SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Marijan Polić

Reprezentacije nekih podalgebri verteks-algebre $W_{1+\infty}$

Disertacija

Voditelji rada: prof. dr. sc. Dražen Adamović, prof. dr. sc. Ozren Perše

Zagreb, 2015.

UNIVERSITY OF ZAGREB
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Marijan Polić

Representations of certain subalgebras of the vertex algebra $W_{1+\infty}$

PhD thesis

Thesis advisors: prof. dr. sc. Dražen Adamović, prof. dr. sc. Ozren Perše

Zagreb, 2015.

Ova disertacija je predana na ocjenu Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilista u Zagrebu u svrhu stjecanja znanstvenog stupnja doktora prirodnih znanosti iz područja matematike.

Zahvaljujem svojim mentorima, prof. dr. sc. Draženu Adamoviću i prof. dr. sc. Ozrenu Peršeu, na savjetima i strpljenju.

Također zahvaljujem majci Anđelini, ocu Živku i zaručnici Jeleni na stalnoj podršci.

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

U ovoj disertaciji proučavat ćemo verteks-algebre koje su pridružene nekim važnim beskonačno–dimenzionalnim Liejevim algebrama. Posebno ćemo gledati verteks-algebru $W_{1+\infty}$ i njenu podalgebru W_∞.

Verteks-algebra $W_{1+\infty}$ je važna verteks algebra koju su intenzivno proučavali mnogi istraživači iz područja teorije reprezentacija Liejevih algebri, verteks-algebri i matematičke fizike.

Ova verteks-algebra prirodno je pridružena teoriji dvije važne beskonačno dimenzionalne Liejeve algebre. Prva je Liejeva algebra $\widehat{\mathcal{D}}$ dobivena kao centralno proširenje Liejeve algebre diferencijalnih operatora na kružnici. Druga je Liejeva algebra $\widehat{\mathfrak{gl}}$ koja je centralno proširenje Liejeve algebre beskonačnih matrica s konačno mnogo ne-nul dijagonala. Sa stanovišta Liejevih algebri, važan napredak načinjen je u članku V. Kaca i A. Radula ([25]), dok je teorija reprezentacija pridruženih verteks-algebri i fermionske realizacije inicirana u članku E. Frenkela, V. Kaca, A. Radula i W. Wanga. Bozonske realizacije proučavane su u člancima V. Kaca, A. Radula ([26]); W. Wanga ([35]), D. Adamovića ([3]). Klasifikacija ireducibilnih reprezentacija u slučaju modula pozitivnog cjelobrojnog centralnog naboja dobivena je u članku E. Frenkela, V. Kaca, A. Radula i W. Wanga, ([19]); dok je u slučaju negativnog centralnog naboja poznata samo u slučaju $c = -1$ i to na temelju članka W. Wanga ([36]).

Klasifikacija ireducibilih modula nije poznata za ostale negativne centralne naboje. No važan korak u strukturnoj teoriji ovih verteks-algebri napravljen je u članku A. Linshawa ([33]), gdje je određen minimalan skup generatora te algebre. Važno je napomenuti da Linshaw koristi beskonočno–dimenzionalne analogone Weylovih teorema iz teorije invarijanti. Daljnja generalizacija tih rezultata prezentirana je u člancima T. Creutziga i A. Linshawa ([13], [14]).

Treba spomenuti da je Wangov članak ([36]) važan i za verteks-algebre pridružene logaritamskim konformnim teorijama polja i generaliziran je u nekim smjerovima u člancima D. Adamovića ([4]) i D. Adamović, A. Milas ([5], [6]). Verteks-podalgebre od $W_{1+\infty}$ su također važni primjeri verteks-algebri. Proučavane su člancima V. G. Kac; W. Wang, C. H. Yan ([27]) ; V. Kac i A. Liberati ([28]).

U disertaciji proučavamo univerzalne verteks-algebre $W_{1+\infty}$ i W_∞ koje su realizirane na reprezentacijama najveće težine Liejeve algebre $\widehat{\mathcal{D}}$. Primjenjujemo teoriju modula najveće težine i teoriju kvazi-konačnih reprezentacija koje su razvijene u članku V. Kaca i A. Radula ([25]). Taj članak također sadrži objašnjenje veze između modula Liejeve algebre $\widehat{\mathfrak{gl}}$ i $\widehat{\mathcal{D}}$. U članku je konstruiran važan homomorfizam Liejevih algebri pomoću kojeg singularne vektore u kvazikonačnim modulima najveće težine za $\widehat{\mathfrak{gl}}$ možemo tretirati kao singularne vektore u modulima najveće težine za $\widehat{\mathcal{D}}$. Navedeni su neki primjeri za konstrukciju singularnih vektora na pozitivnim cjelobrojnim nabojima.

Stukturu verteks-algebre konstruirat ćemo koristeći teoriju lokalnih polja za verteks-algebre. Navedimo da je ova teorija precizno opisana u monografijama V. G. Kaca ([23]), E. Frenkela i D. Ben Zvia ([20]) te J. Lepowskog i H. Lia ([29]). Poseban naglasak bit će na univerzalnim verteks-algebrama za $W_{1+\infty}$ i W_∞, koje nisu proste, te sadrže netrivijalne ideale. Ideale u ovim verteks-algebrama konstruirat ćemo pomoću singularnih vektora za Liejeve algebre $\widehat{\mathcal{D}}$ i $\widehat{\mathfrak{gl}}$. U slučaju verteks-algebre W_∞ za centralne naboje $c \in \mathbb{Z}$, male po apsolutnoj vrijednosti, singularne vektore konstruiramo eksplicitno u Poincaré–Birkhoff–Wittovoj (PBW) bazi. Ovi računi koriste sustave algebarskih jednadžbi i neka programska rješenja. Zatim proučavamo kvocijente univerzalne verteks-algebre za W_∞ po idealima generiranim singularnim vektorima. Odredit ćemo minimalan skup generatora tih kvocijenata. Za razliku od pristupa A. Linshawa, naši dokazi u potpunosti koriste teoriju singularnih vektora i relacije koje slijede iz tih singularnih vektora.

U nekim slučajevima, pokazujemo da se ti kvocijenti mogu identificirati s podalgebrama afinih verteks algebri realiziranim kao koset podalgebre (vidi Poglavlje 10). Prema tome neke naše verteks-algebre su zapravo parafermionske verteks-algebre čija teorija reprezentacija je vrlo zanimljiva. Strukturna teorija tih verteks-algebri pridruženih integrabilnim reprezentacijama afinih verteks-algebri proučavana je u člancima T. Arakawa, C. Donga, C. H. Lam, Q. Wang, H. Yamade ([17], [10]). Rezultati ove disertacije pokazuju da su te koset verteks-algebre pridružene ne–integrabilnim reprezentacijama vrlo zanimljive i povezane s algebrom $\mathcal{W}_\infty$.

Treba napomenuti da se slična realizacija nekih koset podalgebri pridruženih afinim verteks–algebrama negativnog nivoa javila u članku D. Adamović, O. Perše ([8]). Mi planiramo proširiti ove rezultate u nekim smjerovima u članku ([1]).

Jedan od najvažnijih rezultata u ovoj disertaciji predstavlja proučavanje eksplicitne fermionske realizacije verteks-algebre W_∞. Ova realizacija daje smještenje proste verteks algebre W_∞ kao podalgebre verteks-superalgebre pridružene simplektičkim fermionima. Simplektički fermioni će se promatrati pomoću teorije dualnih parova. Konstruiramo eksplicitno singularne vektore iz čije egzistencije slijedi eksplicitna dekompoziciju Fockovog prostora. Ovi rezultati iz disertacije predstavljaju generalizaciju rezultata i metoda iz članka V. Kac, W. Wang, C. Yan, ([27]).

Slijedi kratak sadržaj rada s prikazom osnovnih rezultata.

U drugom poglavlju navodimo standardne definicije i konstrukcije iz teorije verteks algebri. Ponavljamo definicije verteks algebre i algebre verteks operatora te standardne algebarske koncepte pridružene tim dvjema strukturama: homomorfizam, izomorfizam, podalgebru, podalgebru generiranu podskupom, ideal i slične. U točki 2.2 navodimo definiciju modula za verteks algebru (odnosno za algebru verteks operatora). Također navodimo definiciju operatora ispreplitanja i pravila fuzije, konstrukcije koja generalizira pojam tenzorskog produkta modula.

U točki 2.4 navodimo Teorem o generirajućim poljima, standardan alat za konstrukciju primjera verteks algebri. Nama će trebati za konstrukciju verteks algebri $W_{1+\infty}$ i W_∞ te verteks superalgebre $\mathcal{F}^{\otimes l}$. Ideja je odrediti kada se skup slabih verteks operatora, formalnih redova potencija oblika

$$a(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^{-n-1}$$

može interpretirati kao slika operatora $Y(\,.\,,x)$ za neku verteks algebru. Pokazuje se da je (uz neke dodatne zahtjeve) dovoljan uvjet međusobna lokalnost slabih verteks operatora, tj. da za svaka dva (dana) slaba verteks operatora $a(x)$ i $b(x)$ postoji $k \in \mathbb{Z}_+$ takav da

$$(x_1 - x_2)^k [a(x_1), b(x_2)] = 0.$$

U točki 2.4 navodimo konstrukciju i osnovne rezultate o Zhuovoj algebri $A(V)$, asocijativnoj algebri pridruženoj verteks algebri V. Njen značaj proizlazi iz Zhuovog teorema (Teorem 2.32) koji uspostavlja bijektivnu vezu klasa ekvivalencije ireducibilnih modula za (asocijativnu algebru) $A(V)$ i klasa ekvivalencije ireducibilnih modula za (verteks–algebru) V.

U Poglavlju 3 ponavljamo definiciju Liejeve algebre diferencijalnih operatora na kružnici $\mathcal{D}$ slijedeći rezultate iz [25].

Promatramo graduirani vektorski prostor

$$\mathcal{D} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{J_m^k : m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\},$$

pri čemu su $J_m^k = -t^{k+m}\partial_t^k$ (diferencijalni operatori na kružnici u varijabli t), a težine zadane relacijama $\mathrm{wt}\, J_m^k = m$.

Uz komutator definiran formulom

$$[J_m^k, J_n^l] = \sum_{i=1}^{\max(k,l)} \left(\binom{l}{i} [k+m]_i - \binom{k}{i} [l+n]_i \right) J_{m+n}^{k+l-i},$$

pri čemu je $[x]_i = x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-i+1)$ (silazni produkt ili silazna potencija), $\mathcal{D}$ ima strukturu graduirane Liejeve algebre, gdje je $\mathrm{wt}\, J_m^k = m$.

Navodimo alternativnu bazu za $\mathcal{D}$, $\{L_m^k = -t^m (t\partial_t)^k = -t^m D^k\}$ u kojoj su elementi početne baze zapisani $J_m^k = -t^m [D]_k$ a komutator zadovoljava relaciju

$$[t^m f(D), t^n g(D)] = t^{m+n}(f(D+n)g(D) - f(D)g(D+m)).$$

Jedinstveno centralno proširenje $\widehat{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \oplus \mathbb{C}C$ Liejeve algebre $\mathcal{D}$ definirano je pomoću 2-kociklusa

$$\Psi(t^r f(D), t^s g(D)) = \begin{cases} \sum_{j=-r}^{-1} f(j)g(j+r), & r = -s \geq 0 \\ -\Psi(t^s g(D), t^r f(D)), & r = -s < 0 \\ 0, \quad \text{inače} & \end{cases}$$

Konstrukciju pratimo po članku [25], no valja reći da je ovaj 2-kociklus prvi put definiran u [24] a dokaz jedinstvenosti centralnog proširenja se može naći u [18] ili [31].

Zatim navodimo definiciju Vermaovog modula i u Propoziciji 3.6 konstruiramo paraboličku podalgebru od $\widehat{\mathcal{D}}$:

$$\mathcal{P} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{J_m^k : m + k \geq 0\},$$

$$\widehat{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \oplus \mathbb{C}C,$$

koja ce nam biti važna za teoriju verteks algebri.

Navodimo rezultate Kaca i Radula o klasifikaciji kvazikonacnih modula iz [25]. Navodimo definiciju algebre $\widehat{\mathfrak{gl}}$ i ponavljamo neke rezultate iz njene teorije reprezentacija. U Teoremu 3.11 diskutiramo vezu izmedju $\widehat{\mathcal{D}}$ i $\widehat{\mathfrak{gl}}$.

Preslikavanje $\Phi_0 : \widehat{\mathcal{D}} \to \widehat{\mathfrak{gl}}$ definirano formulom

$$\Phi_0(t^m f(D)) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} f(-j)E_{j-m,j}, \quad f \in \mathbb{C}[x]$$

je homomorfizam Liejevih algebri. Φ_0 se prirodno proširuje na homomorfizam

$$\Phi : \mathcal{D}^{\mathcal{O}} \to \widehat{\mathfrak{gl}},$$

pri čemu je

$$\mathcal{D}^{\mathcal{O}} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{t^m f(D) | f(x) \in \mathcal{O}\},$$

gdje je $\mathcal{O}$ skup holomorfnih funkcija. Φ je izomorfizam.

Homomorfizam Liejevih algebri $\widehat{\mathcal{D}}$ i $\widehat{\mathfrak{gl}}$ inducira strukturu $\widehat{\mathcal{D}}-$modula na $\widehat{\mathfrak{gl}}-$modulima, pa su ireducibilni $\widehat{\mathfrak{gl}}$-moduli ujedno i ireducibilni $\widehat{\mathcal{D}}$-moduli. Pomoću Propozicije 3.15 imamo eksplicitan rezultat za singularne vektore u određenom $\widehat{\mathfrak{gl}}$ modulu, pa koristeći homomorfizam Φ i Propoziciju 3.14 na primjeru rekonstrukcije singularnih vektora za $\widehat{\mathcal{D}}$ iz singularnih vektora za $\widehat{\mathfrak{gl}}$ ilustriramo vezu ireducibilnih modula za te dvije Liejeve algebre.

U Točki 3.4 korištenjem Teorema o generirajućim poljima (navedenog u drugom poglavlju) diskutiramo verteks-algebru $M_c^{W_{1+\infty}}$.

Teorem 3.17 [19] *$(M_c^{W_{1+\infty}}, Y, \mathbf{1}, \omega(\beta))$, pri čemu je $\mathbf{1} = 1 \otimes v_0$, $\omega(\beta) = (J^1_{-2} + \beta J^0_{-2})\mathbf{1}$, je algebra verteks operatora. Pri tome je jako generirana poljima $J^k(x)$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ uz*

$$Y(\cdot, x) : M_c^{W_{1+\infty}} \to (\mathrm{End}\, M_c^{W_{1+\infty}})[[x, x^{-1}]]$$

$$Y(J^k_{-k-1}\mathbf{1}, x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} J^k_m x^{-k-m-1} = J^k(x).$$

Potom eksplicitno određujemo Zhuovu algebru $A(M_1^{W_{1+\infty}})$:

Teorem 3.19 *$A(M_c^{W_{1+\infty}})$ je polinomijalna algebra u beskonačno varijabli, tj izomorfna sa $\mathbb{C}[x_0, x_1, ..., x_n, ...]$.*

Za $c = 1$ nalazimo parametrizaciju od $A(L_c^{W_{1+\infty}})$.

U Poglavlju 4 definiramo Liejevu algebru $\widehat{\mathcal{D}}^{(1)}$ i pokazujemo da je potprostor

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(1)} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{J^k_m : m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\} \oplus \mathbb{C}C$$

od $\widehat{\mathcal{D}}$ Liejeva podalgebra od $\widehat{\mathcal{D}}$(vidi **Propoziciju 4.1**).

Potom konstruiramo generalizirani Vermaov modul

$$M_{-2c}^{W_\infty} = \mathcal{U}(\widehat{\mathcal{D}}^{(1)}) \otimes_{\mathcal{U}(\widehat{\mathcal{D}}_0^{(1)} \oplus \widehat{\mathcal{P}}^{(1)})} \mathbb{C}v_0,$$

za koji ponovo pomoću Teorema o generirajućim poljima vidimo da ima strukturu algebre verteks operatora.

Teorem 4.5 *$(M_{-2c}^{W_\infty}, Y, \mathbf{1}, J_{-2}^1\mathbf{1})$ je algebra verteks operatora jako generirana poljima $J^k(x)$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ gdje je $\mathbf{1} = 1 \otimes v_0$ i*

$$Y(\cdot, x) : M_{-2c}^{W_\infty} \to (\mathrm{End} M_{-2c}^{W_\infty})[[x, x^{-1}]]$$

jedinstveno proširenje od

$$Y(J_{-k-1}^k \mathbf{1}, x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} J_m^k x^{-k-m-1} = J^k(x).$$

Ako izostavimo uvjet jako–generiranosti, vidimo da je ova verteks–algebra zapravo generirana samo s dva polja.

Propozicija 4.6 *Verteks algebra $M_{-2c}^{W_\infty}$ je generirana poljima $J^1(x)$ i $J^2(x)$, odnosno $M_{-2c}^{W_\infty} = \langle J_{-2}^1\mathbf{1}, J_{-3}^2\mathbf{1}\rangle$.*

U Poglavlju 5 računamo singularni vektor na nivou 4,

Teorem 5.1 *$M_{-2c}^{W_\infty}$ na nivou 4 ima singularan vektor*

$$v_s = (J_{-4}^3 - J_{-4}^2 + J_{-4}^1 - (J_{-2}^1)^2)\mathbf{1}$$

i to samo za $c = 1$. Na nivoima 2 i 3 nema singularnih vektora.

Definicijski uvjet $\widehat{\mathcal{D}}_+^{(1)} v_s = 0$ u sebi sadrži beskonačno mnogo jednadžbi koje v_s mora ispunjavati, ali nam očita činjenica $\widehat{\mathcal{D}}_{(m)}^{(1)} v_s = 0$, za $m \geq 3$ i Lema 5.2 reduciraju taj beskonačan sustav na konačan sustav linearnih jednadžbi.

Lema 5.2 Neka je $v \in M_{\widehat{\mathcal{D}}^{(1)}}$ takav da $J_0^2 v = \alpha v$ i $J_m^k v = 0$ za neki $\alpha \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{Z}\ \{0\}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Tada je i $J_m^{k+1} v = 0$.

Pokazujemo da ideal generiran singularnim vektorom sadrži i vektor

$$\theta = (-22J_{-6}^1 + 9J_{-2}^1 J_{-4}^2 - 2J_{-2}^1 J_{-4}^1 - \frac{9}{2}(J_{-3}^2)^2 - 9J_{-3}^1 J_{-3}^2 + 8(J_{-3}^1)^2 + 4(J_{-2}^1)^3)\mathbf{1},$$

Koji će nam biti koristan u uspostavljanju veze sa $W_{2,3}$ verteks algebrom.

Također određujemo minimalan skup generatora za $\bar{L}_{-2}^{W_\infty} = M_{-2}^{W_\infty}/\langle v_s\rangle$, inače poznat rezultat ali ovdje pokazan direktno iz singularnog vektora.

Teorem 5.6 *Kvocijentna verteks algebra $\bar{L}_{-2}^{W_\infty}$ je jako generirana poljima $J^1(x)$ i $J^2(x)$.*

U Poglavlju 6 ukratko ponavljamo definiciju $W_{2,3}$ verteks algebre, te uspostavljamo vezu između $W_{2,3}$ sa centralnim nabojem $c = -2$ i $M_{-2}^{W_\infty}$ u Teoremima 6.4 i 6.6.

