Majda Trobok
Univerza na Reki

Dummett o Wittgensteinovi filozofiji matematike

V članku "Wittgensteinova filozofija matematike" Michael Dummett kritično predstavlja osnovne Wittgensteinove misli o filozofiji matematike in o matematiki sami. Dummett obravnava predvsem Wittgensteinovo filozofijo matematike iz *Opazk o temeljih matematike,* ki so bile v tistem času ravno objavljene v knjigi, s katero se Wittgenstein uvršča med predstavnike antirealizma. Dummett v svojem članku razlaga, da je osnovni razlog za to, da Wittgenstein zavrača objektivnost matematične resnice, v tem, da ne sprejema objektivnosti dokaza v matematiki. Wittgenstein meni, da nas dokaz ne prisili v to, da ga sprejmemo. Vendar hkrati priznava, da matematiko lahko razumemo na dva načina: kot konvencijo oziroma množico pravil (analogno šahovski igri) ali pa kot naravno zgodovino kraljestva števil. To zadnje pa se ne ujema popolnoma z Dummettovo interpretacijo.

Ključne besede: matematična resnica, dokaz, pravilo, konvencija.

Da bi lahko Dummettov članek "Wittgensteinova filozofija matematike" čim bolje razumeli, je dobro opozoriti, da se Wittgensteinova filozofija matematike, ki jo je razvil v *Logično filozofskem traktatu*, razlikuje od filozofije matematike, ki jo je razvil v svojih kasnejših spisih.Wittgenstein je namreč razvil dve zelo različni filozofiji. Prva se nanaša na *Traktat* iz leta 1922, druga, ki je kritična do prve, pa na *Filozofske raziskave* (1953).

> "'Traktat' nosita dva motiva, ki sta se spojila v en problem. *Prvi* je splošni transcendentalni motiv, problem opredelitve meje možnega smisla in nesmisla, potegnjene skozi sam jezik (ki je edini izraz smisla), kjer je meja možnega smisla (resnice) sovpadla z mejo možnega védenja. *Drugi* pa je motiv same simbolne logike, ki se je po Fregejevem in Russellovem konstituiranju prvič pojavila kot avtonomna znanost in posebno pri Russellu kot kritika jezika." (Ule, 1982: 280)

Če govorimo o filozofiji matematike v *Traktatu*, potem lahko opišemo filozofijo aritmetike kot vrsto logicizma, medtem ko filozofsko ozadje sestoji v glavnem iz del Fregeja in Russella:

> "Značaj njegove verzije 'logičnega atomizma' je zato možno oceniti le, če jo dojamemo kot svojevrstno radikalizacijo Russellove filozofije, pri čemer pa spet nastopi komplikacija v tem, ker je Wittgenstein sam močno vplival na Russella in na njegov logični atomizem." (Ule, 1982: 251)

Da bi pokazali, da Wittgenstein zagovarja logicistično stališče o matematiki, lahko navedemo tudi naslednje teze iz *Traktata*:

> "Matematika je logična metoda.
> Matematični stavki so enačbe, torej navidezni stavki.
> Matematični stavek ne izraža nobene misli." (Wittgenstein, 1976: 6.2, 6.21)

Wittgenstein zavrača pretvorbo teorije števil v teorijo razredov oziroma zvajanje teorije števil na logiko (v širšem smislu izraza "logika", kjer logika vključuje tudi teorijo množic):

> "Teorija razredov je v matematiki povsem odvečna.
> To pa zato, ker splošnost, ki jo uporabljamo v matematiki, ni naključna." (Wittgenstein, 1976: 6.031)

