zavisno od svojstava matematičkih entiteta i nezavisno od naše sposobnosti da istinosnu vrijednost i odredimo.

> "Glavna je točka u prilog realističkog pristupa matematici instinktivna sigurnost gotovo svakog tko je ikada pokušao riješiti problem da se radi o mislima o 'realnim objektima', bilo da se radi o skupovima, brojevima ili bilo čemu . . ."[1]

Najradikalnije stajalište unutar realizma jeste **platonizam,** teorija koja je ime dobila po analogiji s Platonovim realizmom u pogledu univerzalija. Platonizam je stajalište po kojem se matematika bavi objektivno postojećim matematičkim entitetima analogno fizici i fizičkim objektima. Matematički su entiteti objektivni, nezavisni od nas i apstraktni, tj. nisu prostorno-vremenski locirani već se nalaze u 'matematičkoj' realnosti koja se razlikuje od fizičke i koju neki filozofi matematike

(J. R. Brown) nazivaju 'Pi in the sky' realnost. Oni postoje nezavisno od nas i nužni su u onom smislu u kojem su to objekti fizikalnog svijeta. Platoničari tako smatraju da sudovi kao što su npr. 'Postoje barem tri velika grada starija od New Yorka' i 'Postoje barem tri savršena broja[2] veća od 17' imaju istu logičko-gramatičku formu[3]; postojanje matematičkih entiteta analogno je postojanju objekata koji nas okružuju. Matematički su sudovi stoga istiniti ili lažni ovisno o 'matematičkoj' realnosti. I to zato što njihovo značenje nije određeno (našom) referencijom na naše znanje o matematičkoj istini već referencijom na realnosti matematičkih entiteta. Matematički su dakle sudovi doslovno istiniti: izrazi koji imaju referentnu ulogu nezavisno od nas imaju i uspjeha u referenciji.

> "Tako iskaz oblika, 'Za neki prirodan broj n, A(n)', platonistički interpretiran, ne referira na naše znanje da li jesmo ili nismo u stanju citirati neki broj ν takav da je $\ulcorner A(\nu) \urcorner$ istinito ili čak možemo li opovrgnuti iskaz, 'Za svaki n, nije A(n)'. Iskaz se donosi na to da li postoji član objektivne, iako apstraktne, domene prirodnih brojeva koji zadovoljava predikat 'A(x)' . . ."[4]

Platonisti stoga smatraju da npr. brojevi i funkcije nisu rezultat našeg stvaranja. Zadatak matematičara sastoji se u točnom *opisivanju* 'Pi in the sky' realnosti analogno geografu čiji je zadatak opis fizičke realnosti. Matematičar ne stvara matematičke entitete već ih otkriva ili na njih nailazi kao što to čine, unutar vlastitog polja interesa, fizičar, biolog, kemičar itd. Matematičke je entitete moguće spoznati pomoću tkz. 'Pi in the sky' percepcije koja je analogna percepciji fizičkih objekata.

> ". . . objekti transfinitne teorije skupova . . . jasno ne pripadaju fizičkom svijetu i čak je njihova indirektna veza sa fizičkim iskustvom vrlo labava . . . Ali, unatoč njihovoj udaljenosti od osjetilnog iskustva, mi imamo nešto poput percepcije za objekte teorije skupova, što se vidi iz činjenice da nam se aksiomi nameću kao istiniti. Ne vidim razloga zašto bismo imali manje povjerenja u tu vrstu percepcije odnosno matematičke intuicije nego u senzitivnu percepciju koja nas inducira da gradimo fizikalne teorije i da očekujemo da se buduće senzitivne percepcije sa njima podudaraju i

---

[1]Moschovakis, Y. N. (1980) *Descriptive Set Theory* (North Holland, Amsterdam) citat u Maddy, *Realism in Mathematics*, str. 2.

[2]Broj je savršen ukoliko je jednak zbroju svih svojih djelitelja, osim broja samog. Na primjer 6 je savršen broj jer je 6=1+2+3.

[3]Primjer iz Benacerraf, P. 'Mathematical truth'.

[4]Dummett, M. (1967) 'Platonism' iz *Truth and Other Enigmas*, str. 202.