Pokazujemo da je preslikavanje $\Phi : \mathcal{W}_{2,3} \to \bar{L}_{-2}^{W_\infty}$ definirano sa

$$L(n) \mapsto J_n^1, \quad W(n) \mapsto \sqrt{\frac{2}{3}}(J_n^2 + \frac{n+2}{2}J_n^1),$$

odnosno

$$L(z) \mapsto J^1(z), \quad W(z) \mapsto \sqrt{\frac{2}{3}}(J^2(z) - \frac{1}{2}DJ^1(z))$$

je homomorfizam verteks algebri.

$\bar{L}_{\mathcal{W}_{2,3}} = \mathcal{W}_{2,3}/\langle v_s, v_s' \rangle$ je izomorfna sa $\bar{L}_{-2}^{W_\infty}$.

U Poglavlju 7, preciznije Teoremu 7.1 opisujemo singularne vektore do nivoa 10. Za te rezultate koristimo Lemu 5.2 i neka programska rješenja, budući da broj nepoznanica na sve većim nivoima jako brzo raste (na nivou 10 imamo 88 monoma u PBW bazi).

Zatim iz singularnih vektora na nivou 6, odnosno za centralne naboje $c = 2$, $c = -4$, analogno Teoremu 5.6, određujemo minimalan skup generatora verteks algebre $\bar{L}_{-2c}^{W_\infty}$:

Teorem 7.2 *$\bar{L}_{-2c}^{W_\infty} = M_{-2c}^{W_\infty}/\langle v_s \rangle$ je jako generirana poljima $J^1(z)$, $J^2(z)$, $J^3(z)$ i $J^4(z)$, za $c \in \{-1, 2\}$.*

U Poglavlju 8 opisujemo primarne vektore. To poglavlje je posebno značajno za vezu s parafermionskim verteks algebrama i Poglavljem 10.

Poglavlje 9 je centralni dio disertacije. Ponavljamo rezultate iz [19], [26] o konstrukcijama verteks algebri $\mathcal{W}_{1+\infty}$ pomoću fermionskih polja i Cliffordove algebre. Cilj nam je proširiti ove rezultate za verteks algebru $\mathcal{W}_\infty$. Ideja je pomoću principa dualnih parova dekomponirati pogodan ekvivarijantan modul na izotipske komponente.

U Točki 9.2. ponavljamo rezultate o konačnodimenzionalnim reprezentacijama Liejeve grupe $GL(l, \mathbb{C})$ i Liejeve algebre $\mathfrak{gl}(l)$. U Točki 9.3. ponavljamo rezultate o dekompoziciji verteks superalgebre $\mathcal{F}^{\otimes l}$ iz [37]. Sama dekompozicija dobije se primjenom Teorema 9.1 na dualni par $(\mathfrak{gl}(l), \widehat{\mathfrak{gl}})$ za vektorski prostor $\mathcal{F}^{\otimes l}$. Potom se pomoću homomorfizma $\Phi : \widehat{\mathcal{D}} \to \widehat{\mathfrak{gl}}$ pokazuje da je ireducibilna komponenta za trivijalnu težinu upravo $\bar{L}_c^{W_{1+\infty}}$.

U Točki 9.5 navodimo definiciju simplektičkog fermiona kao verteks superalgebre $\bar{\mathcal{F}}^{\otimes l}$ i ponavljamo rezultat Abea o grupi automorfizama simplektičkih fermiona.

Teorem 9.8 [2] Grupa automorfizama $\mathrm{Aut}\,\overline{\mathcal{F}}^{\otimes l}$ je izomorfna simplektičkoj grupi $Sp(2l, \mathbb{C})$, koja prirodno djeluje na simplektički prostor razapet sa $\{b_i(-1)|0\rangle, c_i(-1)|0\rangle\}$, odnosno

$$\mathrm{Aut}(\bar{\mathcal{F}}^{\otimes l}) \simeq Sp(2l, \mathbb{C}).$$

Budući da je $GL(l, \mathbb{C})$ podgrupa od grupe automorfizama, to možemo promatrati djelovanje $GL(l, \mathbb{C})$ na simplektičkim fermionima.

Teorem 9.15

$$(\bar{\mathcal{F}}^{\otimes l})^{GL(l,\mathbb{C})} \simeq L_{-2c}^{W_\infty}.$$

Koristeći rezultat o generatorima asocijativne algebre $A^{GL(l,\mathbb{C})}$ mi dokazujemo da je $(\bar{\mathcal{F}}^{\otimes l})^{GL(l,\mathbb{C})}$ ireducibilan modul za $\widehat{\mathfrak{gl}}_o$, što nam primjenom izomorfizma $\bar{\Phi}$ daje da je ireducibilan modul za $\mathcal{W}_\infty$.

U **Teoremu 9.18** dajemo potpunu dekompoziciju simplektičkih fermiona kao $\mathcal{W}_\infty$-modula:

Za težinu $\lambda \in \Sigma$ parametriziranu cjelobrojnim l-torkama $(m_1, \ldots, m_l)$ takvim da

$$m_1 \geq m_2 \geq \ldots m_{i_0} > m_{i_0+1} = 0 = \ldots m_{j_0-1} > m_{j_0} \geq \ldots m_l$$

singularni vektor je dan formulom

$$v_\lambda = \widetilde{\Xi}_1^{+,m_1} \ldots \widetilde{\Xi}_{i_0}^{+,m_{i_0}} \widetilde{\Xi}_{j_0}^{-,-m_{j_0}} \ldots \widetilde{\Xi}_l^{-,-m_l} |0\rangle.$$

Težine za $\widehat{\mathfrak{gl}}_o$ su dane relacijom

$$\widetilde{E}_{i,i} v_\lambda = -|i| k_i v_\lambda,$$

gdje je k_i broj m_p-ova većih ili jednakih i, za $i > 0$, odnosno broj m_p-ova manjih ili jednakih i, za $i < 0$. Tada vrijedi i dekompozicija

$$\overline{\mathcal{F}}^{\otimes l} = \bigoplus_{\lambda \in \Sigma} L(\lambda, GL(l, \mathbb{C})) \otimes L(\Lambda_o(\lambda), \widehat{\mathfrak{gl}}_o, l),$$

gdje je $L(\lambda, GL(l, \mathbb{C}))$ ireducibilan $GL(l, \mathbb{C})-$modul najmanje težine λ a $L(\Lambda_o(\lambda), \widehat{\mathfrak{gl}}_o, l)$ ireducibilan $\widehat{\mathfrak{gl}}_o$-modul najveće težine $\Lambda_o(\lambda)$.

Ovi naši rezultati mogu se shvatiti kao eksplicitna realizacija prostih verteks algebri $\mathcal{W}_\infty$ i u budućem radu planiramo proučavati kombinatorne posljedice tih rezultata.

Konačno, u poglavlju 10 u Teoremu 10.3 uspostavljamo vezu s parafermionskim algebrama. Dokazujemo egzistenciju izomorfizma:

$$K(sl_2, -1) \cong L_{-4}^{\mathcal{W}_\infty},$$

gdje $K(sl_2, k)$ označava parafermionsku verteks–algebru nivoa k. Ovaj rezultat pokazuje da se parafermionska verteks algebra može u slučaju $k = -1$ shvatiti kao verteks algebra pridružena Liejevoj algebri $\widehat{\mathcal{D}}^{(1)}$.

Poglavlje 2

Verteks algebre i algebre verteks operatora

U ovom poglavlju definiramo osnovne strukture, verteks algebru i algebru verteks operatora. Zatim definiramo standardne algebarske koncepte (homomorfizam, izomorfizam, podalgebru, podalgebru generiranu podskupom, ideal, kvocijentnu strukturu) u kontekstu verteks algebri i algebri verteks operatora. Uglavnom pratimo izlaganje iz [29], no korisna referenca su i monografije [20] i [23].

2.1 Formalni račun

Neka su x, x_0, x_1,... međusobno komutirajuće formalne varijable. Za vektorski prostor V definiramo

$$V\{x\} = \{\sum_{n\in\mathbb{C}} v_n x^n |\, v_n \in V\},\;\; V[[x, x^{-1}]] = \{\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n x^n |\, v_n \in V\},$$

$$V[x] = \{\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n x^n |\, v_n \in V,\, v_n = 0 \text{ za dovoljno velik } n\}$$

$$V[x, x^{-1}] = \{\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n x^n |\, v_n \in V,\, v_n = 0 \text{ osim za konačno mnogo } n\}$$

$$V[[x]] = \{\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n x^n |\, v_n \in V\}$$

$$V((x)) = \{\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n x^n |\, v_n \in V, \text{ postoji } N \in \mathbb{Z} \text{ takav da } v_n = 0 \text{ za sve } n \leq N\}.$$

Za $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n x^n \in V[[x]]$, definiramo formalnu derivaciju s

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n v_n x^{n-1},$$

te formalni reziduum

$$\mathrm{Res}_x f(x) = v_{-1} \in \mathrm{End}\, V.$$

Formalna $\delta-$funkcija je formalni red

$$\delta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x^n \in \mathbb{C}[[x, x^{-1}]].$$

Propozicija 2.1. [29], Proposition 2.3.6 *Za prirodan broj n vrijedi*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^n x_2^{-1}\delta\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = (-1)^n \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^n x_2^{-1}\delta\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$

Propozicija 2.2. [29], Proposition 2.3.7 *Za prirodne brojeve m i n vrijedi*

$$(x_1 - x_2)^m \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^n x_2^{-1}\delta\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \begin{cases} \frac{(-1)^m n!}{(n-m)!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{n-m} x_2^{-1}\delta\left(\frac{x_1}{x_2}\right), & m \leq n \\ 0, \quad m > n \end{cases}$$

Definicija 2.3. *Verteks algebra je uređena trojka $(V, Y, \mathbf{1})$, gdje je V vektorski prostor, $\mathbf{1} \in V$ istaknuti vektor (vakuum vektor) i linearno preslikavanje iz V u prostor Laurentovih formalnih redova*

$$Y(\,.\,, x) : V \to (\mathrm{End}\ V)[[x, x^{-1}]]$$

$$a \mapsto Y(a, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x^{-n-1}$$

tako da su sljedeći uvjeti ispunjeni

1. *Za sve $a, b \in V$ postoji $n_0 \in \mathbb{Z}$ takav da $a_n b = 0$ za $n > n_0$.*

2. *(svojstvo kreacije) Za $a \in V$ vrijedi $\lim_{x \to 0} Y(a, x)\mathbf{1} = a$. Drugim riječima, članovi od $Y(a, x)\mathbf{1}$ pridruženi negativnim potencijama su 0 i slobodni koeficijent $a_{-1}\mathbf{1}$ je a. Svojstvo kreacije ima za posljedicu injektivnu korespodenciju između skupa stanja (vektorskog prostora V) i $ImY \subset (\mathrm{End}\ V)[[x, x^{-1}]]$.*

3. *(svojstvo vakuuma) $Y(\mathbf{1}, x) = Id_V$, identiteta na V.*

4. *(svojstvo derivacije) Postoji preslikavanje $D \in \mathrm{End}\ V$ takvo da vrijedi $D\mathbf{1} = 0$, $[D, Y(a, x)] = \frac{d}{dx}{}_x Y(a, x) = Y(Da, x)$, za sve $a \in V$. Iz ovog uvjeta direktno slijedi $Da = a_{-2}\mathbf{1}$.*

5. *(lokalnost ili slaba komutativnost)*

   Za svaka dva $a, b \in V$ postoji $N \in \mathbb{Z}_+$ takav da

   $$(x_1 - x_2)^N [Y(a, x_1), Y(b, x_2)] = 0.$$

Propozicija 2.4. ([29], Theorem 3.5.1) *U verteks algebri $(V, Y, \mathbf{1})$ vrijedi Jacobijev identitet,*

$$x_0^{-1}\delta\left(\frac{x_1 - x_2}{x_0}\right) Y(u, x_1)Y(v, x_2) - x_0^{-1}\delta\left(\frac{x_2 - x_1}{-x_0}\right) Y(v, x_2)Y(u, x_1)$$

$$= x_2^{-1}\delta\left(\frac{x_1 - x_0}{x_2}\right) Y(Y(u, x_0)v, x_2),$$

pri čemu je $\delta(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x^n$ delta funkcija.

Značaj Jacobijeva identiteta je višestruk. Kao aksiom, može zamijeniti svojstvo derivacije i lokalnost u definiciji verteks algebre (detaljno razmatranje o međusobno ekvivalentnim karakterizacijama verteks algebre nalazi se u [29]).

S druge strane, u Jacobijevom identitetu je zapisan beskonačan skup operatorskih identiteta u End V. Usporedba koeficijenata uz monom

$$x_0^{-l-1}x_1^{-m-1}x_2^{-n-1}$$

daje Borcherdsovu relaciju iz [12]

$$\sum_{i\geq 0}(-1)^i\binom{l}{i}(u_{m+l-i}v_{n+i}-(-1)^l v_{n+l-i}u_{m+i})=\sum_{i\geq 0}\binom{m}{i}(u_{l+i}v)_{m+n-i}.$$

Često se postavljaju dodatni zahtjevi, vezani za graduaciju.

Definicija 2.5. *Za graduirani vektorski prostor $V=\coprod_{n\in\mathbb{Z}}V_{(n)}$ kažemo da je*

1. kvazikonačan *ako* $\dim V_{(n)}<\infty$, *za sve* $n\in\mathbb{Z}$,
2. restringiran *ako postoji indeks* $n_0<0$ *takav da* $V_{(n)}=0$, *za sve* $n<n_0$.

Definicija 2.6. *[29], Def 3.1.22.* Algebra verteks operatora *je uređena četvorka* $(V,Y,\mathbf{1},\omega)$ *pri čemu je* $(V,Y,\mathbf{1})$ *verteks algebra,* $V=\coprod_{n\in\mathbb{Z}}V_{(n)}$ *graduiran kvazikonačan i restringiran vektorski prostor, te postoji istaknuti vektor* $\omega\in V_{(2)}$ *takav da*

(1)

$$Y(\omega,x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\omega_n x^{-n-1}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}L(n)x^{-n-2}$$

pri čemu operatori $L(n)$ *čine bazu Virasorove algebre, tj zadovoljavju relaciju*

$$[L(m),L(n)]=(m-n)L_{m+n}+\delta_{m,-n}\frac{m^3-m}{12}c_V,$$

pri čemu $c_V\in\mathbb{C}$ *zovemo centralni naboj ili rang od* V.

(2) $L(-1)=D$, *odnosno* $L(-1)v=v_{-2}\mathbf{1}$ *za* $v\in V$,

(3) $L(0)|_{V_{(n)}}=n\,Id_{V_{(n)}}$, *odnosno* $L(0)$ *djeluje poluprosto na* V. *Za* $a\in V_{(n)}$ *pišemo* $\mathrm{wt}\,a=n$.

U literaturi je poznata sljedeća karakterizacija algebre verteks operatora u kojoj se se vidi da beskonačan skup relacija za $[L(m),L(n)]$ možemo zamjeniti sa konačno mnogo netrivijalnih relacija. Kod $W_{2,3}$-verteks algebri ćemo generalizirati taj princip.

Propozicija 2.7. *Uređena četvorka* $(V,Y,\mathbf{1},\omega)$ *je algebra verteks operatora ako i samo ako je* $(V,Y,\mathbf{1})$ *verteks algebra,* $V=\coprod_{n\in\mathbb{Z}}V_{(n)}$ *graduiran kvazikonačan i restringiran vektorski prostor te postoji istaknuti vektor* $\omega\in V_{(2)}$ *takav da*

$$\omega_0\omega=D\omega,$$

$$\omega_1\omega=2\omega,$$

$$\omega_2\omega=0,$$

$$\omega_3\omega=\frac{1}{2}c_V\mathbf{1},$$

$$\omega_n\omega=0,\ n\geq 4.$$

Dokaz. Iz komutacijskih relacija za Virasorovu algebru se lako vidi da algebra verteks operatora mora zadovoljavati ove relacije. Pretpostavimo da imamo verteks algebru koja ispunjava uvjete propozicije. Uvrštavanjem u Borcherdsovu relaciju $u = v = \omega$, $l = 0$, $m \leftrightarrow m+1$, $n \leftrightarrow n+1$ dobije se

$$[L(m), L(n)] = [\omega_{m+1}, \omega_{n+1}] = \sum_{i \geq 0} \binom{m+1}{i} (\omega_i \omega)_{m+n+2-i} =$$

$$(\omega_0 \omega)_{m+n+2} + (m+1)(\omega_1 \omega)_{m+n+1} + \binom{m+1}{3} (\omega_3 \omega)_{m+n-1} =$$

$$(D\omega)_{m+n+2} + 2(m+1)(\omega)_{m+n+1} + \frac{(m^3 - m)c_V}{6} (\mathbf{1})_{m+n-1} =$$

$$-(m+n+2)\omega_{m+n+1} + 2(m+1)\omega_{m+n+1} + \frac{(m^3 - m)c_V}{6} \delta_{m,-n} =$$

$$(m-n)L(m+n) + \frac{(m^3 - m)c_V}{6} \delta_{m,-n}$$

□

Definicija 2.8. *Neka su* $(V_1, Y_1, \mathbf{1})$ *i* $(V_2, Y_2, \mathbf{1})$ *verteks algebre. Homomorfizam verteks algebri je linearno preslikavanje* $f : V_1 \to V_2$ *takvo da*

$$f(Y_1(u, x)v) = Y_2(f(u), x)f(v) \ \forall u, v \in V_1$$

odnosno

$$f(u_n v) = f(u)_n f(v), \ \forall u, v \in V_1 \,, n \in \mathbb{Z},$$

te

$$f(\mathbf{1}) = \mathbf{1}.$$

Homomorfizam algebri verteks operatora $(V_1, Y_1, \mathbf{1}, \omega^1)$ *i* $(V_2, Y_2, \mathbf{1}, \omega^2)$ *je homomorfizam verteks algebri* $f : V_1 \to V_2$ *uz dodatni zahtjev na konformne vektore*

$$f(\omega^1) = \omega^2 \textit{ odnosno } fL^1(n) = L^2(n)f.$$

Zbog $fL^1(0) = L^2(0)f$ vidimo da f čuva graduaciju, a zbog $L^i(2)L^i(-2) = \frac{1}{2}c_{V^i}\mathbf{1}$ za $i = 1, 2$ vidimo da centralni naboji moraju biti jednaki.

Definicija 2.9. *Podalgebra verteks algebre* $(V, Y, \mathbf{1})$ *je vektorski potprostor* U *od* V *takav da* $\mathbf{1} \in U$ *i da je* $(U, Y, \mathbf{1})$ *verteks algebra.*

Drugim riječima, U mora sadržavati vakuum vektor i biti zatvoren na operaciju u verteks algebri, odnosno $Y(u, x)v \in U((x))$ za $u, v \in U$, tj. $u_n v \in U$ za $u, v \in U$. Analogan koncept za algebre verteks operatora mora voditi računa i o konformnom vektoru.

Definicija 2.10. *Neka je* $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$ *algebra verteks operatora. Podalgebra verteks operatora od* V *je vektorski potprostor* U *takav da* $\mathbf{1}, \omega \in U$ *i* $(U, Y, \mathbf{1}, \omega)$ *je algebra verteks operatora.*

Ekvivalentno, podalgebra verteks operatora je verteks podalgebra koja sadrži (isti) konformni vektor ω.

Potreban nam je i koncept algebarske podstrukture generirane podskupom (kao naprimjer podgrupa, podalgebra asocijativne ili Liejeve algebre).

Definicija 2.11. *Neka je $S \subset V$. Verteks podalgebra generirana skupom S (oznaka $\langle S \rangle$) je najmanja verteks podalgebra od V koja sadrži V. Drugim riječima $\langle S \rangle$ je presjek svih verteks podalgebri od V koje sadrže S.*

Naprimjer, za prazan skup, $\langle \emptyset \rangle = \mathbb{C}\mathbf{1}$.