Wittgenstein se je kasneje ogradil od projekta zvajanja matematike na logiko; menil je namreč, da je osnovanje aritmetike na logičnih operacijah odvečno. Kakšni so razlogi za opustitev tega projekta? Najprej je treba opozoriti na to, da se je Wittgenstein kasneje mnogo bolj zanimal za matematiko, ki za njega ni več igrala obrobne vloge. Eden od razlogov za to je vpliv Brouwerjevega intuicionizma in Hilbertovega formalizma, ki sta se razvila v dvajsetih letih, ter na splošno odziv na stališča platonistov, tako zaradi antinomij, ki se pojavljajo znotraj Cantorjeve teorije množic, kot tudi zaradi splošnega metafizičnega vzdušja, ki obkroža platonizem. Med nasprotnike platonizma se prišteva tudi Wittgenstein sam. Zanimanje za matematiko pri Wittgensteinu izrazito narašča, kar je razvidno iz njegovih spisov od leta 1929 do 1933, v katerih se pogosto nanaša na stališča Brouwerja, Hilberta in Skolema. Drugi razlog, ki je možen, je njegova ideja o povezanosti gramatike in matematike:

> "Menim, da moramo končni razlog za Wittgensteinovo zanimanje za filozofijo matematike najti v tem povezovanju. (...) V srednji fazi se pojavi nova ideja, ki je popolnoma tuja univerzumu *Traktata*: da je v nekaterih primerih vsebino gramatikalnega pravila možno izraziti v *propoziciji* z avtentičnim pomenom." (Frascolla, 1994: 43)

Dummett v svojem članku obravnava predvsem Wittgensteinovo filozofijo matematike iz *Opazk o temeljih matematike*, ki so bile v tistem času ravno objavljene v knjigi, s katero se ta uvršča med predstavnike antirealizma. Kot razlaga Dummett v svojem članku, je osnovni pojem, ki podpira platonizem v filozofiji matematike, pojem matematične resnice. Osnovni razlog za to, da Wittgenstein zavrača objektivnost matematične resnice, je v tem, da ne sprejema objektivnosti dokaza v matematiki. Meni, da nas dokaz ne prisili v to, da ga sprejmemo. Slika, ki ustreza takšni koncepciji, pa je naša konstrukcija matematike.

Matematik je, meni Wittgenstein, oseba, ki ne odkriva, ampak iznajde (Wittgenstein, 1967: I-167):

> "'Toda, ali torej nisem v neki verigi sklepanja prisiljen, da grem, kakor grem?' – Prisiljen? Saj vendar lahko grem, kakor hočem! 'Toda če hočeš ostati v sozvočju s pravili, *moraš* iti tako.' – Nikakor ne; *to* imenujem 'sozvočje'. – 'Potem si spremenil smisel bese-

> de »sozvočje« ali smisel pravila.' – Ne; – kdo pravi, kaj tukaj pomeni 'spremeniti' in kaj 'ostati nespremenjeno'?
> Kolikor pravil mi navedeš – podam ti pravilo, ki upraviči *mojo* uporabo tvojega pravila." (Wittgenstein, 1967: I-113)
> "Kajti o tem, da ga zakoni sklepanja ne prisiljujejo v to, da bi govoril ali pisal to in to, tako kot tračnice vlak, soglašamo." (Wittgenstein, 1967: I-116)

Ko Wittgenstein govori o (matematičnem) dokazu (ali trditvi), se zdi, da gre za naše poljubno sprejemanje ali zavračanje takšnega dokaza (oziroma trditve); da je dokaz kot tudi sama trditev vprašanje konvencije, vprašanje odločitve oziroma izbire. Dokaz uvaja novo pravilo znotraj pravil jezika. Uvaja novo paradigmo med paradigmami jezika; ravno tako kot bi nekdo sestavil posebno modro barvo z odtenki rdeče, določil bi posebne odtenke barve in jim dal imena:

> "Če rečem: 'Ta stavek sledi iz onega,' to pomeni priznati kako pravilo. Priznanje se zgodi *na podlagi* dokaza. To pomeni: to verigo (to figuro) sprejemam kot dokaz. – 'Ali bi lahko naredil drugače? Ali ga *moram* sprejeti?' – Zakaj praviš, da bi moral? Zato vendar, ker na koncu dokaza nemara rečeš: 'Da – ta dokaz moram sprejeti.' To pa je vendar samo izraz tvojega brezpogojnega priznanja." (Wittgenstein, 1967: I-33)