> nadalje vjerujemo da neko pitanje sada neodredivo ima smisla i da će se ubuduće moći odrediti."[5]

Gödel je smatrao da mora postojati centar u blizini neuralnog centra govora odgovoran za takvu vrstu percepcije. Sa time se međutim ne slažu svi platonisti. Frege, iako platonist po pitanju ontologije, odbija takvu percepciju, pa poimanje apstraktnih matematičkih entiteta (koji su po njemu svodljivi na logičke) bazira na principu konteksta tj. matematičke objekte spoznajemo putem spoznaje sudova koji o njima govore. U kojoj je vezi platonizam sa standardnom matematičkom praksom? Platonizam je preduvjet za prihvaćanje standardne matematike. Kod dokazivanja teorema teorije skupova (i aritmetike) koristimo i aksiom o beskonačnosti i aksiom izbora. Aksiom izbora[6] tvrdi da za svaki skup disjunktnih nepraznih skupova **postoji** barem jedan skup koji sa svakim od njih ima točno po jedan zajednički element odnosno: ako je $A=\{A_\lambda , \lambda\in J\}$ proizvoljna kolekcija nepraznih skupova, onda postoji barem jedna funkcija $f: J \rightarrow {}_{\lambda\in J}\cup A_\lambda$, takva da je $f(\lambda)\in A_\lambda$ za svaki $\lambda\in J$. Dakle

$(\forall\{A_\lambda\}_{\lambda\in J})((\forall\lambda)(\lambda\in J \Rightarrow A_\lambda\neq\emptyset) \Rightarrow (\exists f)(f\in ({}_{\lambda\in J}\cup A_\lambda)^J \ \&\ (\forall\lambda)(\lambda\in J \Rightarrow f(\lambda)\in A_\lambda)).$

Aksiom o beskonačnosti tvrdi da od svakog prirodnog broja **postoji** veći. Ako aksiom želimo formulirati neodvisno od aritmetike, reći ćemo sljedeće:

Postoji barem jedan skup M koji posjeduje sljedeća svojstva:

1. prazan skup $\emptyset$ je njegov element,
2. ako je proizvoljan skup A njegov element, onda je skup $A \cup\{A\}$ također njegov element.

Simbolično možemo aksiom o beskonačnosti zapisati na sljedeći način:

$(\exists M)(\emptyset \in M \ \&\ (\forall A)(A \in M \Rightarrow A\cup\{A\} \in M))$

Oba aksioma sadrže tvrdnje o postojanju koje kao filozofski *background* čini se nužno uključuju platonizam.

Koja je motivacija platonista? Dummett smatra kako bismo s lakoćom odbacili platonizam kada među njegovim sljedbenicima ne bismo imali ugledna imena kao

[5] Gödel, K. (1964) citat u Benacerraf 'Mathematical truth'

[6] Aksiom izbora prvi je eksplicitno formulirao Zermelo 1904. godine. Zato se u matematičkoj literaturi aksiom izbora često naziva i Zermelov aksiom.

što su Frege i Gödel[7] (mogli bismo dodati: i Cantor, Bolzano, Hardy,...). No, mislimo da razloga za prihvaćanje platonizma ima (zato među platonistima i postoje ugledna imena).

Platonizam nam nudi objašnjenje objektivnosti matematike. Ona se temelji upravo na objektivnom postojanju matematičkih objekata: teoremi su matematike objektivno istiniti stoga što matematički entiteti objektivno postoje. Koje dokaze doslovne istinitosti matematičkih sudova navode platonisti? To su argument iz nezaobilaznosti (*indispensability argument*) i argument iz očitosti. Argument iz nezaobilaznosti (Quine-Putnam) tvrdi da je matematika aplikabilna i da je nezaobilazna ne samo u opravdanju fizikalnih vjerovanja već i u opravdanju njihove pouzdanosti iz čega slijedi istinitost matematike. Na osnovi argumenta iz očitosti matematika je istinita stoga što je očita.