Propozicija 2.12. *Za podskup S verteks algebre V vrijedi*

$$\langle S \rangle = \mathrm{span}\{u^{(1)}_{n_1} ... u^{(r)}_{n_r}\mathbf{1} \,|\, r \in \mathbb{N}, u^{(1)}, ..., u^{(r)} \in S, n_1, ..., n_r \in \mathbb{Z}\}.$$

Definicija 2.13. *Neka je S skup generatora verteks algebre V. Ako vrijedi*

$$V = \mathrm{span}\{u^{(1)}_{n_1} ... u^{(r)}_{n_r}\mathbf{1} \,|\, r \in \mathbb{N}, u^{(1)}, ..., u^{(r)} \in S, n_1, ..., n_r \in \mathbb{Z}_{<0}\},$$

kažemo da je V **jako generirana skupom** *S.*

Analogno se definira podalgebra *algebre verteks operatora* generirana skupom S kao najmanja podalgebra verteks operatora koja sadrži S. Lako se vidi da je to upravo verteks podalgebra $\langle S \cup \{\omega\} \rangle$.

Ideal je koncept poznat iz teorije asocijativnih algebri i Liejevih algebri, potreban za proučavanje kvocijentnih struktura. Ima ga smisla definirati u kontekstu verteks algebri.

Definicija 2.14. Ideal *u verteks algebri V je potprostor I takav da za sve $v \in V$, $w \in I$*

$$Y(v, x)w \in I((x)), \; Y(w, x)v \in I((x)),$$

odnosno $v_n w$, $w_n v \in I$ za $v \in V$, $w \in I$.

Očito su V i 0 ideali u V. Ako su $V \neq 0$ jedina dva ideala u V kažemo da je verteks algebra V *prosta*. Pokazuje se da je svaki ideal u verteks–algebri V i dvostrani ideal.

Također, uočimo da ukoliko je V algebra verteks operatora, vrijedi $D = L(-1) = \omega_0$ i $L(-1)v = v_{-2}\mathbf{1}$, iz čega slijedi uvjet $DI \subset I$. Dakle u algebri verteks operatora svaki lijevi ideal je i (obostrani) ideal.

Sad možemo definirati kvocijentnu strukturu.

Propozicija 2.15. [21] *Neka je I ideal u verteks algebri V. Tada je $(V/I, Y_{V/I}, \mathbf{1} + I)$ verteks algebra, uz*

$$(u + I)_n(v + I) = u_n v + I,$$

za $u, v \in V$, $n \in \mathbb{Z}$. Dobivenu strukturu nazivamo kvocijentna verteks algebra.

2.2 Moduli za verteks-algebre i operatori isprepletanja

U ovoj točki ponavljamo definiciju *modula* za verteks algebru (odnosno algebru verteks operatora) te definiciju operatora isprepletanja. Kod klasičnih algebarskih struktura (naprimjer Liejevih algebri ili asocijativnih algebri), modul za strukturu i reprezentacija te strukture su ekvivalentni koncepti. Kod verteks algebri je ta veza suptilnija. Naime reprezentacija verteks algebre je znatno složeniji koncept od reprezentacije neke klasične strukture. Za detaljniju ekspoziciju pogledati u monografiji [29].

Definicija 2.16. *Neka je* $V = (V, Y, \mathbf{1})$ *verteks algebra.* V*-modulom nazivamo uređeni par* (W, Y_W)*, pri čemu je* W *vektorski prostor sa linearnim preslikavanjem*

$$Y_W(\cdot\,, x) : V \to (\text{End } W)[[x, x^{-1}]]$$

$$v \mapsto Y_W(v, x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n x^{-n-1},$$

takvim da za sve u*,* $v \in V$ *i* $w \in W$

$$u_n w = 0 \text{ za dovoljno veliki } n,$$

ili, ekvivalentno

$$Y_W(u, x)w \in W((x));$$

$$Y_W(\mathbf{1}, x) = \text{Id}_W;$$

$$x_0^{-1}\delta\left(\frac{x_1 - x_2}{x_0}\right) Y_W(u, x_1)Y_W(v, x_2) - x_0^{-1}\delta\left(\frac{x_2 - x_1}{-x_0}\right) Y_W(v, x_2)Y_W(u, x_1)$$

$$= x_2^{-1}\delta\left(\frac{x_1 - x_0}{x_2}\right) Y_W(Y(u, x_0)v, x_2)$$

(Jacobijev identitet).

Vidimo da su aksiomi modula za verteks algebru analogni odgovarajućim aksiomima verteks algebre. Jedini koji nema pandana je aksiom kreacije, logično jer je $Y_W(v, x)\mathbf{1} \in W$ a $v \in V$.

Verteks algebra V je očito V-modul i naziva se *adjungirani modul*, kao u teoriji Liejevih algebri.

Svojstvo derivacije vrijedi ali uz ograničenja. Naime, vrijedi formula

$$Y_W(Dv, x) = \frac{d}{dx} Y_W(v, x), \ \ v \in V,$$

ali problem je u izrazu $[D, Y(v, x)]$. Naime, $D \in \text{End } V$ je kanonski definiran sa $Dv = v_{-2}\mathbf{1}$, ali nije jasno što bi bio $D \in \text{End}\, W$.

Definicija 2.17. V*-modul* (W, Y_W, d) *je uređena trojka takva da je* (W, Y_W) V*-modul,* $d \in \text{End}\, W$ *endomorfizam takav da za* $v \in V$

$$[d, Y_W(v, x)] = Y_W(Dv, x) = \frac{d}{dx} Y_W(v, x).$$

Ako je V algebra verteks operatora i (W, Y_W) modul za *verteks algebru* V, lako se vidi da baš $L(-1) = L_W(-1)$ ispunjava ulogu derivacije na W.

Definicija 2.18. *Vektorski prostor* W *je modul za* algebru verteks operatora V *ako je modul za verteks algebru* $(V, Y, \mathbf{1})$ *i ako vrijedi*

$$W = \bigsqcup_{h\in\mathbb{C}} W_{(h)},$$

pri čemu su $W_{(h)} = \{w \in W \,|\, L(0)w = hw\}$ *težinski potprostori, uz uvjete da su* $W_{(h)}$ *konačno dimenzionalni, te da postoji* $M \in \mathbb{R}$ *takav da* $W_{(h)} = 0$ *za* $\text{Re}\, h < M$.

Prirodno se definira pojam homomorfizma modula verteks algebre i modula za algebru verteks operatora.

Definicija 2.19. *Neka su (W_1, Y_1) i (W_2, Y_2) moduli za verteks algebru V.* Homomorfizam V-modula *je linearno preslikavanje $\psi : W_1 \to W_2$ takvo da*

$$\psi(Y_1(v,x)w) = Y_2(v,x)\psi(w) \text{ za } v \in V,\ w \in W_1$$

ili, zapisano u terminima komponenti

$$\psi(v_n^{(1)}w) = v_n^{(2)}\psi(w) \text{ za } v \in V,\ w \in W_1,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Prostor V-homomorfizama iz W_1 u W_2 označavamo sa $\mathrm{Hom}_V(W_1, W_2)$.

Ako je V algebra verteks operatora i (W_1, Y_1) i (W_2, Y_2) $V-$moduli, V-homomorfizam ψ je kompatibilan s graduacijama:

$$\psi((W_1)_{(h)}) \subset (W_2)_{(h)}.$$

Izomorfizam, endomorfizam i automorfizam se definiraju na standardan način. Algebra endomorfizama V-modula W se označava $\mathrm{End}_V(W)$.

Definicija 2.20. *Neka je W V-modul i neka je U potprostor od W. U je* podmodul *od W ako je $(U, Y_{|U})$ V-modul.*

Neka je T podskup od W. Najmanji podmodul koji sadrži T nazivamo podmodul generiran skupom T *i označavamo $\langle T \rangle$.*

Vrijedi analogon karakterizacije verteks podalgebre generirane skupom.

Propozicija 2.21. *Neka je W V-modul i $T \subset W$. Tada*

(1)
$$\langle T \rangle = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{v_{n_1}^{(1)} \dots v_{n_r}^{(r)}w \,|\, r \in \mathbb{N}, v^{(1)}, ..., v^{(r)} \in V, n_1, ..., n_r \in \mathbb{Z}, w \in T\},$$

(2)
$$\langle T \rangle = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{v_n w \,|\, v \in V, w \in T, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Drugi dio propozicije ustvari kaže da se kompozicija verteks operatora u podmodulu može zapisati kao linearna kombinacija verteks operatora iz tog podmodula.

Koncept operatora ispreplitanja i pravila fuzije je generalizacija pojma tenzorskog produkta modula ([21], [30]).

Definicija 2.22. *Neka su M^1, M^2, M^3 tri V-modula.* Operator ispreplitanja *tipa* $\binom{M^3}{M^1, M^2}$ *je linearno preslikavanje*

$$I(\cdot, x) : M^1 \to (\mathrm{Hom}(M^2, M^3))\{x\},$$

$$u \mapsto I(u,x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{C}} u_\alpha x^{-\alpha-1}$$

koji ispunjava sljedeće uvjete

(i1) Za svaki $u \in M^1$, $v \in M^2$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $u_{\alpha+n}v = 0$ za $n \in \mathbb{Z}$ dovoljno velik.

(i2) $I(L(-1)u, x)v = \frac{d}{dx}I(u,x)v$ za $u \in M^1$, $v \in M^2$.

(i3) Za $a \in V$,$u \in M^1$, $v \in M^2$ vrijedi Jacobijev identitet

$$x_0^{-1}\delta\left(\frac{x_1 - x_2}{x_0}\right) Y(a,x_1)I(u,x_2)v - x_0^{-1}\delta\left(\frac{x_2 - x_1}{-x_0}\right) I(u,x_2)Y(a,x_1)v$$

$$= x_2^{-1}\delta\left(\frac{x_1 - x_0}{x_2}\right) I(Y(a,x_0)u,x_2)v$$

.

Označimo sa $I\binom{M^3}{M^1,\,M^2}$ *vektorski prostor svih operatora ispreplitanja tipa* $\binom{M^3}{M^1,\,M^2}$. *Dimenzija tog vektorskog prostora naziva se* pravilo fuzije *za taj tip.*

2.3 Konstrukcija verteks-algebri

U ovom poglavlju izlažemo definicije i rezultate potrebne za Teorem o generirajućim poljima. Taj teorem je važan alat u konstrukciji primjera verteks algebri. Ideja konstrukcije je da se za određene formalne redove potencija, *slabe verteks operatore*

$$a(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^{-n-1},$$

odrede dovoljni uvjeti da bi oni generirali neku verteks algebru, odnosno algebru verteks operatora. Pratimo izlaganje iz [29].

Definicija 2.23. *Neka je W vektorski prostor.* Slabi verteks operator na W *je formalni red potencija*

$$a(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^{-n-1} \in \mathrm{Hom}(W, W((x))).$$

Prostor $\mathrm{Hom}(W, W((x)))$ *slabih verteks operatora označavamo sa* $\mathcal{E}(W)$.

Neka je $d \in \mathrm{End}\, V$. Slabi verteks operator na paru (W, d) *je slabi verteks operator na W takav da*

$$[d, a(x)] = a'(x) = \frac{d}{dx}a(x)$$

Prostor slabih verteks operatora na paru (W, d) označavamo sa $\mathcal{E}(W, d)$.

Preslikavanje definirano formulom

$$a(x)_n b(x) = \mathrm{Res}_{x_1}((x_1 - x)^n a(x_1)b(x) - (-x + x_1)^n b(x)a(x_1))$$

ima za rezultat slabi verteks operator ([29]) pa možemo definirati preslikavanje

$$Y_{\mathcal{E}}(\cdot, x_0) \to (\mathrm{End}\, \mathcal{E}(W)[[x_0, x_0^{-1}]]$$

$$a(x) \mapsto Y_{\mathcal{E}}(a(x), x_0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(x)_n x_0^{-n-1}$$

Problem nastaje jer ne mora vrijediti

$$Y_{\mathcal{E}}(a(x), x_0) \in \mathrm{Hom}\,(\mathcal{E}(W), \mathcal{E}(W))((x_0)),$$

pa ni Jacobijev identitet nije definiran.

Definicija 2.24. *Slabi verteks operatori $a(x)$ i $b(x)$ na W su međusobno lokalni ako postoji $k \in \mathbb{N}_0$ takav da*

$$(x_1 - x_2)^k [a(x_1), b(x_2)] = 0.$$

Slabi verteks operator koji je međusobno lokalan sam sa sobom nazivamo verteks operator.

Teorem 2.25. ([29], Theorem 5.5.18.) *Neka je $S \subset \mathcal{E}(W)$ skup međusobno lokalnih verteks operatora na W. Tada se S može uložiti u verteks podalgebru od $\mathcal{E}(W)$, odnosno slaba verteks podalgebra $\langle S \rangle$ generirana sa S je verteks algebra kojoj je W vjeran modul. Vrijedi*

$$\langle S \rangle = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{a^{(1)}(x)_{n_1}...a^{(r)}(x)_{n_r}\mathbf{1} | a^{(i)}(x) \in S,\ n_i \in \mathbb{Z},\ i = 1, ...r,\ r \geq 0\}$$

Teorem 2.26. ([29], Theorem 5.7.1.) *Neka je V vektorski prostor sa istaknutim vektorom $\mathbf{1}$ i linearnim operatorom d takvim da $d\mathbf{1} = 0$. Neka je dan $T \subset V$ i preslikavanje*

$$Y_0 : T \to \mathrm{Hom}(V, V((x)))$$

$$a \mapsto Y_0(a, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x^{-n-1}$$

takvo da vrijedi $Y_0(a, x)\mathbf{1} \in V[[x]]$ i $a_{-1}\mathbf{1} = a$,

$$[d, Y_0(a, x)] = \frac{d}{dx} Y_0(a, x);$$

za a, $b \in T$ postoji prirodan broj k takav da

$$(x_1 - x_2)^k [Y_0(a, x_1), Y_0(b, x_2)] = 0;$$

i v je linearno generiran vektorima

$$a^{(1)}_{n_1}...a^{(r)}_{n_r}\mathbf{1},$$

za $r \geq 0$, $a^{(i)} \in T$, $n_i \in \mathbb{Z}$.

Tada se Y_0 može na jednistven način proširiti do linearnog preslikavanja

$$Y(\cdot, x) : V \to \mathrm{Hom}(V, V((x)))$$

takvog da je $(V, Y, \mathbf{1})$ verteks algebra. Y je zadan relacijom

$$Y(^{(1)}_{n_1}...a^{(r)}_{n_r}\mathbf{1}, x) = a^{(1)}(x)_{n_1}...a^{(r)}(x)_{n_r} 1_V$$

pri čemu za $a \in T$, $a(x) = Y_0(a, x)$. Operator d na V zadovoljava aksiom derivacije. Uz oznaku

$$T(x) = \{a(x) | a \in T\}$$

izomorfizam verteks algebri $\psi : \langle T(x) \rangle \to V$ dan je formulom

$$\alpha(x) \mapsto \mathrm{Res}_x x^{-1} \alpha(x)\mathbf{1}.$$

Teorem 2.27. **([29] Theorem 5.7.4)** *U uvjetima prethodnog teorema, neka je V restringiran modul za Virasorovu algebru centralnog naboja l tako da vrijedi $L(-1) = d$ i $L(-2)\mathbf{1} \in T$, tako da koeficijenti od $Y_0(L(-2)\mathbf{1}, x)$ odgovaraju danoj reprezentaciji Virasorove algebre na V:*

$$Y_0(L(-2)\mathbf{1}, x) = L_V(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L(n)x^{-n-2}.$$

Pretpostavimo da za svaki $a \in T$ postoji $m \in \mathbb{Z}$ takav da

$$[L(0), a(x)] = ma(x) + xa'(x),$$

odnosno

$$[L(0), a_n] = (m - n - 1)a_n, \quad \text{za}\, n \in \mathbb{Z}.$$

Tada se Y_0 može proširiti na jedinstven način do linearnog preslikavanja Y sa V u $\mathrm{Hom}(V, V((x)))$, tako da $(V, Y, \mathbf{1}, L(-2)\mathbf{1})$ ima strukturu algebre verteks operatora (bez zahtjeva na graduaciju).

2.4 Zhuova algebra

Ponavljamo konstrukciju Y. Zhua, koji je u svojoj disertaciji [39] pokazao da kvocijent verteks algebre V po određenom idealu $O(V)$, uz pogodno definiran produkt, ima strukturu asocijativne algebre. Značaj te algebre proizlazi iz Teorema 2.31 i 2.32 koji problem klasifikacije ireducibilnih modula za verteks algebru transformira u problem klasifikacije ireducibilnih modula za asocijativnu algebru.

Definicija 2.28. *Neka je V algebra verteks operatora. Definiramo bilinearna preslikavanja*

$$* : V \times V \to V$$
$$\circ : V \times V \to V.$$

Za homogeni $a \in V$ i $b \in V$ stavimo

$$a \circ b = \mathrm{Res}_x \frac{(1 + x)^{\mathrm{wt}a}}{x^2} Y(a, x)b = \sum_{i\geq 0} \binom{\mathrm{wt}a}{i} a_{i-2}b$$

$$a * b = \mathrm{Res}_x \frac{(1 + x)^{\mathrm{wt}a}}{x} Y(a, x)b = \sum_{i\geq 0} \binom{\mathrm{wt}a}{i} a_{i-1}b$$

i proširimo na $V \times V \to V$ po linearnosti. Označimo s $O(V)$ linearnu ljusku elemenata oblika $a\circ b$, a s $A(V)$ kvocjentni prostor $V/O(V)$. Za $a \in V$ projekciju u $A(V)$ označavamo s $[a]$.

Teorem 2.29. **[39]** *$(A(V), *)$ je asocijativna algebra.*

Propozicija 2.30. **[21]** *Neka je J ideal od V takav da $\mathbf{1} \notin J$, $\omega \notin J$. Tada je asocijativna algebra $A(V/J)$ izomorfna algebri $A(V)/A(J)$, pri čemu je $A(J)$ slika od J u $A(V)$.*

Za homogeni $a \in V$ definiramo $o(a) = a_{\mathrm{wt}a-1}$ i proširimo na V po linearnosti.

Teorem 2.31. [39] *(a) Neka je $M = \oplus_{n=0}^{\infty} M(n)$ $\mathbb{Z}_+$-graduirani slabi V-modul. Tada je $M(0)$ $A(V)$-modul s djelovanjem*

$$[a].v = o(a)v,$$

za sve $a \in V$ i $v \in M(0)$.
(b) Neka je U $A(V)$-modul. Tada postoji $\mathbb{Z}_+$-graduirani slabi V-modul M takav da su $A(V)$-moduli $M(0)$ i U izomorfni.

Teorem 2.32. [39] *Postoji bijektivna korespondencija između klasa ekvivalencije ireducibilnih $A(V)$-modula i klasa ekvivalencije ireducibilnih $\mathbb{Z}_+$-graduiranih slabih V-modula.*

Navodimo i rezultat Abea o generatorima Zhuove algebre.

Propozicija 2.33. ([2] Proposition 2.5.) *Neka je V algebra verteks operatora i S skup koji jako generira V. Tada je $A(V)$ kao asocijativna algebra generirana skupom $\{[a] |\, a \in S\}$.*

Ove rezultate ćemo koristiti pri određivanju Zhuove algebre $A(M_c^{W_{1+\infty}})$ i potom za određivanje parametrizacije za $A(\bar{L}_1^{W_{1+\infty}})$.