To, da je Wittgenstein glede matematičnih trditev in dokazov konvencionalist, trdi tudi Dummett:

> "Za Wittgensteina pa s tem, ko sprejmemo teorem, privzamemo neko novo jezikovno pravilo, in zato naši pojmi na koncu dokaza ne morejo ostati nespremenjeni. Toda dokaz bi lahko zavrnili, ne da bi storili kako večjo silo našim pojmom kot takrat, ko dokaz sprejmemo; tudi če dokaz zavrnemo, bi lahko ostali enako zvesti pojmom, s katerimi smo začeli." (Dummett, 1999: 88)

Wittgenstein nadalje v *Opazkah o temeljih matematike* argumentira proti nekaterim rezultatom "klasične matematike", ki je v svojem temelju platonistična; tako, na primer, ne sprejema procesa diagonalizacije oziroma Cantorjevega dokaza, da množica realnih števil ni števna. To, da Wittgenstein ne sprejema Cantorjevega dokaza – procesa diagonalizacije –, je bistveno odvisno od tega, da zavrača termin "neskončno", ker gre za termin, ki sistemu daje pomen, namesto da bi ga dobil od njega (*glej* Wittgenstein, 1967: Dodatek II-17) oziroma termin "neskončno" organsko ne izhaja iz našega računanja, ni nekaj, kar bi sledilo v nizu računov, ampak se zasebno, "umetno" vpeljuje v sistem, s tem pa mu daje neprimeren pomen.

Nesprejemanje aktualne neskončnosti in Cantorjeve teorije v prvi vrsti pomeni zavračanje določenega filozofskega pojmovanja narave matematike oziroma sprejemanje samo tistih matematičnih predmetov, ki jih lahko razumemo kot naše lastne konstrukcije, ki so dostopne naši notranji percepciji (intuiciji) ali pa jih lahko izpeljemo iz empiričnega spoznanja. V primeru neskončnosti ni sprejemljivo nič od tega. Nasproti temu Cantorjeve trditve temeljijo na platonizmu oziroma na realistični teoriji pojmov in obstoju matematičnih predmetov neodvisno od naših konstrukcij in intuitivnega dojemanja.

Če pa sprejmemo Wittgensteinovo interpretacijo, po kateri matematik nekaj iznajde, si izmisli, medtem ko dokaz lahko sprejmemo, ni pa nam ga treba sprejeti, se sprašujemo, zakaj ne bi sprejeli Cantorjevega teorema oziroma dokaza in procesa diagonalizacije. Tudi za sam pojem neskončnosti, ki ga Wittgenstein trdovratno zavrača, nimamo razloga za to, da ga zavrnemo, oziroma ga je toliko, kolikor ga je tudi za to, da ta pojem sprejmemo; in če nismo kakor vlak na tirih, nas nič ne prisiljuje k ničemur. Wittgensteinova pripomba nas tako ne prisiljuje k temu, da zavrnemo Cantorjev dokaz, nobenega razloga nimamo, da si ne bi "izmislili" več "vrst" neskončnosti. Če pa sprejmemo Wittgensteinovo kritiko Cantorjevega teorema oziroma dokaza, se lahko vprašamo, kakšne posledice ima to za Wittgensteinovo filozofijo matematike. Kaj mora torej Wittgenstein sprejeti, če hoče biti konsistenten z lastnimi pripombami na Cantorjev teorem oziroma dokaz?

Vprašajmo se najprej, ali Wittgenstein sploh zahteva, da je kakšen (s tem pa tudi njegov lastni) matematični ali filozofski sistem konsistenten oziroma neprotisloven?