Problemi koji se javljaju kod platonizma mnogobrojni su no mnogi smatraju da je osnovni problem spoznajni (epistemološki). On nastaje kada se pitamo kako je matematička spoznaja uopće moguća odnosno kako možemo bilo što znati o matematičkim entitetima ako su oni apstraktni i nisu prostorno-vremenski locirani. Mnogi smatraju da standardni odgovor platonista ne zadovoljava. O 'Pi in the sky' percepciji naime ne možemo reći ništa, u potpunosti je neodređena i nama nepoznata. Moguće je samo povlačenje analogija sa percepcijom fizičkih objekata. Problem spoznaje seže do Platona iako ga u novoj filozofiji matematike i u ponešto drukčijem obliku nudi Benacerraff. Njegov se argument sastoji se iz tri premise:

(1) matematički su objekti apstraktni, nezavisni od nas

(2) samo apstraktni objekti su kauzalno inertni

(3) spoznaja ovisi o kauzalnoj interakciji.

Ključne su premise (1) i (3) odnosno premisa iz apstraktnosti matematičkih entiteta i kauzalna teorija spoznaje. Ako je dakle platonizam u pravu, spoznaja matematičkih entiteta nije moguća. Kako (4) o matematičkim entitetima ipak nešto znamo, čini se da platonizam nije prihvatljiv odnosno točke (1), (2), (3), (4) čine nekonzistentnu četvorku. Koji su mogući odgovori na argument Benacerraffa? Odgovor standardnog platoničara glasi da je moguće spoznati matematičke objekte

[7] Dummett, M. (1967) 'Platonism' iz *Truth and Other Enigmas*, str. 202.

pomoću '*Pi in the sky*' percepcije koja nam omogućava kauzalnu iterakciju sa apstraktnim objektima, odnosno on prihvaća točke (1) i (3) dok odbija točku (2). Fregeova filozofija matematike na Benacerraffove argumente odgovara *ante litteram* (kao što to danas čine neofregeovci) odbijanjem točke (3) tj. teorijom da je moguće spoznati matematičke objekte iako oni ne djeluju kauzalno odnosno da je kauzalna teorija pogrešna. Koji su daljnji (neplatonistički) odgovori? Spomenimo najprije one odgovore 'umjerenih' realista.

Hilary Putnam zastupa **modalni realizam** odnosno smatra da je matematika modalna logika; realizam Putnama je realizam *mogućih* objekata. Radi se naime o odbijanju točke (1) u argumentu Benacerrafa. Riječ je o realizmu bez apstraktnih objekata:

> "Filozofi i logičari bili su toliko zaposleni pokušavajući osigurati matematici nekakvo 'temelje' u prošlih pola stoljeća da su se samo rijetko sramežljivi glasovi usuđivali predložiti da ga matematika ne potrebuje . . . Ja ne mislim da je matematika nejasna, ja ne vjerujem da matematika u svome temelju proživljava krizu; zaista, ja ne vjerujem da matematika posjeduje ili potrebuje 'temelje'."[8]

Penelope Maddy[9], poput Putnama, odbacuje točku (1) ali nudi drukčiju zamjenu. Skupovi postoje nezavisno od nas ali nisu apstraktni objekti već se nalaze u svijetu koji nas okružuje. Svaki je objekt naime identificiran sa skupom koji sadrži samo taj objekt kao svoj element. Maddy to naziva **'skupovno-teorijski' realizam.** Skupove percipiramo kao i fizikalne objekte. Kada percipiramo određeni objekt fizičkog svijeta, percipiramo i odgovarajući skup bili mi toga svjesni (u slučaju učenog matematičara) ili ne (u slučaju naivnog opažača). Maddyin dakle 'skupovno-teorijski' realizam predstavlja zanimljiv način da se riješi problem apstraktnih matematičkih objekata 'preseljenjem' istih iz metafizičkog 'Pi in the sky' svijeta u fizički svijet.

3. Antirealizam u filozofiji matematike

---

[8]Putnam, 'Mathematics without foundations' u *Mathematics, Matter and Method - Philosophical Papers, Volume I* .

[9]Vidi njen *Realism in Mathematics*.