Poglavlje 3

Verteks algebra $\mathcal{W}_{1+\infty}$

U ovom poglavlju prvo ponavljamo konstrukciju verteks algebre $\mathcal{W}_{1+\infty}$ iz [19] koja nam je potrebna u nastavku radnje. Uz to i dajemo nove dokaze o strukturi Zhuove algebre i precizan izvod nekih formula za singularne vektore iz [25].

Prvo navodimo definicije Liejevih algebri $\widehat{\mathcal{D}}$ i $\widehat{\mathfrak{gl}}$ i njihove generalizirane Vermaove module. Navodimo definiciju homomorfizam

$$\Phi_0 : \widehat{\mathcal{D}} \to \widehat{\mathfrak{gl}}$$

koji na $\widehat{\mathfrak{gl}}-$modulima inducira strukturu $\widehat{\mathcal{D}}-$modula. Φ_0 se proširuje analitički do izomorfizma

$$\Phi : \widehat{\mathcal{D}}^{\mathcal{O}} \to \widehat{\mathfrak{gl}},$$

gdje je $\widehat{\mathcal{D}}^{\mathcal{O}}$ analitičko proširenje od $\widehat{\mathcal{D}}$. Ova konstrukcija je izuzetno važna jer se iz nje može dokazati da su ireducibilni kvazikonačni $\widehat{\mathfrak{gl}}$-moduli ujedno i ireducibilni kvazikonačni $\widehat{\mathcal{D}}-$moduli.

Za ilustraciju, na primjeru poznatih formula singularnih vektora za $\widehat{\mathfrak{gl}}$ rekonstruiramo singularne vektore za $\widehat{\mathcal{D}}$ za male centralne naboje. Zatim definiramo skup slabih verteks operatora za koje se vidi da su međusobno lokalni, tj. da ispunjavaju uvjete Teorema o generirajućim poljima. Time generalizirani Vermaov modul za $\widehat{\mathcal{D}}$ dobiva strukturu verteks algebre. Naposljetku razmatramo neke primjere Zhuovih algebri pridruženih $\mathcal{W}_{1+\infty}$ verteks algebrama.

3.1 Liejeva algebra $\widehat{\mathcal{D}}$

Definicija 3.1. *Definiramo graduirani vektorski prostor*

$$\mathcal{D} = Span_{\mathbb{C}}\{J^k_m : m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\},$$

pri čemu su $J^k_m = -t^{k+m}\partial^k_t$ *(diferencijalni operatori na kružnici u varijabli* t*), a težine zadane relacijama* $\mathrm{wt}\, J^k_m = m$.

Propozicija 3.2. *Uz komutator definiran formulom*

$$[J^k_m, J^l_n] = \sum_{i=1}^{\max(k,l)} \left(\binom{l}{i}[k+m]_i - \binom{k}{i}[l+n]_i \right) J^{k+l-i}_{m+n},$$

pri čemu je $[x]_i = x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-i+1)$ *(silazni produkt ili silazna potencija),* $\mathcal{D}$ *ima strukturu graduirane Liejeve algebre, gdje je* $\mathrm{wt}\, J^k_m = m$.

Radi urednijeg zapisa, ponekad ćemo koristiti oznaku $A^{k,l}_{m,n}(i)$ za koeficijent $\binom{l}{i}[k+m]_i - \binom{k}{i}[l+n]_i$.

Neka je $D = t\partial_t$. Operatori $L^k_m = -t^m D^k$ tvore alternativnu bazu za $\mathcal{D}$. Vrijedi formula $J^k_m = -t^m [D]_k$. U terminima potencija od t i formalnih polinoma f i g u D vrijedi formula za komutator

$$[t^m f(D), t^n g(D)] = t^{m+n}(f(D+n)g(D) - f(D)g(D+m)).$$

Propozicija 3.3. *Uz 2-kociklus definiran formulom*

$$\Psi(t^r f(D), t^s g(D)) = \begin{cases} \sum_{j=-r}^{-1} f(j)g(j+r), & r=-s\geq 0 \\ -\Psi(t^s g(D), t^r f(D)), & r=-s<0 \\ 0, \quad \text{inače} \end{cases}$$

$\widehat{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \oplus \mathbb{C}C$ *je (do na izomorfizam jedinstveno) centralno proširenje od* $\mathcal{D}$.

Ovo centralno proširenje prvi put se pojavilo u članku [24] a dokaz jedinstvenosti centralnog proširenja se može naći u [18] ili [31].

Vrijede relacije za kociklus

$$\Psi(f(t)\partial_t^k, g(t)\partial_t^l) = \frac{k!l!}{(k+l+1)!}\mathrm{Res}_{t=0} f^{(l+1)}(t)g^{(k)}(t)dt,$$

$$\Psi(J^k_m, J^l_n) = \delta_{m,-n}\frac{k!l!}{(k+l+1)!}[k+m]_{l+1}[l-m]_k.$$

Uz težine $\mathrm{wt}L^k_m = \mathrm{wt}J^k_m = m$, $\mathrm{wt}C = 0$, centralno proširenje $\widehat{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \oplus \mathbb{C}C$ ima $\mathbb{Z}$-graduaciju

$$\widehat{\mathcal{D}} = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{\mathcal{D}}_m.$$

Pri tome je $\mathcal{D}_m = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{J^k_m : k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$, $\widehat{\mathcal{D}}_m = \mathcal{D}_m$ za $m \neq 0$ i $\widehat{\mathcal{D}}_0 = \mathcal{D}_0 \oplus \mathbb{C}C$.

$\widehat{\mathcal{D}}$ sadrži Heisenbergovu algebru generiranu sa $L^0_m = J^0_m$, $m \in \mathbb{Z}$

$$[L^0_m, L^0_n] = [J^0_m, J^0_n] = \delta_{m,-n} mC$$

i dvije parametrizirane familije Virasorovih algebri $Vir^{\pm}(\beta)$, $\beta \in \mathbb{C}$, generirane sa

$$L^+_m(\beta) = L^1_m + (m+1)\beta L^0_m,$$

$$L^-_m(\beta) = L^1_m + (m + \beta(1-m))L^0_m.$$

pa je relacija za komutator u tim Virasorovim algebrama

$$[L^{\pm}_m(\beta), L^{\pm}_n(\beta)] = (m-n)L^{\pm}_{m+n}(\beta) + \delta_{m,-n}\frac{m-m^3}{6}(1-6\beta+6\beta^2)C.$$

Vidimo da je centralni element od $Vir^{\pm}(\beta)$ skalirani centralni element od $\widehat{\mathcal{D}}$, tj. centralni naboji su povezani relacijom

$$C_\beta = (12\beta - 12\beta^2 - 2)C_{\widehat{\mathcal{D}}}.$$

Za $\beta = 0$ dobivamo $L^+_m(0) = L^1_m = J^1_m$ i $C_0 = -2C_{\widehat{\mathcal{D}}}$.

Liejeva algebra $\widehat{\mathcal{D}}$ ima trokutastu dekompoziciju

$$\widehat{\mathcal{D}} = \widehat{\mathcal{D}}_+ \oplus \widehat{\mathcal{D}}_0 \oplus \widehat{\mathcal{D}}_-,$$

pri čemu $\widehat{\mathcal{D}}_\pm = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} \widehat{\mathcal{D}}_{\pm j}$.

Za funkcional $\lambda \in \mathcal{D}_0^*$ i centralni naboj $c \in \mathbb{C}$ definiramo Vermaov modul najveće težine λ

$$M_{\widehat{\mathcal{D}}}(c,\lambda) = \mathcal{U}(\widehat{\mathcal{D}}) \otimes_{\mathcal{U}(\widehat{\mathcal{D}}_0 \oplus \widehat{\mathcal{D}}_+)} \mathbb{C}v_\lambda,$$

gdje je $\mathbb{C}v_\lambda$ jednodimenzionalni (lijevi) $\mathcal{U}(\widehat{\mathcal{D}}_0 \oplus \widehat{\mathcal{D}}_+)$-modul, sa djelovanjima definiranima na sljedeći način

$$\begin{aligned} Cv_\lambda &= cv_\lambda, \\ hv_\lambda &= \lambda(h)v_\lambda, \quad h \in \mathcal{D}_0, \\ \widehat{\mathcal{D}}_+ v_\lambda &= 0. \end{aligned}$$

Postoji jedinstven ireducibilan kvocijent $L_{\widehat{\mathcal{D}}}(c,\lambda)$ Vermaovog modula $M_{\widehat{\mathcal{D}}}(c,\lambda)$.
Iz Poincaré-Birkhoff-Wittovog teorema i univerzalnosti modula slijedi

Propozicija 3.4. *Baza modula $M_{\widehat{\mathcal{D}}}(c,\lambda)$ je*

$$\{\prod_{j=1}^r J^{k_j}_{m_j} v_\lambda : r \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\, k_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\, m_j \in \mathbb{Z},\, (m_j,k_j) \leq (m_{j+1},k_{j+1})\}.$$

Pri tom tvrdnja vrijedi za bilo koji uređaj na skupu $\mathbb{Z}^2$, mi uzimamo

$$(m_i,k_i) < (m_j,k_j) \Leftrightarrow ((m_i > m_j)\,\text{ili}\,(m_i = m_j \text{ i } k_i < k_j)).$$

Vermaov modul $M_{\widehat{\mathcal{D}}}(c,\lambda)$ nije kvazikonačan jer bazu za $(M_{\widehat{\mathcal{D}}}(c,\lambda))_{(n)}$ čine svi $(\prod_{j=1}^r J^{k_j}_{m_j})v_\lambda$ iz baze za $M_{\widehat{\mathcal{D}}}(c,\lambda)$ takvi da je $\sum_{j=1}^r m_j = n$. Treba nam dodatna struktura.

Definicija 3.5. *Podalgebru $\mathfrak{p}$ $\mathbb{Z}$-graduirane Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ nazivamo* **paraboličkom podalgebrom** *ako sadrži Borelovu podalgebru $\mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_+$.*

Propozicija 3.6. *Definiramo*

$$\mathcal{P} = Span_{\mathbb{C}}\{J^k_m : m + k \geq 0\},$$

$$\widehat{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \oplus \mathbb{C}C.$$

$\widehat{\mathcal{P}}$ je parabolička podalgebra od $\widehat{\mathcal{D}}$.

Dokaz. Prvo dokažimo zatvorenost na komutator. Iz formule za komutator vidimo da je $\mathcal{P}' = [\mathcal{P},\mathcal{P}]$ generirana elementima

$$\left(\binom{l}{i}[k+m]_i - \binom{k}{i}[l+n]_i\right) J^{k+l-i}_{m+n},$$

gdje je

$$k,l \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\, i,m,n \in \mathbb{Z},\, k+m \geq 0,\, l+n \geq 0,\, \max(k,l) \geq i.$$

Vidimo da ako element J^{k+l-i}_{m+n} nije sadržan u $\mathcal{P}$, vrijedi $i > k+m$ i $i > l+n$ pa su $[k+m]_i = [l+n]_i = 0$, odnosno koeficijent mu je 0. Dakle komutator dva elementa od $\mathcal{P}$ je linearna kombinacija elemenata iz $\mathcal{P}$, odnosno $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$.

$\widehat{\mathcal{P}}$ je parabolička tj. sadrži $\widehat{\mathcal{D}}_{\geq 0}$ jer $J^k_m \in \widehat{\mathcal{D}}_{\geq 0}$ povlači $m \geq 0$ pa je $m + k \geq 0$.

□

Ako je najveća težina $\lambda = 0$, tada $\widehat{\mathcal{D}}_0 + \widehat{\mathcal{D}}_+ -$modul $\mathbb{C}v_0$ možemo proširiti do $\widehat{\mathcal{P}}-$modula djelovanjem $\mathcal{P} \cdot v_0 = 0$. Inducirani modul

$$M_{\widehat{\mathcal{D}}}(c, \widehat{\mathcal{P}}) = \mathcal{U}(\widehat{\mathcal{D}}) \otimes_{\mathcal{U}(\widehat{\mathcal{P}})} \mathbb{C}v_0.$$

je kvocijent Vermaovog modula $M_{\widehat{\mathcal{D}}}(c, 0)$ i naziva se generalizirani Vermaov modul.

Navodimo sada važnu karakterizaciju kvazikonačnih modula.

Teorem 3.7. ([25], Theorem 4.2) *$L_{\widehat{\mathcal{D}}}(c, \lambda)$ je kvazikonačan modul ako i samo ako se formalni red*

$$\Delta_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \lambda(L^n_0)$$

može zapisati u obliku

$$\Delta_\lambda(x) = \frac{\sum_{i=1}^m x^{n_i} e^{\alpha_i x}}{e^x - 1}, \ m, n_i \in \mathbb{Z}_+, \alpha_i \in \mathbb{C}.$$

3.2 Liejeva algebra $\widehat{\mathfrak{gl}}$

Definicija 3.8. *Neka je $\widetilde{\mathfrak{gl}}$ vektorski prostor beskonačnih matrica $A = (a_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ sa konačno mnogo nenul dijagonala. Drugim riječima, za svaki $A = (a_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ iz $\widetilde{\mathfrak{gl}}$ postoji konačan podskup $S \subset \mathbb{Z}$ takav da $j - i \notin S$ povlači $a_{i,j} = 0$.*

Matrični produkt elemenata od $\widetilde{\mathfrak{gl}}$ je tada dobro definiran upravo zbog uvjeta na dijagonale. Sa $E_{i,j}$ označimo matricu koja na koordinatama (i, j) ima 1 a drugdje 0. Iako formalni zapis

$$A = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \alpha_{i,j} E_{i,j}$$

nije konačan pa nije linearna kombinacija, jednoznačno opisuje elemente od $\widetilde{\mathfrak{gl}}$.

Propozicija 3.9. *$\widetilde{\mathfrak{gl}}$ uz operaciju matričnog produkta ima strukturu asocijativne algebre. Uz komutator*

$$[A, B] = AB - BA$$

i $\mathbb{Z}$-graduaciju zadanu sa $\operatorname{wt} E_{i,j} = j - i$, $\widetilde{\mathfrak{gl}}$ ima strukturu $\mathbb{Z}$-graduirane Liejeve algebre.

Dokaz. Antisimetričnost se direktno vidi. Za $A = \sum_{a,b\in\mathbb{Z}} \alpha_{a,b} E_{a,b}$, $B = \sum_{c,d\in\mathbb{Z}} \beta_{c,d} E_{c,d}$ te $C = \sum_{p,q\in\mathbb{Z}} \gamma_{p,q} E_{p,q}$ vrijedi

$$[[A, B], C] = \sum_{a,b,c,d,p,q\in\mathbb{Z}} \alpha_{a,b}\beta_{c,d}\gamma_{p,q}[[\delta_{b,c}E_{a,d} - \delta_{a,d}E_{c,b}], E_{p,q}] =$$

$$\sum_{a,b,c,d,p,q\in\mathbb{Z}} \alpha_{a,b}\beta_{c,d}\gamma_{p,q}(\delta_{b,c}\delta_{d,p}E_{a,q} - \delta_{b,c}\delta_{a,q}E_{p,d} - \delta_{a,d}\delta_{b,p}E_{c,q} + \delta_{a,d}\delta_{q,c}E_{p,b}) =$$

$$\sum_{a,b,c,d,u,v\in\mathbb{Z}} (\alpha_{u,b}\beta_{b,d}\gamma_{d,v} - \alpha_{a,b}\beta_{b,v}\gamma_{u,a} - \alpha_{a,b}\beta_{u,a}\gamma_{b,v} + \alpha_{a,v}\beta_{c,a}\gamma_{u,c})E_{u,v}.$$

Cikličko uvrštavanje povlači da je koeficijent uz $E_{u,v}$ u $[[A, B], C]+[[B, C], A]+[[C, A], B]$, lijevoj strani Jacobijevog identiteta upravo

$$\sum_{a,b,c,d\in\mathbb{Z}} (\alpha_{u,b}\beta_{b,d}\gamma_{d,v} - \alpha_{a,b}\beta_{b,v}\gamma_{u,a} - \alpha_{a,b}\beta_{u,a}\gamma_{b,v} + \alpha_{a,v}\beta_{c,a}\gamma_{u,c} + \beta_{u,b}\gamma_{b,d}\alpha_{d,v}$$

$$-\beta_{a,b}\gamma_{b,v}\alpha_{u,a} - \beta_{a,b}\gamma_{u,a}\alpha_{b,v} + \beta_{a,v}\gamma_{c,a}\alpha_{u,c} + \gamma_{u,b}\alpha_{b,d}\beta_{d,v} - \gamma_{a,b}\alpha_{b,v}\beta_{u,a}$$

$$-\gamma_{a,b}\alpha_{u,a}\beta_{b,v} + \gamma_{a,v}\alpha_{c,a}\beta_{u,c}) = 0.$$

Matrice koje imaju samo jednu netrivijalnu dijagonalu možemo zapisati kao

$$A = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \alpha_i E_{i,i+a}, \quad B = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \beta_j E_{j,j+b}$$

pa vrijedi

$$[A, B] = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (\alpha_i\beta_{i+a} - \alpha_{i+b}\beta_i)E_{i,i+a+b},$$

odnosno struktura Liejeve algebre je konzistentna sa graduacijom.

□

Zbog $\mathbb{Z}$-graduacije vrijedi trokutasta dekompozicija

$$\widetilde{\mathfrak{gl}} = \left(\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}_{>0}} \widetilde{\mathfrak{gl}}_j\right) \oplus \widetilde{\mathfrak{gl}}_0 \oplus \left(\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}_{<0}} \widetilde{\mathfrak{gl}}_j\right) = \widetilde{\mathfrak{gl}}_+ \oplus \widetilde{\mathfrak{gl}}_0 \oplus \widetilde{\mathfrak{gl}}_-$$

Propozicija 3.10. [15] *Vektorski prostor*

$$\widehat{\mathfrak{gl}} = \widetilde{\mathfrak{gl}} \oplus \mathbb{C}K$$

je centralno proširenje od $\widetilde{\mathfrak{gl}}$*, pri čemu je 2-kociklus zadan relacijom* $C(A,B) = \mathrm{tr}([J,A]B)$*, gdje je* $J = \sum_{j\leq 0} E_{j,j}$*.*

Definiramo $\mathrm{wt}\, K = 0$, pa i na $\widehat{\mathfrak{gl}}$ imamo $\mathbb{Z}$-graduaciju i trokutastu dekompoziciju

$$\widehat{\mathfrak{gl}} = \left(\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}_{>0}} \widehat{\mathfrak{gl}}_j\right) \oplus \widehat{\mathfrak{gl}}_0 \oplus \left(\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}_{<0}} \widehat{\mathfrak{gl}}_j\right) = \widehat{\mathfrak{gl}}_+ \oplus \widehat{\mathfrak{gl}}_0 \oplus \widehat{\mathfrak{gl}}_-$$

pri čemu je $\widehat{\mathfrak{gl}}_0 = \widetilde{\mathfrak{gl}}_0 \oplus \mathbb{C}K$, $\widehat{\mathfrak{gl}}_i = \widetilde{\mathfrak{gl}}_i$ za $i \neq 0$.