> "'Zakaj v matematiki ne bi smelo biti dovoljeno niti eno protislovje?' – Zakaj ga ne sme biti v naših enostavnih jezikovnih igrah? (Tu gotovo obstaja neka povezava.) Je to torej temeljni zakon, ki obvladuje vse jezikovne igre, ki si jih lahko zamislimo?" (Wittgenstein, 1967: III-57)
>
> "Ni škodljivo tole: proizvesti protislovje na področju, kjer niti neprotislovni niti protislovni stavek ne storita ničesar; temveč to: ne vedeti, kako smo prišli tja, kjer protislovje ne škodi več." (Wittgenstein, 1967: III-60)

Ali to pomeni, da so znotraj filozofije, ki tako in tako nima vpliva na matematiko, dovoljena protislovja ali pa so vsaj neboleča? Če je odgovor pritrdilen, potem nobena trditev – s tem pa tudi Wittgensteinove trditve – ni podvržena kritiki niti za (zdi se mi visoka) ceno protislovnega sistema. Če pa sprejememo Wittgensteinovo potrebo po neprotislovnem sistemu, se vprašamo, kakšne posledice ima to, da ne sprejmemo določenih pravil sklepanja?

Sam Wittgenstein – čeprav se nagiba k trditvi, da so sankcije analogne sankcijam pri nesprejemanju določenih družbenih zakonov – vseeno priznava, da tisti, ki sklepa na drugačen način od običajnega, zares pride v spor, na primer, z družbo pa tudi z nekaterimi praktičnimi posledicami. V čem so te praktične posledice, ki jih Wittgenstein omenja v citatu?

Kaj se dogaja, na primer, pri seštevanju oziroma štetju?

Ko seštevamo, trdi Wittgenstein, oziroma ko otroka učimo seštevati, lahko, na primer, uporabimo grah: če pred otroka položimo tri zrna graha in še tri zrna graha, pa dobimo, na primer, enkrat pet, enkrat sedem zrn graha itd., bomo rekli, da grah ni primeren za seštevanje. Če pa bi se isto zgodilo s palčkami, s prsti, z odseki in z večino drugih stvari, bi to pomenilo konec računanja:

> "'Toda, ali ne bi tedaj vendar še vedno bilo 2 + 2 = 4?' – Ta stavčič bi s tem postal neuporaben. –" (Wittgenstein, 1967: I-37)

Če pa je računanje brez aplikacije obsojeno na smrt, ker – s tem, ko stvari, ki nas obkrožajo, niso več primerne za na določen način definirano seštevanje – moramo opustiti takšen način seštevanja, potem seštevanja ne moremo imeti za konvencijo. Torej je analogija med računskimi pravili in, na primer, pravili igre (šah) mnogo manjša od tega, kar smo, prevarani z nekimi analogijami, navajeni misliti. V čem se namreč igra (šah) razlikuje od sistema računskih pravil? Poglejmo si primer, v katerem bi bil odkrit planet "Šoh", po katerem se njegovi prebivalci premikajo tako, da skačejo po igriščih, ki so s kredo narisana v obliki šahovnice. Nobeden od prebivalcev pa ne skače po šahovskih pravilih: Šohec, katerega gibanje je še najbolj podobno gibanju, ki je dovoljeno šahovskemu "konju", se, na primer, giblje štiri polja naprej in eno polje desno (ali levo). Pravila Šohcev tako ne moremo imeti za aplikacijo šahovskih pravil, toda zaradi tega prav gotovo ne bomo spreminjali pravil naše igre. Ne bomo jih spreminjali niti takrat, ko jim ne bo odgovarjala nobena struktura: če niti paličice, niti prsti, niti črtice, niti večina drugih stvari ni podrejena šahovskim pravilom, to prav gotovo ne pomeni konec šaha; ravno zaradi tega, ker je šah konvencija. Pri računanju pa, kot ugotavlja Wittgenstein, ni tako. Zdi se namreč – tudi iz samega citata –, da je kriterij za sprejemanje konvencija, ne pa uporabnost oziroma aplikacija. To je očitno tudi takrat, ko Wittgenstein govori o neskončnosti; opozarja namreč, da povezava pojma neskončnost z nekim sistemom ni ista kot povezava števila 4 in črtic | | | |.