Antirealizam općenito. Neka je zadan skup rečenica koje, po vanjskom obliku, referiraju na predmete u danoj domeni. Antirealizam u pogledu takve domene negira objektivno tj. od subjekta nezavisno, postojanje objekata u domeni. Stoga rečenice nisu doslovno istinite. U nauci su tako

> "teorije . . . samo spretno izgrađeni "misaoni instrumenti", koji nam omogućuju izvedbu eksperimenata i opažanja osjetilnih pojava, a bez ontoloških obveza glede bitnosti, o kojoj teorije govore."[10]

Govoreći o antirealizmu u pogledu **matematike**, što zbog antinomija koje se javljaju unutar teorije skupova, što zbog metafizičke atmosfere koja okružuje stavove platonista, što zbog već navedenih Bernacerrafovih argumenata javljaju se početkom stoljeća reakcije na stavove platonista.

Spomenimo najprije **intuicionizam.** Intuicionisti su smatrani najizravnijim oponentima platonizma, neki čak smatraju da se radi o jedinim istinskim protivnicima. Riječ je o teoriji po kojoj se matematika bavi mentalnim konstrukcijama. Matematika je proizvod ljudskog uma; matematički objekti ne postoje nezavisno od našeg uma već po svojoj prirodi zavise od ljudskog mišljenja. Intuicionisti smatraju da je pitanje o postojanju matematičkih entiteta neprihvatljivo. Neki je matematički teorem istinit ukoliko predstavlja uspješnu realiziranu matematičku konstrukciju odnosno ukoliko je konstrukcija koju određeni teorem zahtjeva ostvarljiva;[11] stoga intuicionisti pripadaju konstruktivistima.[12] Intuicionisti dakle smatraju da je pitanje postojanja matematičkih entiteta bespredmetno:

> "Konstruktivisti nas upozoravaju da ... vrsta argumentacija, kojom dominira ontološki pritisak, nije tipična za matematiku. Za matematiku je konstituirajuće upravo to što je ona oslobođena ontološkog pritiska.

---

[10] Ule, *Znanje, znanost in stvarnost*, str. 181

[11] Za neke se intuicioniste (Dummett) radi o logičko-jezičnim konstrukcija, za druge pak (Brouwer, Heyting) o mentalnim operacijama.

[12] Konstruktivizam nastaje krajem XIX. stiljeća kao reakcija na upotrebu apstraktnih pojmova i metoda dokaza u matematici pogotovo nakon rezultata Dedekinda i Cantora. Konstruktivisti smatraju da matematičke objekte treba konstruirati (mentalnim konstrukcijama) ili kompjutirati. Teoremi koji tvrde postojanje nekog objekta moraju putem dokaza ponuditi sredstvo za konstruiranje objekata čije postojanje tvrde. Osnovni pravci konstruktivizma u ovom stoljeću su: intuicionizam, finitizam (Skolem, Hilbert), konstruktivizam Markova, konstruktivizam Bishopa, predikativizam (Poincaré), polu-inticionizam (Borel). Razlikuju se u različitom prihvaćanju odnosno odbijanju metoda dokaza klasične matematike.

> Matematička spoznaja je ona spoznaja koja je moguća **bez ontološkog obvezivanja**."[13]

Intuicionisti stoga prihvaćaju samo dio klasične matematike. Stav intuicionista da se matematika bavi konstrukcijama[14] obvezuje naime na odbijanje nekih načela klasične logike kao što su *tertium non datur* (pravilo isključenja trećega[15]) dok se značenje negacije razlikuje od onoga u standardnoj logici. To pak obavezuje na preispitivanje definicija i dokaza unutar klasične logike i matematike i dovodi do drugačije, intuicionističke logike odnosno matematike.

Nominalizam negira postojanje apstraktnih entiteta dakle analogno Putnamu i Maddy odbija točku (1) u argumentu Benacerrafa no zbog bitno drukčijih razloga. Nominalisti naime smatraju da bi matematički entiteti kada bi postojali bili apstraktni. Kako međutim apstraktni entiteti ne postoje, ne mogu postojati ni matematički entiteti. Povijesno riječ je o nominalizmu koji vuče korijen iz Srednjeg vijeka, a razvio ga je Lesniewski i koji postaje poznat pogotovo kroz tekstove Quinea i Goodmana.