Za funkcional $\lambda \in \widehat{\mathfrak{gl}}_0^*$ i centralni naboj $c \in \mathbb{C}$ definiramo Vermaov modul najveće težine λ

$$M_{\widehat{\mathfrak{gl}}}(c,\lambda) = \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{gl}}) \otimes_{\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{gl}}_0 \oplus \widehat{\mathfrak{gl}}_+)} \mathbb{C}v_\lambda,$$

gdje je $\mathbb{C}v_\lambda$ jednodimenzionalni (lijevi) $\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{gl}}_0 \oplus \widehat{\mathfrak{gl}}_+)$ -modul, sa djelovanjima definiranima na sljedeći način

$$\begin{aligned} Kv_\lambda &= cv_\lambda, \\ hv_\lambda &= \lambda(h)v_\lambda, \quad h \in \widehat{\mathfrak{gl}}_0, \\ \widehat{\mathfrak{gl}}_+ v_\lambda &= 0. \end{aligned}$$

Ireducibilni modul najveće težine λ, $L_{\widehat{\mathfrak{gl}}}(c,\lambda)$, je kvocijent od $M_{\widehat{\mathfrak{gl}}}(c,\lambda)$ po maksimalnom graduiranom podmodulu.

Za $\mathfrak{p} = \{(a_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}} | a_{i,j} = 0 \text{ ako } i > 0 \geq j\}$ se vidi da je parabolička podalgebra od $\widehat{\mathfrak{gl}}$ jer sadrži $\widehat{\mathfrak{gl}}_+ \oplus \widehat{\mathfrak{gl}}_0$ i zatvorena je na komutator. Neka λ_0 najveća težina takva da $\lambda_0(E_{j,j}) = 0$ za svaki j i $\lambda_0(K) = c$. Imamo generalizirani Vermaov modul

$$M_{\widehat{\mathfrak{gl}}}(c,\mathfrak{p}) = \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{gl}}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p})} \mathbb{C}v_{\lambda_0}.$$

Veza između $\widehat{\mathcal{D}}$ i $\widehat{\mathfrak{gl}}$ je uspostavljena u [25]:

Teorem 3.11. *Preslikavanje* $\Phi_0 : \widehat{\mathcal{D}} \to \widehat{\mathfrak{gl}}$ *definirano relacijama*

$$\Phi_0(t^m f(D)) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} f(-j) E_{j-m,j}, \quad f \in \mathbb{C}[x],$$

$$\Phi_0(C) = K$$

je homomorfizam Liejevih algebri. Φ_0 *se prirodno proširuje na homomorfizam* $\Phi : \mathcal{D}^{\mathcal{O}} \to \widehat{\mathfrak{gl}}$*, pri čemu je*

$$\mathcal{D}^{\mathcal{O}} = Span_{\mathbb{C}}\{t^m f(D) | f(x) \in \mathcal{O}\},$$

$\mathcal{O}$ *skup holomorfnih funkcija.* Φ *je izomorfizam.*

Dokaz. Φ je surjektivan zbog činjenice da za svaki diskretan skup argumenata (u našem slučaju $\mathbb{Z}$) i zadanih vrijednosti postoji holomorfna funkcija koja u zadanim točkama poprima zadane vrijednosti. $\square$

Teorem 3.12. *Φ inducira strukturu $\widehat{\mathcal{D}}$-modula na $\widehat{\mathfrak{gl}}$-modulima. Štoviše, vrijedi $\Phi(\mathcal{P}) \subset \mathfrak{p}$, pa je*

$$M_{\widehat{\mathcal{D}}}(c,\mathcal{P}) \to M_{\widehat{\mathfrak{gl}}}(c,\mathfrak{p})$$

izomorfizam $\widehat{\mathcal{D}}$ modula.

Definicija 3.13. *Neka je $\mathfrak{g}$ $\mathbb{Z}-$graduirana Liejeva algebra. Za vektor $v \neq 0$ u $\mathfrak{g}-$modulu V_λ najveće težine λ kažemo da je* **singularan** *ako $\mathfrak{g}_+ v = 0$.*

Modul najveće težine V_λ je ireducibilan ako i samo ako su jedini singularani vektori oni kolinearni sa vektorom najveće težine.

Propozicija 3.14. *Singularan vektor za $\widehat{\mathfrak{gl}}$ u $M_{\widehat{\mathfrak{gl}}}(c,\mathfrak{p})$ je ujedno i singularan vektor za $\widehat{\mathcal{D}}$.*

Dokaz slijedi korištenjem homomorfizma Φ.

3.3 Konstrukcija nekih singularnih vektora za $\widehat{\mathfrak{gl}}$

U [25] su opisani singularni vektori za $\widehat{\mathfrak{gl}}$ kad je $c \in \mathbb{Z}_+$:

Propozicija 3.15. *Za $c \in \mathbb{Z}_+$ singularni vektor za $\widehat{\mathfrak{gl}}$ u $M_{\widehat{\mathfrak{gl}}}(c, \mathfrak{p})$ dan formulom $v_c = E_{1,0}^{c+1}\mathbf{1}$, a ireducibilni modul najveće težine je kvocijent*

$$L_{\widehat{\mathfrak{gl}}}(c, \mathfrak{p}) = M_{\widehat{\mathfrak{gl}}}(c, \mathfrak{p})/(\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{gl}})E_{1,0}^{c+1}\mathbf{1}).$$

Promotrimo analitičku fukciju

$$f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(\pi x)^{2n}}{(2n+1)!} = \prod_{s=1}^{\infty}(1 - \frac{x^2}{s^2}).$$

Vrijedi $\Phi(t^{-1}f(D)) = E_{1,0}$, pa singularni vektor iz Propozicije 3.15 možemo zapisati kao $\Phi((t^{-1}f(D))^{c+1})\mathbf{1}$.

U kvazikonačnom $\widehat{\mathcal{D}}^{\mathcal{O}}$ modulu, vektor $t^m g(D)\mathbf{1}$ možemo zapisati kao $t^m \bar{g}(D)\mathbf{1}$ gdje je $g(x)$ holomorfna funkcija, a $\bar{g}(x)$ polinom.

Očito je $t^{-1}f(D)\mathbf{1} = t^{-1}\mathbf{1}$. Za centralni naboj $c = 1$ računamo

$$(t^{-1}f(D))^2\mathbf{1} = t^{-1}f(D)t^{-1}f(D)\mathbf{1} = t^{-1}f(D)t^{-1}\mathbf{1} = (t^{-1}t^{-1}f(D) + [t^{-1}f(D), t^{-1}])\mathbf{1} =$$

$$((t^{-1})^2 + t^{-2}(f(D-1) - f(D)))\mathbf{1}$$

Na nivou 2 vrijedi relacija $t^{-2}[D]_2\mathbf{1} = t^{-2}D(D-1)\mathbf{1} = J^2_{-2}\mathbf{1} = 0$.

Direktnim računom se dobije

$$t^{-2}(f(D-1) - f(D))\mathbf{1} = t^{-2}(2D-1)\mathbf{1}.$$

Uvrštavanjem u prethodni račun dobivamo

$$(t^{-1}f(D))^2\mathbf{1} = ((t^{-1})^2 + t^{-2}(2D-1))\mathbf{1} = ((J^0_{-1})^2 + J^0_{-2} - 2J^1_{-2})\mathbf{1}.$$

Do na skalar -1 isti rezultat ćemo kasnije dobiti direktnim računom.

Ponovimo istu priču za $c = 2$.

$$(t^{-1}f(D))^3\mathbf{1} = t^{-1}f(D)(t^{-1}f(D))^2\mathbf{1}.$$

Uvrštavanje $(t^{-1}f(D))^2\mathbf{1} = ((t^{-1})^2 + t^{-2}(2D-1))\mathbf{1}$ i korištenje komutacijske relacije u $\widehat{\mathcal{D}}^{\mathcal{O}}$ daje

$$((t^{-1})^3 + 3t^{-1}t^{-2}(2D-1) - t^{-3}(2Df(D-2) - 2f(D-1) - 2f(D)(D-2) - 2))\mathbf{1}.$$

Slično kao u prethodnom slučaju dobivamo

$$t^{-3}(2Df(D-2) - 2f(D-1) - 2f(D)(D-2) - 2))\mathbf{1} = t^{-3}(6[D]_2 - 6D + 2)\mathbf{1},$$

pa zaključujemo

$$v_2 = (-(J^0_{-1})^3 - 3J^0_{-1}J^0_{-2} + 6J^0_{-1}J^1_{-2} - 6J^2_{-3} + 6J^1_{-3} - 2J^0_{-3})\mathbf{1}.$$

3.4 Konstrukcija verteks algebre $\mathcal{W}_{1+\infty}$

Propozicija 3.16. *[19] Vektorima iz $M_c^{W_{1+\infty}} = M_{\widehat{\mathcal{D}}}(c, \mathcal{P})$ oblika $J^k_{-k-1}\mathbf{1}$ pridružimo slabe verteks operatore Svi $J^k(x)$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ su međusobno lokalni.*

Dokaz. Računamo komutator polja $J^k(x_1)$ i $J^l(x_2)$ pomoću komutacijskih relacija u $\widehat{\mathcal{D}}$:

$$[J^k(x_1), J^l(x_2)] = \sum_{i\geq 0, m,n\in\mathbb{Z}} \left(\binom{l}{i}[k+m]_i - \binom{k}{i}[l+n]_i \right) J^{k+l-i}_{m+n} x_1^{-k-m-1} x_2^{-l-n-1}$$

$$+ \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} c\delta_{m,-n} \frac{k!l!}{(k+l+1)!}[k+m]_{l+1}[l-m]_k x_1^{-k-m-1} x_2^{-l+m-1}.$$

Označimo prvu sumu sa I, drugu sa II. Raspis prve sume pomoću komutacijskih relacija u $\mathcal{D}$ nam daje

$$I = \sum_{i\geq 0, m,n\in\mathbb{Z}} \binom{l}{i}[k+m]_i J^{k+l-i}_{m+n} x_2^{-k-l-m-n+i-1} x_2^{k-i+m} x_1^{-k-m-1} -$$

$$\sum_{i\geq 0, m,n\in\mathbb{Z}} \binom{k}{i}[l+n]_i J^{k+l-i}_{m+n} x_1^{-k-l-m-n-1+i} x_1^{l+n-i} x_2^{-l-n-1} =$$

$$\sum_i \binom{l}{i} \sum_{m+n} J^{k+l-i}_{m+n} x_2^{-k-l-m-n-1+i} \sum_m [k+m]_i x_2^{k+m-i} x_1^{-k-m-1} -$$

$$\sum_i \binom{k}{i} \sum_{m+n} J^{k+l-i}_{m+n} x_1^{-k-l-m-n-1+i} \sum_m [l+n]_i x_1^{l+n-i} x_2^{-l-n-1} =$$

$$\sum_{i\geq 0} \binom{l}{i} J^{k+l-i}(x_2) \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^i x_2^{-1}\delta\left(\frac{x_2}{x_1}\right) - \sum_{i\geq 0} \binom{k}{i} J^{k+l-i}(x_1) \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^i x_1^{-1}\delta\left(\frac{x_2}{x_1}\right).$$

Sad Propozicija 2.1 povlači da je

$$I = \sum_{i=0}^{k+l} \left((-1)^i \binom{l}{i} J^{k+l-i}(x_2) - \binom{k}{i} J^{k+l-i}(x_1) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^i x_1^{-1}\delta\left(\frac{x_1}{x_2}\right).$$

Druga suma, ona koja proizlazi iz 2-kociklusa, iznosi

$$II = \frac{ck!l!}{(k+l+1)!} \sum_{m\in\mathbb{Z}} [k+m]_{l+1}[l-m]_k x_1^{-k-m-1} x_2^{k+m-(l+k+1)} =$$

$$\frac{ck!l!}{(k+l+1)!} \sum_{m\in\mathbb{Z}} (-1)^k [k+m]_{k+l+1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{k+l+1} x_1^{-1}\delta\left(\frac{x_1}{x_2}\right),$$

pa vrijedi relacija

$$[J^k(x_1), J^l(x_2)] = \sum_{i=0}^{k+l} \left((-1)^i \binom{l}{i} J^{k+l-i}(x_2) - \binom{k}{i} J^{k+l-i}(x_1) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^i x_1^{-1}\delta\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$

$$+(-1)^k \frac{k!l!c}{(k+l+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{k+l+1} x_1^{-1}\delta\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$

Koristeći relaciju $(x_1 - x_2)^m (\frac{\partial}{\partial x_1})^n x_2^{-1}\delta(\frac{x_1}{x_2}) = 0$ za $m > n$ iz Propozicije 2.2 vidimo da množenjem komutatora sa $(x_1 - x_2)^{k+l+2}$ postižemo lokalnost. □

Teorem 3.17. *$(M_c^{W_{1+\infty}}, Y, \mathbf{1}, \omega(\beta))$, pri čemu $\mathbf{1} = 1 \otimes v_0$, $\omega(\beta) = (J_{-2}^1 + \beta J_{-2}^0)\mathbf{1}$, je algebra verteks operatora. Pri tome je jako generirana poljima $J^k(x)$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ uz*

$$Y(J_{-k-1}^k \mathbf{1}, x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} J_m^k x^{-k-m-1} = J^k(x)$$

koji se jedinstveno proširuje na

$$Y(\cdot, x) : M_c^{W_{1+\infty}} \to (\mathrm{End}\, M_c^{W_{1+\infty}})[[x, x^{-1}]].$$

Korolar 3.18. *Svaki modul iz kategorije $\mathcal{O}$ je modul za $M_c^{W_{1+\infty}}$. Posebno, svaki ireducibilni modul najveće težine je modul za $M_c^{W_{1+\infty}}$.*

Zhuova algebra

Rezultat o strukturi Zhuove algebre $A(M_c^{W_{1+\infty}})$ iskazan je u [19] ali dokaz nije prezentiran. Zbog potpunosti izlaganja dokaz navodimo ovdje.

Teorem 3.19. *$A(M_c^{W_{1+\infty}})$ je polinomijalna algebra u beskonačno varijabli, tj izomorfna sa $\mathbb{C}[x_0, x_1, ..., x_n, ...]$.*

Dokaz. Zbog 2.33 znamo da je $A(M_c^{W_{1+\infty}})$ generirana sa $[J_{-k-1}^k \mathbf{1}]$. Preostaje nam dokazati komutativnost Zhuove algebre. Koristeći formulu

$$[a * b - b * a] = \mathrm{Res}_x (1+x)^{\mathrm{wt}\, a - 1} Y(a, x) b + O(V)$$

i komutatorsku relaciju za $\widehat{\mathcal{D}}$, vidimo da je

$$[[J_{-k-1}^k \mathbf{1}], [J_{-l-1}^l \mathbf{1}]] = [J_{-k-1}^k \mathbf{1}] * [J_{-l-1}^l \mathbf{1}] - [J_{-l-1}^l \mathbf{1}] * [J_{-k-1}^k \mathbf{1}] =$$

$$= [J_{-k-1}^k \mathbf{1} * J_{-l-1}^l \mathbf{1} - J_{-l-1}^l \mathbf{1} * J_{-k-1}^k \mathbf{1}] = \mathrm{Res}_x (1+x)^k J^k(x) J_{-l-1}^l \mathbf{1} + O(V) =$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{k}{i} J_{i-k}^k J_{-l-1}^l \mathbf{1} + O(V) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{k}{i} [J_{i-k}^k, J_{-l-1}^l] \mathbf{1} + O(V) =$$

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \sum_{j=0}^{k+l} (\binom{l}{j} [i]_j - \binom{k}{j} [-1]_j) J_{i-k-l-1}^{k+l-j} \mathbf{1} + O(V).$$

To je linearna kombinacija elemenata oblika $[J_{i-k-l-1}^{k+l-j} \mathbf{1}] = [J_{m'}^{k'} \mathbf{1}]$. Ako je $k' + m' \geq 0$, element $J_{m'}^{k'} \mathbf{1}$ je trivijalan, pa je i njegova projekcija u Zhuovu algebru također trivijalna. U protivnom, $p = -k' - m' - 1 \geq 0$ pa koristeći poznate relacije

$$J_{m'}^{k'} \mathbf{1} = \frac{1}{(-k' - m' - 1)!} D^{-k'-m'-1} J_{-k'-1}^{k'} \mathbf{1}$$

$$[(L(0) + L(-1))a] = [(L(0) + D)a] = 0$$

vidimo da je

$$[J_{m'}^{k'} \mathbf{1}] = (-1)^p \binom{k' + p}{p} [J_{-k'-1}^{k'} \mathbf{1}],$$

odnosno

$$[[J_{-k-1}^k \mathbf{1}], [J_{-l-1}^l \mathbf{1}]] = \sum_{i=0}^{k+l} \alpha_i [J_{-i-1}^i \mathbf{1}],$$

za neke koeficijente α_i, $i = 0, \dots, k+l$. Linearnu kombinaciju elemenata oblika $[J^{k'}_{m'}\mathbf{1}]$ smo sveli na linearnu kombinaciju elemenata oblika $[J^{i}_{-i-1}\mathbf{1}]$, koji su generatori Zhuove algebre.

Ako je neki α_s netrivijalan, definiramo na generatorima jednodimenzionalnu reprezentaciju π asocijativne algebre $A(M_c^{W_{1+\infty}})$

$$\pi([J^{i}_{-i-1}\mathbf{1}]) = \delta_{i,s},\ i \in \mathbb{Z}_+,\ \pi(1) = 1.$$

Primjenimo li reprezentaciju π na relaciju za komutator $[[J^{k}_{-k-1}\mathbf{1}], [J^{l}_{-l-1}\mathbf{1}]]$, dobijemo da je lijeva strana jednaka

$$\pi([J^{k}_{-k-1}\mathbf{1}])\pi([J^{l}_{-l-1}\mathbf{1}]) - \pi([J^{l}_{-l-1}\mathbf{1}])\pi([J^{k}_{-k-1}\mathbf{1}]).$$

Ukoliko $k \neq s$, $\pi([J^{k}_{-k-1}\mathbf{1}]) = 0$ i komutator je jednak 0. Ako je $k = l = s$ imamo isti zaključak zbog $[[J^{k}_{-k-1}\mathbf{1}], [J^{k}_{-k-1}\mathbf{1}]] = 0$. S druge strane,

$$\sum_{i=0}^{k+l} \alpha_i \pi([J^{i}_{-i-1}\mathbf{1}]) = \alpha_s \neq 0.$$

Time smo došli do kontradikcije, odnosno za proizvoljne k, l, generatori $[J^{k}_{-k-1}\mathbf{1}]$ i $[J^{l}_{-l-1}\mathbf{1}]$ komutiraju, pa je tada i asocijativna algebra $A(M_c^{W_{1+\infty}})$ komutativna.

□

3.5 Primjer c=1

Odredimo singularne vektore za $\widehat{\mathcal{D}}$ u $M_c^{W_{1+\infty}}$ za neke male centralne naboje. Singularan vektor generira ideal u verteks algebri, koji je u korespodenciji sa idealom u Zhuovoj algebri.

Singularne vektore za $\widehat{\mathcal{D}}$ računamo direktno po definiciji, za razliku od Točke 3.3, gdje smo ih rekonstruirali iz singularnih za $\widehat{\mathfrak{gl}}$ pomoću homomorfizma Φ.

Na konformnoj težini 2 (centralni naboj $c = 1$) singularni vektor tražimo u obliku

$$v = (AJ^1_{-2} + BJ^0_{-2} + C(J^0_{-1})^2)\mathbf{1}, \quad A, B, C \in \mathbb{C}.$$

$$J^k_m J^1_{-2}\mathbf{1} = (J^1_{-2}J^k_m + \sum_{i=0}^{k+1}\left(\binom{1}{i}[k+m]_i - \binom{k}{i}[-1]_i\right) J^{k+1-i}_{m-2} + \delta_{m,2}[-1]_k)\mathbf{1},$$

$$J^k_m J^0_{-2}\mathbf{1} = (J^0_{-2}J^k_m - \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}[-2]_i J^{k-i}_{m-2} + \delta_{m,2}(k+2)[-1]_k)\mathbf{1},$$

$$J^k_m (J^0_{-1})^2\mathbf{1} = ((J^0_{-1})^2 J^k_m + \sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-i}\binom{k}{i}[-1]_i\binom{k-i}{j}[-1]_j J^{k-i-j}_{m-2} + 2\delta_{m,1}[-1]_k J^0_{-1}$$

$$-2\delta_{m,2}k[-1]_k - 2\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}[-1]_i J^0_{-1}J^{k-i}_{m-1})\mathbf{1}.$$

U računu često koristimo relaciju $[-1]_k = (-1)^k k!$ (kad je moguće kraćenje s odgovarajućim nazivnikom binomnog koeficijenta).