> "Početi tako, kot da smo razočarani, ko nismo našli ničesar neskončnega v kalkilu, je seveda smešno; vendar pa ni smešno naslednje vprašanje: kakšna je vendar vsakdanja raba besede 'neskončno', ki ji daje pomen za nas, in kaj je tedaj njena zveza s temi matematičnimi kalkili?" (Wittgenstein, 1967: Dodatek II-17)

Kaj Wittgenstein še zahteva za dokaz?

> "Dokaz mora biti nazoren postopek. Ali tudi: dokaz je *nazoren* postopek. Ne nekaj izza dokaza, temveč dokaz dokazuje." (Wittgenstein, 1967: II-42)

Ali se potem za konvencijo ne skrivajo tudi drugi pogoji, ki morajo biti izpolnjeni, da bi bil dokaz sprejemljiv? Na koncu je treba še povedati, da Wittgenstein sam priznava, da matematiko lahko razumemo na dva načina, ne samo kot konvencijo oziroma množico pravil (analogno šahovski igri):

> "Rad bi prikazal, kako to, da se nam matematika prikazuje enkrat kot naravna zgodovina kraljestva števil, drugič zopet kot zbirka pravil." (Wittgenstein, 1967: III-13)

Wittgenstein torej meni, da je matematika podobna, na primer, svetlobi, ki jo lahko obravnavamo na dva načina: kot delce in kot valovanje.

Dummett ponuja interpretacijo Wittgensteinove pozicije, po kateri je njegova doktrina "internalizem v polnem pomenu besede; težko bi jo imenovali interni *realizem*" (Dummett, 1993: 452). Wittgenstein, meni Dummett, zastopa idejo, da o tem, kar je resnično, ni mogoče razumljivo govoriti neodvisno od tega, kar mi prepoznavamo kot resnično. To pa pomeni, da ne obstaja sprejemljiv pojem resnice, ki se razlikuje o tistega pojma, po katerem je nekaj sprejeto kot resnično. Dummett ne pove ničesar o ideji dihotomije matematike, ki jo omenja Wittgenstein. Ta ideja pa se v celoti ne vključuje v teorijo Wittgensteinovega "internalizma v polnem pomenu besede".

prevedel Borut Cerkovnik

Dummett on Wittgenstein's Philosophy of Mathematics

In his paper "Wittgenstein's philosophy of mathematics" Michael Dummett critically represents the main Wittgenstein theses both on philosophy of mathematics and mathematics itself. Dummett mainly concentrates on Wittgenstein's philosophy of mathematics from his "Remarks on the Foundation of Mathematics", in which an antirealist view is endorsed. According to Dummett, Wittgenstein's main reason for denying the objectivity of mathematical truth is his denial of the objectivity of proof in mathematics. According to Wittgenstein, we reject or accept a proof arbitrarily. Nevertheless, Wittgenstein sustains that mathematics appears to us both as a collection of rules and as the natural history of the domain of numbers. Dummett's interpretation doesn't include the latter thought.

Keywords: mathematical truth, proof, rule, convention.

Literatura

Dummett, M. (1999). "Wittgensteinova filozofija matematike". *Analiza*, 3/4, str. 82-98.

Dummett, M. (1993). *The Seas of Language.* Oxford: Clarendon Press.

Frascolla, P. (1994). *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics.* London: Routledge.

Putnam, H. (1995). *Words and Life.* London: Harvard University Press.

Ule, A. (1982). *Osnovna filozofska vprašanja sodobne logike.* Ljubljana: Cankarjeva založba.

Ule, A. (1990). *Filozofija Ludwiga Wittgensteina: od Traktata do Filozofskih raziskav.* Ljubljana: Znanstveni inštitut Filozofske fakultete.

Wittgenstein, L. (1976). *Logično filozofski Traktat.* Ljubljana: Mladinska knjiga.

Wittgenstein, L. (1967). *Remarks on the Foundations of Mathematics.* Oxford: Blackwell.