> "Nominalistički sistemi imaju svoju vrijednost u tome, da pokažu, kako daleko možemo stići sredstvima krajnje jezične ekonomije."[16]

Nadalje, nominalisti ne prihvaćaju beskonačnost pošto je naše iskustvo konačno i ne postoji dokaz da u fizičkom svijetu postoji beskonačan broj fizikalnih objekata. No, pošto za aritmetiku potrebujemo beskonačno mnogo brojeva pitamo se znači li to da nominalisti uopće ne prihvaćaju klasičnu matematiku? Odgovor je negativan. Nominalisti smatraju da je matematika aplikabilna pa time korisna iako:

> "korist koju su prirodne znanosti imale iz upotrebe matematičkih formule ne implicira da su te formule i istinite. . . . formule platonističke matematike su . . . praktična sredstva za olakšavanje računanja, koja ne uključuju pitanja o istinitosti. Ono što sadrži smisao i što je istinito u platonističkoj matematici, . . ., nije aparat kao takav, već samo njegov opis: pravila na osnovu koji je izgrađen i na osnovu kojih funkcionira."[17]

---

[13] Šikić, Z. *Filozofija matematike*, str. 50-51.
[14] Zajednički Dummettu, Brouweru i Heytingu.
[15] Odnosno pravilo po kojem za svaku tvrdnju A vrijedi da je ona istinita ili njena negacija: A ili ne-A.
[16] Ule, *Osnovna filozofska vprašanja sodobne logike,* str. 433.
[17] Goodman & Quine 'Steps toward a nominalist constructivism' u Cellucci, *La filosofia della matematica*, str. 298.

Od suvremenih filozofa koji brane nominalizam svakako je najznačajniji Hartry Field.[18] Osim toga Field je sigurno autor o čijem se nominalizmu najviše raspravlja u posljednje vrijeme; razlog je tome što Fieldov pristup ima prednost pred ostalima stoga što nije revizionistički tj. čuva cjelinu klasične matematike. Field pokušava pokazati da matematika jeste aplikabilna pa time korisna ali nije nezaobilazna iz čega slijedi da nije istinita. Field tako pobija argument iz nezaobilaznosti koji je, po njemu, osnovni argument za doslovnu istinitost matematike dok istovremeno zastupa nerevizionizam u pogledu klasične matematike.

Spomenimo na kraju i **formalizam;** teoriju po kojoj matematičke stavove treba shvatiti kao nizove znakova bez interpretacije. Matematika dakle posjeduje sintaksu ali ne i semantiku odnosno ne pridaje joj se nikakvo značenje. Kod modificiranog formalizma neke tvrdnje koje se tiču brojeva (samo one koje se tiču *konačnih* brojeva i njihovih *konačnih* klasa) imaju i interpretaciju dok se ostatak formalno sastoji od niza znakova koji ništa ne označavaju. David Hilbert npr. smatra[19] da u konačnom rezultatu klasična matematika jeste prihvatljiva ('Nitko nas neće izbaciti iz Cantorovog raja'[20]) ali je potrebna drukčija interpretacija dijela matematike koji nije finitaran jer

> "nigdje u prirodi ne možemo naći homogeni kontinuum koji pretpostavlja onu vrstu djeljivosti koja je potrebna da bi se došlo do infinitezimalno malog. Beskonačna djeljivost kontinuuma operacija je koja postoji samo u našim mislima, ona je jednostavno jedna ideja, *de facto* opovrgnuta rezultatima promatranja prirode i eksperimentima fizike i kemije."[21]

Moglo bi se međutim desiti, smatra Hilbert, da beskonačnost ima odlučujuću ulogu u našim mislima i da se radi o nužnom pojmu te analizira situaciju u matematici. U analizi je na primjer beskonačnost centralni pojam. Razvoj infinitezimalnog računa bazira se pogotovo na upotrebi matematičkih sustava sa beskonačnim brojem elemenata. Sama analiza međutim ne objašnjava prirodu beskonačnosti već to čini, smatra Hilbert, Cantorova teorija skupova u kojoj Cantor uvodi aktualnu

---

[18]Vidi *Science without Numbers - a Defence of Nominalism*.
[19]Vidi na primjer njegov 'Über das Unendliche', Mathematische Annalen, 1925, 95, 161-190, (ovdje je korišten talijanski prijevod 'Sull ' infinito' u Cellucci, Carlo (1967) *La filosofia della matematica*).
[20]Hilbert naime smatra da nema potrebe odustati od Cantorove teorije skupova.
[21]Hilbert, 'Über das Unendliche'; korišten talijanski prijevod 'Sull' infinito' u Cellucci, *La filosofia della matematica*, str. 164.