$J^k_m v$ je vektor na nivou $2-m$. U slučaju $m > 2$ takav vektor ne postoji, odnosno $J^k_m v = 0$. $m = 2$ daje jednadžbu

$$J^k_2 v = (A[-1]_k + B(k+2)[-1]_k - Ck[-1]_k)\mathbf{1}.$$

To mora vrijediti za svaki $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ pa dobijemo sustav jednadžbi

$$A + 2B = 0,$$

$$B - C = 0,$$

čije je (jedno) rješenje $A = 2, B = C = -1$. Singularni vektor mora biti oblika $v = (2J^1_{-2} - J^0_{-2} - (J^0_{-1})^2)\mathbf{1}$. Uvrštavanje $m = 1$ daje

$$J^k_1 v = (2\delta_{k,0} + (1-\delta_{k,0})[-2]_k - 2[-1]_k - (1-\delta_{k.0})(k-1)[-1]_k)J^0_{-1}\mathbf{1} = 0.$$

Izračunajmo svojstvene vrijednosti od J^k_0.

$$J^k_0 v = (2([k \leq 1] - [-1]_k)J^1_{-2} + [k > 0][-2]_k J^0_{-2} - k[k > 1][-2]_{k-1}J^1_{-2}$$
$$-[k \geq 2](k-1)[-1]_k J^0_{-2} + [k \geq 3](k-2)[-1]_k J^1_{-2} + 2[k > 0][-1]_k(J^0_{-1})^2)\mathbf{1}$$
$$= (-1 + \delta_{k,0})2[-1]_k v.$$

Za centralni naboj $c = 2$ tražimo singularni vektor na nivou 6 oblika

$$v = (AJ^2_{-3} + BJ^1_{-3} + CJ^0_{-3} + DJ^0_{-1}J^1_{-2} + EJ^0_{-1}J^0_{-2} + F(J^0_{-1})^3)\mathbf{1},$$

$A, B, C, D, E, F \in \mathbb{C}$. Komutacijske relacije daju formule

$$J^k_m J^2_{-3}\mathbf{1} = (J^2_{-3}J^k_m + \sum_{i=1}^{k+2}\left(\binom{2}{i}[k+m]_i - \binom{k}{i}[-1]_i\right)J^{k+2-i}_{m-3} + 4\delta_{m,3}[-1]_k)\mathbf{1},$$

$$J^k_m J^1_{-3}\mathbf{1} = (J^1_{-3}J^k_m + \sum_{i=1}^{k+1}\left(\binom{1}{i}[k+m]_i - \binom{k}{i}[-2]_i\right)J^{k+1-i}_{m-3} + 2\delta_{m,3}(k+3)[-1]_k)\mathbf{1},$$

$$J^k_m J^0_{-3}\mathbf{1} = (J^0_{-3}J^k_m - \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}[-3]_i J^{k-i}_{m-3} + \delta_{m,3}(k+2)(k+3)[-1]_k)\mathbf{1},$$

$$J^k_m J^0_{-1}J^1_{-2}\mathbf{1} = (J^0_{-1}J^1_{-2}J^k_m + \sum_{i=1}^{k+1}\left(\binom{1}{i}[k+m]_i - \binom{k}{i}[-1]_i\right)J^0_{-1}J^{k+1-i}_{m-2}$$
$$+2\delta_{m,2}[-1]_k J^0_{-1} - \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}[-1]_i J^1_{-2}J^{k-i}_{m-1} - \sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}[-1]_i \sum_{j=1}^{k-i+1}$$
$$\left(\binom{1}{j}[k+m-i-1]_j - \binom{k-i}{j}[-1]_j\right)J^{k-i-j+1}_{m-3} - 2\delta_{m,3}k[-1]_k + 2\delta_{m,1}[-1]_k J^1_{-2})\mathbf{1},$$

$$J_m^k J_{-1}^0 J_{-2}^0 \mathbf{1} = (J_{-1}^0 J_{-2}^0 J_m^k - \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} [-2]_i J_{-1}^0 J_{m-2}^{k-i} + 2\delta_{m,2}(k+2)[-1]_k J_{-1}^0$$

$$- \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} [-1]_i J_{-2}^0 J_{m-1}^{k-i} + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-i} \binom{k}{i} [-1]_i \binom{k-i}{j} [-2]_j J_{m-3}^{k-i-j} - \delta_{m,3} k(k+3)[-1]_k$$

$$+2\delta_{m,1}[-1]_k J_{-2}^0)\mathbf{1},$$

$$J_m^k (J_{-1}^0)^3 \mathbf{1} = ((J_{-1}^0)^3 J_m^k + 6\delta_{m,1}[-1]_k (J_{-1}^0)^2 - 3\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} [-1]_i (J_{-1}^0)^2 J_{m-1}^{k-i}$$

$$-6\delta_{m,2} k[-1]_k J_{-1}^0 + 3\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-i} \binom{k}{i} [-1]_i \binom{k-i}{j} [-1]_j J_{-1}^0 J_{m-2}^{k-i-j}$$

$$-\sum_{i=1}^{k-2} \sum_{j=1}^{k-i-1} \sum_{l=1}^{k-i-j} \frac{[-1]_k}{[-1]_{k-i-j-l}} J_{m-3}^{k-i-j-l} + \delta_{m,3} k(k-1)[-1]_k)\mathbf{1}.$$

Za $m > 3$ su svi pribrojnici u gornjim izrazima 0 pa vrijedi $J_m^k v = 0$. Za $m = 3$ dobije se izraz

$$J_3^k v = (4A[-1]_k + 2B(k+3)[-1]_k + C(k+2)(k+3)[-1]_k - 2Dk[-1]_k$$

$$-E(k^2+3k)[-1]_k + Fk(k-1)[-1]_k)\mathbf{1}.$$

Da bi to bilo jednako 0 za svaki $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, moraju vrijediti jednadžbe

$$4A + 6B + 6C = 0,$$

$$2B + 5C - 2D - 3E - F = 0,$$

$$C - E + F = 0.$$

Trebamo još dvije jednadžbe da bi mogli izračunati vektor v. Uvrštavamo $m = 2$:

$$J_2^k v = (2A\delta_{k,0} + 2B\delta_{k,0} - C[k>0][-3]_k + D(2 - [k>0])[-1]_k +$$

$$+E(2(k+2) + [k>1]\frac{k+2}{2}(k-1))[-1]_k + F(-6k[-1]_k - [k>2]\binom{k-1}{2}[-1]_k))J_{-1}^0\mathbf{1}.$$

Uvrštavanja $k = 0$ i $k = 1$ daju još dvije jednadžbe

$$2A + 2B + 2D + 4E = 0,$$

$$3C - D - 6E + 6F = 0.$$

Do na skalar jedino netrivijalno rješenje sustava je šestorka $(6, -6, 2, -6, 3, 1)$, pa singularan vektor može biti samo

$$v = (6J_{-3}^2 - 6J_{-3}^1 + 2J_{-3}^0 - 6J_{-1}^0 J_{-2}^1 + 3J_{-1}^0 J_{-2}^0 + 1(J_{-1}^0)^3)\mathbf{1}.$$

Provjera za $m = 2, k = 2$ te za $m = 1$ daju da $\widehat{\mathcal{D}}_+$ zaista poništava vektor v.

Računamo svojstvene vrijednosti od J^k_0, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. To najlakše odredimo uspoređivanjem koeficijenata uz $(J^0_{-1})^3$ u v i $J^k_0 v$. Rezultat je

$$J^k_0 v = 3(\delta_{k,0} - 1)[-1]_k v.$$

Opišimo Zhuovu algebru $A(L_c^{W_{1+\infty}})$ za $c = 1$. Imamo homomorfizam

$$x_i \mapsto [J^i_{-i-1}\mathbf{1}]$$

sa $\mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n, \dots]$ u $A(L_c^{W_{1+\infty}})$. Singularni vektor $v_s = (2J^1_{-2} - J^0_{-2} - (J^0_{-1})^2)\mathbf{1}$ će nam dati dodatne relacije.

$$[J^0_{-2}\mathbf{1}] = [DJ^0_{-1}\mathbf{1}] = -x_0$$

$$[J^0_{-1}\mathbf{1}]^2 = \mathrm{Res}_x(x^{-1} + 1)\sum_{i\geq 0}\binom{1}{i}[J^0_{i-1}J^0_{-1}\mathbf{1}]x^{-i} = [(J^0_{-1})^2\mathbf{1}]$$

pa imamo

$$2x_1 + x_0 - x_0^2 = 0$$

odnosno $x_1 = \frac{1}{2}[x_0]_2$. Projekcijom elemenata

$$J^2_1 v_s = 6J^2_{-3} - 2J^0_{-1}J^1_{-2} + 2J^0_{-1}J^0_{-2} + 2J^0_{-3} - 4J^1_{-3}$$

i

$$J^3_2 v_s = 8J^3_{-4} - 18J^2_{-4} + 24J^1_{-4} - 12J^0_{-4} - 6J^0_{-1}J^2_{-3} + 12J^0_{-1}J^1_{-3} - 12J^0_{-1}J^0_{-3}$$

u Zhuovu algebru dobiju se relacije $x_2 = \frac{1}{3}[x_0]_3$ i $x_3 = \frac{1}{4}[x_0]_4$. Matematičkom indukcijom po k dokazujemo tvrdnju $x_k = \frac{1}{k+1}[x_0]_{k+1}$.

Bazu imamo. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve manje ili jednake k.

$$J^{k+1}_{-k} v_s = 2(k+2)J^{k+1}_{-k-2} - 2\sum_{i=2}^{k+1}\binom{k+1}{i}[-1]_i J^{k+2-i}_{-k-2} + \sum_{i=1}^{k+1}\binom{k+1}{i}[-2]_i J^{k+1-i}_{-k-2}$$

$$-\sum_{i=1}^{k}\binom{k+1}{i}[-1]_i \sum_{j=1}^{k+1-i}\binom{k+1-i}{j}[-1]_j J^{k+1-i-j}_{-k-2} + 2\sum_{i=1}^{k+1}\binom{k+1}{i}[-1]_i J^0_{-1}J^{k+1-i}_{-k-1}$$

Pogodnim grupiranjem i svođenjem na isti indeks sumacije pojednostavimo srednje tri sume

$$-2\sum_{i=1}^{k+1}[k+1]_i(k+1-i)(-1)^i J^{k+1-i}_{-k-2} + \sum_{i=1}^{k+1}[k+1]_i(i+1)(-1)^i J^{k+1-i}_{-k-2}$$

$$-\sum_{i=1}^{k+1}[k+1]_i(-1)^i(i-1)J^{k+1-i}_{-k-2} = 2\sum_{i=1}^{k+1}[k+1]_i(-1)^i(k+2-i)J^{k+1-i}_{-k-2}$$

Tada vrijedi relacija:

$$J^{k+1}_{-k} v_s = 2(k+2)J^{k+1}_{-k-2} + 2\sum_{i=1}^{k+1}[k+1]_i(-1)^i(k+2-i)J^{k+1-i}_{-k-2} + 2\sum_{i=1}^{k+1}[k+1]_i(-1)^i J^0_{-1}J^{k+1-i}_{-k-1}$$

Projekcijom u Zhuovu algebru i korištenjem relacija $[J^{k'}_{m'}\mathbf{1}] = (-1)^p\binom{k'+p}{p}[J^{k'}_{-k'-1}\mathbf{1}]$ i $[J^0_{-1}J^{k'}_{-k'-1}\mathbf{1}] = [J^0_{-1}\mathbf{1}] * [J^{k'}_{-k'-1}\mathbf{1}]$ vidimo da u Zhuovoj algebri vrijedi relacija

$$(k+2)x_{k+1} = -\sum_{i=1}^{k+1}\binom{k+1}{i}[k+1]_i(k+2-i)x_{k+1-i} + \sum_{i=1}^{k+1}\binom{k}{i-1}[k+1]_i x_0 x_{k+1-i}$$

Sada koristimo pretpostavku indukcije $x_{k+1-i} = \frac{1}{k+2-i}[x_0]_{k+2-i}$ i binomnu formulu za silazne potencije

$$[a+b]_n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}[a]_i[b]_{n-i}$$

pa vrijedi

$$(k+2)x_{k+1} = -\sum_{i=1}^{k+1}\binom{k+1}{i}[k+1]_i[x_0]_{k+2-i} + \sum_{i=1}^{k+1}\binom{k}{i-1}\frac{[k+1]_i}{k+2-i}x_0[x_0]_{k+2-i}$$

$$= [x_0]_{k+2} - \sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}[k+1]_i[x_0-1]_{k+1-i}x_0 + \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{[k+1]_i(k+2-i)}{k+2-i}x_0^2[x_0-1]_{k-i}$$

$$= [x_0]_{k+2} - x_0[x_0+k]_{k+1} + x_0^2[x_0+k]_k = [x_0]_{k+2}.$$

Poglavlje 4

Verteks algebra $\mathcal{W}_\infty$

U ovom poglavlju konstruirat ćemo verteks algebru $M_{-2c}^{W_\infty}$. Polazimo od Liejeve algebre $\mathcal{W}_\infty = \widehat{\mathcal{D}}^{(1)}$, podalgebre od $\widehat{\mathcal{D}} = \mathcal{W}_{1+\infty}$ generirane operatorima $t\partial_t^k$, $k \geq 1$. Potom za vakuum modul $M_{-2c}^{W_\infty}$, pomoću teorema o generirajućim poljima, dokazujemo da jest verteks algebra. Pratimo osnovne konstrukcije iz [28].

Napomena: Verteks algebru $M_c^{W_{1+\infty}}$ pridruženu Liejevoj algebri $\mathcal{W}_{1+\infty}$ smo konstruirali na analogan način. Uočimo da je indeks koji se odnosi na centralni naboj drugačiji iako $\mathcal{W}_\infty \subset \mathcal{W}_{1+\infty}$ i $\mathcal{W}_{1+\infty}$ imaju isti centralni naboj kao Liejeve algebre. Naime, indeks $-2c$ u $M_{-2c}^{W_\infty}$ se odnosi na Virasorovu podalgebru sadržanu u $\mathcal{W}_\infty$. Dok $\mathcal{W}_{1+\infty}$ sadrži (beskonačnu) parametriziranu potfamiliju Virasorovih algebri $Vir^+(\beta)$ centralnog naboja

$$c_\beta = (-12\beta^2 + 12\beta - 2)c,$$

$\mathcal{W}_\infty$ sadrži samo $Vir^+(0)$, centralni naboj Virasorove podalgebre je jednoznačno određen $c_0 = -2c$.

4.1 Liejeva algebra $\widehat{\mathcal{D}}^{(1)}$

Propozicija 4.1. *Potprostor*

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(1)} = Span_{\mathbb{C}}\{J_m^k : m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\} \oplus \mathbb{C}C$$

od $\widehat{\mathcal{D}}$ je Liejeva podalgebra od $\widehat{\mathcal{D}}$.

Dokaz. Iz relacije za komutator

$$[J_m^k, J_n^l] = \sum_{i=1}^{\max(k,l)} \left(\binom{l}{i}[k+m]_i - \binom{k}{i}[l+n]_i \right) J_{m+n}^{k+l-i} + \Psi(J_m^k, J_n^l)C$$

vidimo da je komutator proizvoljna dva generatora od $\widehat{\mathcal{D}}^{(1)}$ ponovo sadržan u $\widehat{\mathcal{D}}^{(1)}$. Naime, svi članovi u linearnoj kombinaciji s desne strane su ili J_{m+n}^{k+l-i} ili centralni element. U prvom slučaju stupanj operatora deriviranja je $k+l-i \geq k+l-\max(k,l) \geq \min(k,l) \geq 1$, odnosno $J_{m+n}^{k+l-i} \in \widehat{\mathcal{D}}^{(1)}$.

□

$\widehat{\mathcal{D}}^{(1)}$ nasljeđuje graduaciju i trokutastu dekompoziciju od $\widehat{\mathcal{D}}$.

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(1)} = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}_+} \widehat{\mathcal{D}}_m^{(1)} \oplus \widehat{\mathcal{D}}_0^{(1)} \oplus \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}_+} \widehat{\mathcal{D}}_{-m}^{(1)} = \widehat{\mathcal{D}}_+^{(1)} \oplus \widehat{\mathcal{D}}_0^{(1)} \oplus \widehat{\mathcal{D}}_-^{(1)}$$

Definiramo Vermaov modul za težinu $\lambda \in \mathcal{D}_0^{(1)*}$ i centralni naboj $c \in \mathbb{C}$

$$M_{\widehat{\mathcal{D}}^{(1)}}(c,\lambda) = \mathcal{U}(\widehat{\mathcal{D}}^{(1)}) \otimes_{\mathcal{U}(\widehat{\mathcal{D}}_0^{(1)} \oplus \widehat{\mathcal{D}}_+^{(1)})} \mathbb{C}v_\lambda,$$

$$\begin{aligned} Cv_\lambda &= cv_\lambda, \\ hv_\lambda &= \lambda(h)v_\lambda, \quad h \in \widehat{\mathcal{D}}_0^{(1)}, \\ \widehat{\mathcal{D}}_+^{(1)}v_\lambda &= 0. \end{aligned}$$

Definirani modul nije kvazikonačan. Naime svaki homogeni podmodul $(M_{\widehat{\mathcal{D}}^{(1)}}(c,\lambda))_m$ sadrži linearno nezavisne vektore $J_m^k\mathbf{1}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $m \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$, a takvih ima beskonačno mnogo.

Promatramo paraboličku podalgebru

$$\mathcal{P}^{(1)} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{J_m^k : m + k \geq 0, k \geq 1\}.$$

Za $\lambda = 0$ imamo generalizirani Vermaov modul, tj. vakuum modul

$$M_{-2c}^{W_\infty} = \mathcal{U}(\widehat{\mathcal{D}}^{(1)}) \otimes_{\mathcal{U}(\widehat{\mathcal{D}}_0^{(1)} \oplus \widehat{\mathcal{P}}^{(1)})} \mathbb{C}v_0,$$

$$\begin{aligned} Cv_0 &= cv_0, \\ \widehat{\mathcal{P}}^{(1)}v_0 &= 0. \end{aligned}$$

Uočimo prirodno ulaganje koje proizlazi iz $\widehat{\mathcal{D}}^{(1)} \subset \widehat{\mathcal{D}}$

$$M_{-2c}^{W_\infty} \hookrightarrow M_c^{W_{1+\infty}}.$$

Poincaré-Birkhoff-Witt teorem daje opis baze:

Propozicija 4.2. *Baza modula $M_{-2c}^{W_\infty}$ je*

$$\{(\prod_{j=1}^{r} J_{m_j}^{k_j})v_\lambda : r \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\, m_j \in \mathbb{Z},\, k_j \in \mathbb{Z}_{\geq 1},\, m_j + k_j < 0,\, (m_j,k_j) \leq (m_{j+1},k_{j+1})\}.$$

Pri tom koristimo isti uređaj na skupu indeksa kao kod modula za $\mathcal{W}_{1+\infty}$,

$$(m_i,k_i) < (m_j,k_j) \Leftrightarrow ((m_i > m_j)\,\text{ili}\,(m_i = m_j \text{ i } k_i < k_j)).$$

4.2 Liejeva algebra $\widehat{\mathfrak{gl}}_o$

Sjetimo se homomorfizma $\Phi_0 : \widehat{\mathcal{D}} \to \widehat{\mathfrak{gl}}$ i izomorfizma $\Phi : \widehat{\mathcal{D}}^{\mathcal{O}} \to \widehat{\mathfrak{gl}}$ iz Teorema 3.11.