beskonačnost[22]. Hilbert međutim smatra da možemo izbjeći paradokse bez odustajanja od Cantorove teorije skupova. Intuitivna logička dedukcija jeste nužna ali ne vrijedi u domeni beskonačnog. Hilbert riješava problem uvedbom tkz. 'idealnih elemenata':

> "moraju se dodati finitarnim iskazima idealni iskazi da bismo održali jednostavna formalna pravila standardne aristotelovke logike."[23]

U matematici tako imamo dvije vrste tvrdnji: finitarne i idealne tvrdnje. Finitarne tvrdnje sadrže samo brojevne znakove (3>2, 2+3=5, 2=3, ...) i razumljive su bez dodatnih objašnjenja, vrijedi bezuvjetno standardna logika i *tertium non datur.* Idealne tvrdnje nemaju značenja, ne znače ništa pošto nisu finitarni iskazi te nije moguće intuitivna upotreba logičkih operacija; potrebno je dakle formalizirati logičke operacije i matematičke dokaze. Kod formalizacije logičke se relacije prevode na formule pa je potrebno uvesti, osim matematičkih znakova, i sljedeće znakove:

& (konjunkcija), V (disjunkcija), $\rightarrow$ (materijalna implikacija), $\sim$ (negacija)

te, osim matematičkih varijabli *a*, *b*, *c*, ... i logičke A, B, C , ... odnosno varijable na iskazima.

> "Ugodno je iznenađenje otkriti da se istovremeno riješava . . . *konzistentnost aritmetičkih aksioma.* . . . . naša teorija dokaza . . . sačinjava nužan svodni kamen teorijske zgrade aksiomatike."[24]

Po nekim interpretacijama Hilbert prihvaća kritike konstruktivista te pokušava opravdati programom metamatematike konstruktivistički neprihvatljive rezultate

---

[22]Za razliku od "potencijalne" koja je konačna promjenjiva veličina, "aktualna" je beskonačnost konstantna veličina koja je međutim po magnitudi veća od svake konačne veličine iste vrste.
Cantor prvi put tretira aktualnu beskonačnost kao dobro definirani matematički entitet u svom djelu 'O linearnim agregatima' iz 1883:

> "Tradicionalno se smatra da je beskonačnost ono što beskonačno raste (ili u obliku bliskom tome) u konvergentnom nizu, oblik poprimljen u XVII. stoljeću. Ja, nasuprot tome, koncipiram beskonačnost u dobro definiranoj formi kao nešto završeno, nešto sposobno ne samo za matematičku formulaciju nego isto tako za definiciju broja. Takva koncepcija beskonačnosti suprotna je meni dragim tradicijama i bio sam primoran prihvatiti je i protiv svoje volje. Međutim mnoge godine naučnih spekulacija i provjera dovele su me do tog zaključka kao logički nužnog i s toga razloga čvrsto vjerujem da se ne mogu navesti valjani prigovori na koje ne bih bio u stanju odgovoriti."

[23]Hilbert, 'Über das Unendliche'; korišten talijanski prijevod 'Sull' infinito' u Cellucci, *La filosofia della matematica*, str. 176.
[24] Hilbert, 'Über das Unendliche'; korišten talijanski prijevod 'Sull' infinito' u Cellucci, *La filosofia della matematica*, str. 182-3.

klasične matematike tvrdeći kako postoje iskazi klasične matematike koje ne razumijemo no oni su samo pomoćno sredstvo kojime lakše i jednostavnije dokazujemo konstruktivističke tvrdnje.

4. Zaključak

Ukoliko želimo zadržati klasičnu matematiku čini se da smo primorani prihvatiti realizam odnosno platonizma koji pak, kao što smo vidjeli, vodi do novih problema na koje se i danas pokušavaju naći odgovori. Mnogo je suvremenih verzija platonizma kao što su strukturalizam ili neo-logicizam koje nismo uspjeli spomenuti u tekstu i koje nude odgovore na osnovne probleme s kojima se klasični platonizam susreće. Isto smo tako izostavili neke značajne predstavnike antirealizma koje stoga treba barem imenovati, kao što je Ludwig Wittgenstein.

Što reći na kraju? Dobra i loša vijest svode se na jednu: pitanja i problemi u filozofiji matematike još uvijek traže odgovore i rješenja. Rasprava danas nije ništa manje zanimljiva od one koja se vodila kroz stoljeća; nadamo se da će ovaj tekst potaknuti nekoga da se u nju uključi.

Bibliografija

Benacerraf Paul & Putnam Hilary (1964) *Philosophy of Mathematics - Selected readings* (Cambridge University Press, Cambridge).

Brouwer, L. E. J. (1975) *Collected Works 1, Philosophy and Foundations of Mathematics*, (North-Holland, Amsterdam).

Brown, J. B. (1990) 'Π in the Sky' u Irvine, A., *Phisicalism in Mathematics* (Kluwer, Dorrecht).

Cellucci, Carlo (1969) 'Qualche problema di filosofia della matematica', Rivista di filosofia 2, 135-160.

Detlefsen, Michael (1990). 'Brouwerian Intuitionism', Mind 396, Vol. 99, 501-533.

Dummett, Michael (1991) *Frege - Philosophy of Mathematics*, (Duckworth, London).

Dummett, Michael (1978) *Truth and Other Enigmas*, (Duckworth, London).

Dummett, Michael (1993) *The Seas of Language*, (Clarendon Press, Oxford).

Field, Hartry H. (1989) 'Realism and anti-realism about mathematics' u *Realism, Mathematics and Modality*, (Basil Blackwell, Oxford).

Field, Hartry H. (1980) *Science without Numbers - a Defence of Nominalism*, (Princeton University Press, Princeton, New Jersey).

Goodman, Nelson & Quine, W. V. (1947) 'Steps toward a constructive nominalism', Journal of Symbolic Logic, Vol. 12, 105-122, talijanski prijevod u Cellucci, Carlo (1967) *La filosofia della matematica.*

Gödel, Kurt (1944) 'Russell's mathematical logic', u *The Philosophy of Bertrand Russell* (P. A. Scilpp, Nortwestern University Press), talijanski prijevod u Cellucci, Carlo (1967) *La filosofia della matematica* (Editori Laterza, Bari).

Gödel, Kurt (1947) 'What is Cantor's continuum problem?', Amer. Math. , Vol 54, 515-525, talijanski prijevod u Cellucci, Carlo (1967) *La filosofia della matematica.*

Hallett, Michael (1984) *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*, (Clarendon Press, Oxford).

Hardy, G. H. (1948) *A Mathematician's Apology* (University Press, Cambridge).

Heyting, Arend (1956) *Intuitionism - an Introduction*, (North-Holland Publishing Co., Amsterdam).

Hilbert, David (1925) 'Über das Unendliche', Mathematische Annalen, 95, 161-190, korišten talijanski prijevod 'Sull ' infinito' u Cellucci, Carlo (1967) *La filosofia della matematica.*

Maddy, Penelope (1990) *Realism in Mathematics* , (Clarendon Press, Oxford).

Parsons, Charles (1995) 'Platonism and Mathematical Intuition in Kurt Gödel's Thought', The Bullettin of Symbolic Logic 1, Vol. 1, 44-72.

Prijatelj, Niko (1974) *Matematične strukture I, II, III* (Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, Ljubljana).

Putnam Hilary (1975) *Mathematics, Matter and Method - Philosophical Papers, Volume I* (Cambridge University Press, Cambridge).

Russell, Bertrand (1903) *The Principles of Mathematics*, korišten talijanski prijevod (1989) *I principi della matematica* (Newton Compton editori s.r.l., Roma).

Stigt, Walter P. van (1990) *Brouwer's Intuitionism*, (North-Holland, Amsterdam).

Šikić, Zvonimir (1995) *Filozofija matematike*, (Školska knjiga, Zagreb).

Ule, Andrej (1982) *Osnovna filozofska vprašanja sodobne logike*, (Cankarjeva založba, Ljubljana).

Ule, Andrej (1996) *Znanje, znanost in stvarnost*, (Znanstveno in publicistično središče, Ljubljana).