Gledamo restrikciju $\Phi|_{\widehat{\mathcal{D}}^{(1)}}$ i definiramo

$$\widehat{\mathfrak{gl}_o} = \mathrm{Im}(\Phi|_{\widehat{\mathcal{D}}^{(1)}}).$$

Tada je $\widehat{\mathfrak{gl}_o}$ podalgebra Liejeve algebre $\widehat{\mathfrak{gl}}$ i vrijedi sljedeći rezultat.

Lema 4.3. *Za $i,j \in \mathbb{Z}$ vrijedi*

$$E_{i,j} \in \widehat{\mathfrak{gl}}_o \iff j \neq 0.$$

Dokaz. Dokaz jednostavno slijedi iz sljedeće formule:

$$\Phi_0(t^m Df(D)) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}(-j)f(-j)E_{j-m,j}.$$

□

Zbog eksplicitne realizacije iz Poglavlja 9, definiramo sljedeće generatore:

$$\widetilde{E}_{i,j} := -jE_{i,j}, \quad C_1 := -2C.$$

Liejeva algebra $\widehat{\mathfrak{gl}}_o$ ima trokutastu dekompoziciju koja je naslijeđena iz trokutaste dekompozicije od $\widehat{\mathfrak{gl}}$. Točnije

$$\widehat{\mathfrak{gl}}_o = (\widehat{\mathfrak{gl}}_o)_- \oplus (\widehat{\mathfrak{gl}}_o)_0 \oplus (\widehat{\mathfrak{gl}}_o)_+$$

gdje je

$$(\widehat{\mathfrak{gl}}_o)_\pm = \widehat{\mathfrak{gl}}_\pm \cap \widehat{\mathfrak{gl}}_o, \ (\widehat{\mathfrak{gl}}_o)_0 = \widehat{\mathfrak{gl}}_o \cap \widehat{\mathfrak{gl}}_0.$$

Posebno Cartanova podalgebra je razapeta s $\widetilde{E}_{i,i}$, $i \neq 0$ i C_1.

Analogno kao i za Liejevu algebru $\widehat{\mathfrak{gl}}$ uvode se pojmovi Vermaovog modula, modula najveće težine, kvazi–konačnog modula te ireducibilnog modula najveće težine.

Za $\Lambda_o \in ((\widehat{\mathfrak{gl}}_o)_0)^*$ označimo s $L(\Lambda_o, \widehat{\mathfrak{gl}}_o, l)$ pripadni ireducibilan modul najveće težine Λ_o centralnog naboja l.

Strukturna teorije ovih modula, kao i veza s kvazikonačnim $\widehat{\mathcal{D}}^{(1)}$–modulima razvijena je u članku V. G. Kaca i J. Liberatia [22] i analogna je teorije iz članka V. G. Kaca i A. Radula [25]. Posebno iz tih rezultata slijedi da je svaki ireduciblini kvazikonačni $\widehat{\mathfrak{gl}}_o$–modul ujedno i ireducibilan kvazkonačni $\widehat{\mathcal{D}}^{(1)}$–modul.

4.3 Konstrukcija verteks algebre $\mathcal{W}_\infty$

Propozicija 4.4. *[19] Vektorima iz $M_{-2c}^{W_\infty} = M_{\widehat{\mathcal{D}}^{(1)}}(c, \mathcal{P})$ oblika $J^k_{-k-1}\mathbf{1}$ pridružimo slabe verteks operatore*

$$J^k_{-k-1}\mathbf{1} \mapsto J^k(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} J^k_m x^{-k-m-1}.$$

Polja $J^k(x)$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ su međusobno lokalna.

Dokaz. Koeficijenti verteks operatora zadovoljavaju iste komutatorske relacije kao i oni u $M_c^{W_{1+\infty}}$, pa je dokaz isti. Vrijedi relacija

$$[J^k(x_1), J^l(x_2)] = \sum_{i=0}^{k+l}\left((-1)^i\binom{l}{i}J^{k+l-i}(x_2) - \binom{k}{i}J^{k+l-i}(x_1)\right)(\frac{\partial}{\partial x_2})^i x_1^{-1}\delta(\frac{x_1}{x_2})$$

$$+(-1)^k\frac{k!l!c}{(k+l+1)!}(\frac{\partial}{\partial x_2})^{k+l+1}x_1^{-1}\delta(\frac{x_1}{x_2})$$

Zbog Propozicije 2.2 $(x_1 - x_2)^m(\frac{\partial}{\partial x_1})^n x_2^{-1}\delta(\frac{x_1}{x_2}) = 0$ za $m > n$ vidimo da množenjem komutatora sa $(x_1 - x_2)^{k+l+2}$ postižemo lokalnost. □

Uočimo da $\widehat{\mathcal{D}}^{(1)}$ sadrži i Virasorovu algebru $Vir^+(\beta)$ za $\beta = 0$. Tada je vakuum modul $M_{-2c}^{W_\infty}$ ujedno i restringirani modul za Virasorovu algebru i vrijedi

Teorem 4.5. *$(M_{-2c}^{W_\infty}, Y, \mathbf{1}, J_{-2}^1\mathbf{1})$ je algebra verteks operatora jako generirana poljima $J^k(x)$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ gdje je*

$$Y(\cdot, x) : M_{-2c}^{W_\infty} \to (\mathrm{End} M_{-2c}^{W_\infty})[[x, x^{-1}]]$$

jedinstveno proširenje od

$$Y(J_{-k-1}^k\mathbf{1}, x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} J_m^k x^{-k-m-1} = J^k(x).$$

Propozicija 4.6. *Verteks algebra $M_{-2c}^{W_\infty}$ je generirana poljima $J^1(x)$ i $J^2(x)$, odnosno $M_{-2c}^{W_\infty} = \langle J_{-2}^1\mathbf{1}, J_{-3}^2\mathbf{1}\rangle$.*

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom. Zbog

$$J_{-1}^2 J_{-3}^2\mathbf{1} = 4J_{-4}^3\mathbf{1} - 2J_{-4}^2\mathbf{1},$$

slijedi baza indukcije, tj.

$$J_{-4}^3\mathbf{1} \in \langle J_{-2}^1\mathbf{1}, J_{-3}^2\mathbf{1}\rangle.$$

Pretpostavimo da je za neki n, $J_{-n-1}^n\mathbf{1} \in \langle J_{-2}^1\mathbf{1}, J_{-3}^2\mathbf{1}\rangle$. Tada

$$J_{-1}^2 J_{-n-1}^n\mathbf{1} = (n+2)J_{-n-2}^{n+1}\mathbf{1} - 2J_{-n-2}^n\mathbf{1},$$

i time smo pokazali da je i $J_{-n-2}^{n+1}\mathbf{1}$ sadržan u $\langle J_{-2}^1\mathbf{1}, J_{-3}^2\mathbf{1}\rangle$. □

Korolar 4.7. *Svaki $\widehat{\mathcal{D}}^{(1)}-$modul iz kategorije $\mathcal{O}$ centralnog naboja c je modul za $M_{-2c}^{W_\infty}$. Posebno, svaki ireducibilni $\widehat{\mathcal{D}}^{(1)}-$modul najveće težine je modul za $M_{-2c}^{W_\infty}$.*

Poglavlje 5

Singularni vektori u $M_{-2}^{W_\infty}$

U ovom poglavlju eksplicitno konstruiramo singularni vektor na nivou 4 u univerzalnoj verteks–algebri $M_{-2}^{W_\infty}$. Precizno opisujemo najveće težine podmodula najveće težine podmodula generiranog tim singularnim vektorom. Dokazujemo da je kvocijent univerzalne verteks–algebre $M_{-2}^{W_\infty}$ po idealu generiranim tim singularnim vektorom jako generiran s dva vektora. Ovi rezultati će nam biti važni za kasniju identifikaciju tog kvocijenta.

Teorem 5.1. *$M_{-2c}^{W_\infty}$ na nivou 4 ima singularan vektor*

$$v_s = (J_{-4}^3 - J_{-4}^2 + J_{-4}^1 - (J_{-2}^1)^2)\mathbf{1}$$

i to samo za $c = 1$. Na nivoima 2 i 3 nema singularnih vektora.

Dokaz. Vektor na nivou 4 je razapet vektorima baze $J_{-4}^3\mathbf{1}$, $J_{-4}^2\mathbf{1}$, $J_{-4}^1\mathbf{1}$ i $(J_{-2}^1)^2\mathbf{1}$. Singularni vektor, ako postoji, mora biti oblika

$$v_s = (AJ_{-4}^3 + BJ_{-4}^2 + CJ_{-4}^1 + D(J_{-2}^1)^2)\mathbf{1},$$

$A, B, C, D \in \mathbb{C}$.

Da bi bio singularan, mora vrijediti $\widehat{\mathcal{D}}_+^{(1)} v_s = 0$, tj. $J_m^k v_s = 0$, za sve $m > 0$. Imamo relacije:

$$J_m^k J_{-4}^3 = J_{-4}^3 J_m^k + \sum_{i=1}^{\max(k,3)} \left(\binom{3}{i} [k+m]_i - \binom{k}{i} [-1]_i \right) J_{m-4}^{k+3-i} + 6c\delta_{m,4}[-1]_k,$$

$$J_m^k J_{-4}^2 = J_{-4}^2 J_m^k + \sum_{i=1}^{\max(k,2)} \left(\binom{2}{i} [k+m]_i - \binom{k}{i} [-2]_i \right) J_{m-4}^{k+2-i} + 2(k+4)c\delta_{m,4}[-1]_k,$$

$$J_m^k J_{-4}^1 = J_{-4}^1 J_m^k + \sum_{i=1}^{k} \left(\binom{1}{i} [k+m]_i - \binom{k}{i} [-3]_i \right) J_{m-4}^{k+1-i} + \frac{(k+4)(k+3)}{2} c\delta_{m,4}[-1]_k,$$

$$J_m^k (J_{-2}^1)^2 = (J_{-2}^1)^2 J_m^k + 2(k+m) J_{-2}^1 J_{m-2}^k - 2\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} [-1]_i J_{-2}^1 J_{m-2}^{k+1-i} + 2c\delta_{m,2}[-1]_k J_{-2}^1 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \left(\binom{1}{i} [k+m]_i - \binom{k}{i} [-1]_i \right) \sum_{j=1}^{k+i-1} \left(\binom{1}{j} [k+m-1-i]_j - \binom{k+1-i}{j} [-1]_j \right)$$

$$\cdot J_{m-4}^{k+2-i-j} + c\delta_{m,4}\frac{k^2+3k+8}{2}[-1]_k.$$

Jasno je $J_m^k v_s = 0$, za svaki $m > 4$. Za $m = 4$ netrivijalni su samo članovi dobiveni iz kociklusa. Da bi oni bili nula, za svaki prirodan k mora vrijediti

$$6A + 2B(k+4) + C\frac{k^2+7k+12}{2} + D\frac{k^2+3k+8}{2} = 0.$$

Uspoređivanjem koeficijenata uz potencije od k dobijemo sustav

$$6A + 8B + 6C + 4D = 0,$$

$$2B + \frac{7}{2}C + \frac{3}{2}D = 0,$$

$$\frac{C}{2} + \frac{D}{2} = 0,$$

čije je rješenje $(A, -A, A, -A)$, tj.

$$v_s = (J_{-4}^3 - J_{-4}^2 + J_{-4}^1 - (J_{-2}^1)^2)\mathbf{1}.$$

Preostaje pokazati da J_m^k, $m \in \{1, 2, 3\}$ poništavaju v_s. Koristeći gornje formule vidimo da $J_3^k v_s$ sadrži samo članove $J_1^{k_1}\mathbf{1}$ i $J_{-1}^{k_2}\mathbf{1}$ koji su u kvocijentnom modulu 0.

U slučaju $m = 2$

$$J_2^1 v_s = (2c-2)J_{-2}^1\mathbf{1}$$

pa slijedi da centralni naboj nužno mora biti $c = 1$. Uočimo $J_0^2 v_s = -4v_s$ i induktivno pokažimo $J_2^k v_s = 0$ za sve cijele $k \geq 1$. Bazu imamo. Pretpostavimo da tvrdnja $J_2^i v_s = 0$ vrijedi za sve $i \leq k$. Slijedi

$$0 = J_0^2 J_2^k v_s = \sum_{i=1}^{\max(k,2)} A_{0,2}^{2,k}(i) J_2^{k+2-i} v_s + J_2^k J_0^2 v_s = (-4J_2^{k+1} + \sum_{i=2}^{\max(k,2)} A_{0,2}^{2,k}(i) J_2^{k+2-i} - 4J_2^k)v_s.$$

Zbog pretpostavke indukcije

$$(\sum_{i=2}^{\max(k,2)} A_{0,2}^{2,k}(i) J_2^{k+2-i} - 4J_2^k)v_s = 0$$

pa je i $-4J_2^{k+1}v_s = 0$ odnosno $J_2^{k+1}v_s = 0$.

Analogno zbog $J_1^1 v_s = 0$ i $J_0^2 v_s = -4v_s$ induktivno slijedi $J_1^k v_s = 0$ za sve cijele $k \geq 1$.

Time smo pokazali da $v_s = (J_{-4}^3 - J_{-4}^2 + J_{-4}^1 - (J_{-2}^1)^2)\mathbf{1}$ jest singularan vektor za vakuum modul. Direktno vidimo da na nivoima 2 i 3 ne može postojati singularan vektor:

$$J_2^k J_{-2}^1 \mathbf{1} = c\frac{k!}{(k+1)!}[k+2]_2[-1]_k\mathbf{1} \neq 0,$$

$$J_3^k(\alpha J_{-3}^1 + \beta J_{-3}^2)\mathbf{1} = c(\alpha(k+3) + 2\beta)\mathbf{1} \neq 0.$$

□

Metodu iz prethodnog dokaza, iz dijela gdje dokazujemo $J_1^k\mathbf{1} = J_2^k\mathbf{1} = 0$, korisno je zapisati kao lemu, jer će i kasnije biti korisna za provjeru singularnosti vektora na većim nivoima.

Lema 5.2. *Neka je $v \in M_{-2c}^{W_\infty}$ takav da $J_0^2 v = \alpha v$ i $J_m^k v = 0$ za neki $\alpha \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Tada je i $J_m^{k+1} v = 0$.*

Dokaz.

$$0 = J_0^2 J_m^k v = ((2k - 2(k+m))J_m^{k+1} + (k^2 - k - [k+m]_2)J_m^k + J_m^k J_0^2)v =$$

$$= -2m J_m^{k+1} v + \alpha J_m^k v = -2m J_m^{k+1} v,$$

odnosno $J_m^{k+1} v = 0$. □

Vrijedi rezultat o najvećim težinama

Propozicija 5.3. *Za singularni vektor iz Teorema 5.1 vrijedi*

$$J_0^k v_s = 2(\delta_{k,1} - [-1]_k) v_s, \ \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

Dokaz. Rezultat $J_0^2 v_s = -4 v_s$ imamo u dokazu prethodnog teorema. Lako se vidi i $J_0^1 v_s = 4 v_s$, $J_0^3 v_s = 12 v_s$. Induktivna metoda kao u Teoremu 5.1 ne funkcionira jer svi J_0^k međusobno komutiraju. Računamo za $k > 3$:

$$J_0^k v_s = (\sum_{i=1}^{k+3}(\binom{3}{i}[k]_i - \binom{k}{i}[-1]_i)J_{-4}^{k+3-i} - \sum_{i=1}^{k+2}(\binom{2}{i}[k]_i - \binom{k}{i}[-2]_i)J_{-4}^{k+2-i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k}(\binom{1}{i}[k]_i - \binom{k}{i}[-3]_i)J_{-4}^{k+1-i} - \sum_{i=1}^{k}(\binom{1}{i}[k]_i - \binom{k}{i}[-1]_i) \sum_{j=1}^{k+1-i}(\binom{1}{j}[k+1-i]_j -$$

$$- \binom{k+1-i}{j}[-1]_j)J_{-4}^{k+2-j-i} - 2\sum_{i=1}^{k}(\binom{1}{i}[k]_i - \binom{k}{i}[-1]_i)J_{-2}^1 J_{-2}^{k+1-i})\mathbf{1}.$$

Vidimo da je $J_0^k v_s$ zaista na nivou 4. Izračunamo koeficijente uz vektore PBW baze na nivou 4. Najjednostavniji je koeficijent uz $(J_{-2}^1)^2 \mathbf{1}$:

$$-2\sum_{i=1}^{k}(\binom{1}{i}[k]_i - \binom{k}{i}[-1]_i)\delta_{k+1-i,i} = -2(\delta_{k,1} - [-1]_k).$$

Za $k > 3$ koeficijent uz $J_{-4}^3 \mathbf{1}$ je

$$\langle J_{-4}^3 \mathbf{1} \rangle J_0^k v_s = (-[-1]_k) - (-k[-2]_{k-1}) + (-\binom{k}{2}[-3]_{k-2}) - \sum_{i=1}^{k-2}(\delta_{i,1} k - \binom{k}{i}[-1]_i)$$

$$(\delta_{k-i,2}[k+1-i]_{k-1-i} - \binom{k+1-i}{k-1-i}[-1]_{k-1-i}) = [-1]_k(-1 - k - \frac{k^2-k}{4} -$$

$$(-\frac{k}{2} - \frac{3}{2} - \sum_{i=1}^{k-2}\frac{k+1-i}{2})) = -2[-1]_k = 2(\delta_{k,1} - [-1]_k).$$

Slično se provjeri da su i koeficijenti uz $J_{-4}^2 \mathbf{1}$ i $J_{-4}^1 \mathbf{1}$ također $2(\delta_{k,1} - [-1]_k)$.

□

Propozicija 5.4. *Ideal $\langle v_s \rangle$ u $M_{-2}^{W_\infty}$ sadrži vektor*

$$\theta = (-22J_{-6}^1 + 9J_{-2}^1 J_{-4}^2 - 2J_{-2}^1 J_{-4}^1 - \frac{9}{2}(J_{-3}^2)^2 - 9J_{-3}^1 J_{-3}^2 + 8(J_{-3}^1)^2 + 4(J_{-2}^1)^3)\mathbf{1}.$$

Drugim riječima, u kvocijentnom modulu $\bar{L}_{-2}^{W_\infty} = M_{-2}^{W_\infty}/\langle v_s \rangle$ vrijedi relacija

$$(-22J_{-6}^1 + 9J_{-2}^1 J_{-4}^2 - 2J_{-2}^1 J_{-4}^1 - \frac{9}{2}(J_{-3}^2)^2 - 9J_{-3}^1 J_{-3}^2 + 8(J_{-3}^1)^2 + 4(J_{-2}^1)^3)\mathbf{1} = 0.$$

Dokaz. Plan dokaza je da djelovanjem pogodnom linearnom kombinacijom operatora J_{-2}^3, $(J_{-1}^2)^2$, $J_{-1}^1 J_{-1}^2$, $(J_{-1}^1)^2$, J_0^2 na v_s pokažemo da ideal $\langle v_s \rangle$ sadrži θ. Također koristimo relaciju koja slijedi iz singularnog vektora, $J_{-4}^3\mathbf{1} = (J_{-4}^2 - J_{-4}^1 + (J_{-2}^1)^2)\mathbf{1}$. Računamo djelovanja navedenih operatora:

$$J_{-1}^2 v_s = (5J_{-5}^4 - 8J_{-5}^3 + 10J_{-5}^2 - 8J_{-5}^1 - 6J_{-2}^1 J_{-3}^2 + 4J_{-2}^1 J_{-3}^1)\mathbf{1},$$

$$\begin{aligned}(J_{-1}^2)^2 v_s = (30J_{-6}^5 - 66J_{-6}^4 + 128J_{-6}^3 - 156J_{-6}^2 + 88J_{-6}^1 - 24J_{-2}^1 J_{-4}^3 + 32J_{-2}^1 J_{-4}^2 \\ -24J_{-2}^1 J_{-4}^1 - 18(J_{-3}^2)^2 - 8(J_{-3}^1)^2 + 24J_{-3}^1 J_{-3}^2)\mathbf{1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J_{-1}^1 J_{-1}^2 v_s = (5J_{-6}^4 - 16J_{-6}^3 + 30J_{-6}^2 - 32J_{-6}^1 - 6J_{-3}^1 J_{-3}^2 - 6J_{-2}^1 J_{-4}^2 + 4(J_{-3}^1)^2 \\ +8J_{-2}^1 J_{-4}^1)\mathbf{1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J_{-2}^3 v_s = (6J_{-6}^5 - 14J_{-6}^4 + 26J_{-6}^3 - 36J_{-6}^2 + 36J_{-6}^1 - 8J_{-2}^1 J_{-4}^3 + 12J_{-2}^1 J_{-4}^2 \\ -12J_{-2}^1 J_{-4}^1)\mathbf{1},\end{aligned}$$

$$(J_{-1}^1)^2 v_s = (2J_{-6}^3 - 6J_{-6}^2 + 14J_{-6}^1 - 4J_{-2}^1 J_{-4}^1 - 2(J_{-3}^1)^2)\mathbf{1}.$$

Uspoređivanjem i eliminacijom vodećih članova dobijemo

$$\begin{aligned}((J_{-1}^2)^2 - 5J_{-2}^3)v_s = (4J_{-6}^4 - 2J_{-6}^3 + 24J_{-6}^2 - 92J_{-6}^1 + 16J_{-2}^1 J_{-4}^3 - 28J_{-2}^1 J_{-4}^2 \\ +36J_{-2}^1 J_{-4}^1 + 24J_{-3}^1 J_{-3}^2 - 18(J_{-3}^2)^2 - 8(J_{-3}^1)^2)\mathbf{1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-4J_{-1}^1 J_{-1}^2 + 5((J_{-1}^2)^2 - 5J_{-2}^3))v_s = (54J_{-6}^3 - 332J_{-6}^1 + 80J_{-2}^1 J_{-4}^3 - 116J_{-2}^1 J_{-4}^2 \\ +148J_{-2}^1 J_{-4}^1 + 144J_{-3}^1 J_{-3}^2 - 90(J_{-3}^2)^2 - 56(J_{-3}^1)^2)\mathbf{1},\end{aligned}$$

Eliminacijom $J_{-6}^3\mathbf{1}$ pomoću $(J_{-1}^1)^2 v_s$ dobijemo vektor

$$\begin{aligned}\Omega &= (-27(J_{-1}^1)^2 - 4J_{-1}^1 J_{-1}^2 + 5(J_{-1}^2)^2 - 25J_{-2}^3)v_s \\ &= (162J_{-6}^2 - 764J_{-6}^1 + 80J_{-2}^1 J_{-4}^3 - 116J_{-2}^1 J_{-4}^2 + 256J_{-2}^1 J_{-4}^1 - 90(J_{-3}^2)^2 + 144J_{-3}^1 J_{-3}^2 - 2(J_{-3}^1)^2)\mathbf{1} \\ &= (162J_{-6}^2 - 764J_{-6}^1 - 36J_{-2}^1 J_{-4}^2 + 176J_{-2}^1 J_{-4}^1 + 80(J_{-2}^1)^3 - 90(J_{-3}^2)^2 + 144J_{-3}^1 J_{-3}^2 - (J_{-3}^1)^2)\mathbf{1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J_0^2\Omega = (-980J_{-6}^4 + 2688J_{-6}^3 - 6432J_{-6}^2 + 10704J_{-6}^1 - 768J_{-2}^1 J_{-4}^3 + 2744J_{-2}^1 J_{-4}^2 \\ -3584J_{-2}^1 J_{-4}^1 + 864(J_{-3}^2)^2 - 888J_{-3}^1 J_{-3}^2 + 24(J_{-3}^2)^2)\mathbf{1},\end{aligned}$$

Pomoću relacije za $((J_{-1}^2)^2 - 5J_{-2}^3)v_s$ eliminiramo član $J_{-6}^4\mathbf{1}$

$$(245((J_{-1}^2)^2 - 5J_{-2}^3) + J_0^2(-27(J_{-1}^1)^2 - 4J_{-1}^1 J_{-1}^2 + 5(J_{-1}^2)^2 - 25J_{-2}^3))v_s$$

$$\begin{aligned}= (2198J_{-6}^3 - 552J_{-6}^2 - 11836J_{-6}^1 + 3152J{-2}^1 J_{-4}^3 - 4116J_{-2}^1 J_{-4}^2 + 5236J_{-2}^1 J_{-4}^1 \\ -3546(J_{-3}^2)^2 + 4992J_{-3}^1 J_{-3}^2 - 1936(J_{-3}^1)^2)\mathbf{1}\end{aligned}$$

Kombiniranjem sa $(J^1_{-1})^2\mathbf{1}$, iz prethodnog rezultata eliminiramo član $J^3_{-6}\mathbf{1}$ i dobijemo da je vektor

$$\Omega' = (6042J^2_{-6} - 29420J^1_{-6} + 3152J^1_{-2}J^3_{-4} - 4116J^1_{-2}J^2_{-4} + 9632J^1_{-2}J^1_{-4} - 3546(J^2_{-3})^2$$
$$+4992J^1_{-3}J^2_{-3} + 262(J^1_{-3})^2)\mathbf{1},$$

po konstrukciji također sadržan u idealu generiranom singularnim vektorom v_s.

Eliminacijom vodećih koeficijenata u Ω i Ω' dobijemo da je vektor

$$1136(-22J^1_{-6} + 4J^1_{-2}J^3_{-4} + 5J^1_{-2}J^2_{-4} + 2J^1_{-2}J^1_{-4} - \frac{9}{2}(J^2_{-3})^2 - 9J^1_{-3}J^2_{-3} + 8(J^1_{-3})^2)\mathbf{1} =$$

$$= 1136(-22J^1_{-6} + 9J^1_{-2}J^2_{-4} - 2J^1_{-2}J^1_{-4} - \frac{9}{2}(J^2_{-3})^2 - 9J^1_{-3}J^2_{-3} + 8(J^1_{-3})^2 + 4(J^1_{-2})^3)\mathbf{1}$$

sadržan u $\langle v_s\rangle$, pa onda i $\theta \in \langle v_s\rangle$.

$\square$

Korolar 5.5. *$\bar{L}^{W_\infty}_{-2} = M^{W_\infty}_{-2}/\langle v_s\rangle$ ima strukturu algebre verteks operatora.*

Budući da se u literaturi slovom L često označava ireducibilni modul najveće težine, oznaka $\bar{L}$ nam sugerira da nam je taj kvocijent zasad samo kandidat za ireducibilan modul.

Teorem 5.6. *Kvocijentna verteks algebra $\bar{L}^{W_\infty}_{-2}$ je jako generirana poljima $J^1(x)$ i $J^2(x)$.*

Dokaz. Pokažimo prvo da se svi vektori oblika $J^k_m\mathbf{1}$, $k+m<0$ mogu prikazati, odnosno jako generirati, pomoću komponenti dva navedena polja. Uočimo da prikazivost $J^k_{-k-1}\mathbf{1}$ pomoću J^1 i J^2, pomoću derivacije povlači i prikazivost $J^k_m\mathbf{1}$, $m < -k-1$. Bazu matematičke indukcije imamo iz singularnog vektora v_s (koji je u kvocijentu 0), tj.

$$J^3_{-4}\mathbf{1} = (J^2_{-4} - J^1_{-4} + (J^1_{-2})^2)\mathbf{1}.$$

Pretpostavimo da su za sve $i = 1,\ldots,k$, takve da $k \geq 3$, $m+i<0$, J^i_m prikazivi pomoću polja J^1 i J^2. Djelujemo operatorom J^{k-1}_{-k+2} na gornju relaciju. Desna strana je

$$J^{k-1}_{-k+2}(J^2_{-4} - J^1_{-4} + (J^1_{-2})^2)\mathbf{1} = (\sum_{i=1}^{k+1} A^{k-1,2}_{-k+2,-4}(i)J^{k+1-i}_{-k-2} - \sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1,1}_{-k+2,-4}(i)J^{k-i}_{-k-2} +$$

$$2J^1_{-2}\sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1,1}_{-k+2,-2}(i)J^{k-i}_{-k} + \sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-i} A^{k-1,1}_{-k+2,-2}(i)A^{k-i,1}_{-k,-2}(j)J^{k+1-i-j}_{-k-2})\mathbf{1}$$

S druge strane gornji izraz je jednak izrazu

$$J^{k-1}_{-k+2}J^3_{-4}\mathbf{1} = \sum_{i=1}^{k+2}(3\delta_{i,1} - \binom{k-1}{i}[-1]_i)J^{k+2-i}_{-k-2}.$$

U prvoj jednadžbi svi $J^l_m\mathbf{1}$ imaju superindeks $l \leq k$, pa su po pretpostavci indukcije prikazivi pomoću J^1 i J^2. U drugoj jednadžbi je slična situacija, jedina je iznimka član $J^{k+2-1}_{-k-2}\mathbf{1}$. Njegov koeficijent je $3-(k-1)[-1]_1 = k+2$ dakle netrivijalan. Dakle vektor $J^{k+2-1}_{-k-2}\mathbf{1}$ je linearna kombinacija vektora manjeg superindeksa, koji su po pretpostavci prikazivi pomoću polja J^1 i J^2, pa isto možemo zaključiti i za njega.

$\square$

U sljedećem poglavlju povezat ćemo ove rezultate s W-algebrom $\mathcal{W}_{2,3}$, $c=-2$.

Poglavlje 6

Verteks algebra W_∞ sa centralnim nabojem -2 i $\mathcal{W}_{2,3}$–algebra

U ovom poglavlju konstruiramo izomorfizam verteks algebri $\bar{L}_{-2}^{W_\infty}$ i $\mathcal{W}_{2,3}$ sa centralnim nabojem -2. W. Wang je u članku [36] dao fermionsku realizaciju od $\mathcal{W}_{2,3}$ sa centralnim nabojem -2 i klasificirao njene ireducibilne module. Identificirao je singularne vektore na nivou 6 u univerzalnoj verteks-algebri pridruženoj $\mathcal{W}_{2,3}$.

Mi ćemo ovdje napraviti novi pristup verteks–algebri $\mathcal{W}_{2,3}$. Realizirat ćemo $\mathcal{W}_{2,3}$ sa centralnim nabojem -2 kao kvocijent univerzalne verteks algebre pridružene W_∞ s centralnim nabojem -2. Ta verteks algebra ima netrivijalan ideal generiran singularnim vektorom na nivou 4. Prvo pokazujemo da je kvocijent univerzalne verteks-algebre pridružene W_∞ po tom idealu W–algebra tipa $\mathcal{W}_{2,3}$. Nadalje pokazujemo da su i Wangovi singularni vektori za $\mathcal{W}_{2,3}$ nula u kvocijentu. Na taj način identificiramo naš kvocijent algebre W_∞ s $\mathcal{W}_{2,3}$–algebrom iz Wangovog članka. Ove identifikacija je nova.

Definicija 6.1. *$\mathcal{W}_{2,3}$ je univerzalna verteks algebra generirana poljima*

$$L(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L(n)z^{-n-2}, \quad W(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} W(n)z^{-n-3}$$

takvima da su ispunjene relacije

$$[L(m), L(n)] = (m-n)L_(m+n) + \frac{c}{12}(m^3-m)\delta_{m,-n},$$

$$[L(m), W(n)] = (2m-n)W(m+n),$$

$$[W(m), W(n)] = (m-n)\left(\frac{1}{15}(m+n+3)(m+n+2) - \frac{1}{6}(m+2)(n+2)\right)$$
$$L(m+n) + \beta(m-n)\Lambda_{m+n} + \frac{c}{360}[m+2]_5\delta_{m,-n},$$

pri čemu je $c\in\mathbb{C}$ centralni naboj, $\beta = 16/(22+5c)$ i

$$\Lambda_m = \sum_{n\leq -2} L(n)L(m-n) + \sum_{n>-2} L(m-n)L(n) - \frac{3}{10}[m+3]_2 L(m)$$

Univerzalna verteks-algebra $\mathcal{W}_{2,3}$ postoji generički. Njena egzistencija je diskutirana u fizikalnim člancima [38]. Eksplicitan matematički dokaz egzistencije ove univrzalne verteks–algebre dan je u članku A. De Solea i V. G. Kaca [16]. Njihova konstrukcija koristi nelinearne konformne algebre. Zbog svega toga je gornja definicija korektna.

Verteks algebru $\mathcal{W}_{2,3}$ generiraju vektori $W(-3)\mathbf{1}$ i $L(-2)\mathbf{1}$. $W(n)\mathbf{1} = L(m)\mathbf{1} = 0$, za sve $n > -3$, $m > -2$. Ponekad nam je korisno koristiti pomaknutu indeksaciju $L_n = (L(-2)\mathbf{1})_n = L(n-1)$, $W_n = (W(-3)\mathbf{1})_n = W(n-2)$.

Teorem 6.2 ([36], Lema 2.1). *1) Ne postoji singularan vektor u $(\mathcal{W}_{2,3})_n$, $n < 6$.*

2) Postoje dva linearno nezavisna singularna vektora u $(\mathcal{W}_{2,3})_6$,

$$v_s = (\frac{3}{2}W_{-3}^2 - \frac{19}{36}L_{-3}^2 - \frac{8}{9}L_{-2}^3 - \frac{14}{9}L_{-2}L_{-4} + \frac{44}{9}L_{-6})\mathbf{1}$$

$$v_s' = (\frac{9}{2}W_{-6} + 9L_{-3}W_{-3} - 6L_{-2}W_{-4})\mathbf{1}$$

3)

$$v_s' = \frac{27}{98}W_0 v_s, \quad v_s = \frac{1}{36}W_0 v_s'$$

4)

$$W_0(6v_s \pm \frac{98}{27}v_s') = \pm 6(v_s \pm \frac{98}{27}v_s').$$

Želimo imitirati Propoziciju 2.7, tj. pokazati da su pomoću konačno mnogo netrivijalnih (i beskonačno mnogo trivijalnih) relacija za djelovanja

$$\bar{L}_n\bar{L}, \quad \bar{L}_n\bar{W}, \quad \bar{W}_n\bar{W}$$

zadane relacije $\mathcal{W}_{2,3}$ algebre.

Teorem 6.3. *Ako je verteks algebra V generirana poljima*

$$\bar{L}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{L}(n)z^{-n-2} \quad \text{i} \quad \bar{W}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{W}(n)z^{-n-3}$$

takvima da su ispunjene relacije

$$\bar{W}_0\bar{W} = \bar{W}(-2)\bar{W}(-3)\mathbf{1} = (-\frac{10}{3}\bar{L}(-5) + \frac{8}{3}\bar{L}(-2)\bar{L}(-3))\mathbf{1}$$

$$\bar{W}_1\bar{W} = (-\bar{L}(-4) + \frac{8}{3}\bar{L}(-2)^2)\mathbf{1}, \quad \bar{W}_2\bar{W} = \bar{L}(-3)\mathbf{1}, \quad \bar{W}_3\bar{W} = 2\bar{L}(-2)\mathbf{1},$$

$$\bar{W}_4\bar{W} = 0, \quad \bar{W}_5\bar{W} = \frac{c}{3}\mathbf{1}, \quad \bar{W}_n\bar{W} = 0, \quad \text{za}\, n \geq 6,$$

$$\bar{L}_0\bar{L} = \frac{1}{2}\bar{L}, \quad \bar{L}_1\bar{L} = D\bar{L}, \quad \bar{L}_2\bar{L} = 0, \quad \bar{L}_3\bar{L} = \frac{c}{2}\mathbf{1}, \quad \bar{L}_n\bar{L} = 0, \text{za}\, n \geq 4,$$

$$\bar{L}_0\bar{W} = D\bar{W}, \quad \bar{L}_1\bar{W} = 3\bar{W}, \quad \bar{L}_n\bar{W} = 0, \quad \text{za}\, n \geq 2,$$

tada postoji homomorfizam verteks algebri $\mathcal{W}_{2,3} \to V$, definiran sa

$$W(z) \mapsto \bar{W}(z),$$

$$L(z) \mapsto \bar{L}(z).$$

Dokaz. Teorem dokazujemo direktno, uvrštavanjem u relacije $\mathcal{W}_{2,3}$ algebre.

$$W_0 W = W(-2)W(-3)\mathbf{1} = (\frac{2}{5}L(-5) + \frac{4}{3}(L(-2)L(-3) + L(-3)L(-2))$$
$$-\frac{12}{5}L(-5))\mathbf{1} = (-2L(-5) + \frac{8}{3}L(-2)L(-3) - \frac{4}{3}L(-5))\mathbf{1} =$$
$$= (-\frac{10}{3}L(-5) + \frac{8}{3}L(-2)L(-3))\mathbf{1},$$

$$W_1 W = W(-1)W(-3)\mathbf{1} = (2(\frac{1}{15}(-4+3)(-4+2) - \frac{1}{6}(-1))L(-4)$$
$$+2\frac{4}{3}((L(-2))^2 - \frac{3}{10}[-1]_2 L(-4)))\mathbf{1} = (-L(-4) + \frac{8}{3}L(-2)^2)\mathbf{1}.$$

$$W_2 W = W(0)W(-3)\mathbf{1} = (3(\frac{1}{15}\cdot 0\cdot(-1) - \frac{1}{6}\cdot 2\cdot(-1))L(-3)$$
$$+\frac{4}{3}\cdot 3\cdot(0 - \frac{3}{10}[0]_5 L(-3)))\mathbf{1} = L(-3)\mathbf{1},$$

$$W_3 W = W(1)W(-3)\mathbf{1} = (4(\frac{1}{15}\cdot 0\cdot(1) - \frac{1}{6}\cdot 3\cdot(-1))L(-2)$$
$$+\frac{4}{3}\cdot 4\cdot(0 - \frac{3}{10}[1]_5 L(-2)))\mathbf{1} = 2L(-2)\mathbf{1},$$

$$W_4 W = W(2)W(-3)\mathbf{1} = (5(\frac{1}{15}\cdot 1\cdot 2 - \frac{1}{6}\cdot 4\cdot(-1))L(-1)$$
$$+\frac{4}{3}\cdot 5\cdot(-\frac{3}{10}[2]_5 L(-1)))\mathbf{1} = \alpha L(-1)\mathbf{1} = 0,$$

$$W_5 W = W(3)W(-3)\mathbf{1} = (6(\frac{1}{15}\cdot 2\cdot 3 - \frac{1}{6}\cdot 5\cdot(-1))L(0)$$
$$+\frac{4}{3}\cdot 6\cdot(-\frac{3}{10}[3]_5 L(0)) + \frac{c}{360}\cdot 5!)\mathbf{1} = \frac{c}{3}\mathbf{1}$$

□

Sada promatramo slučaj za centralni naboj $c = -2$ da bismo uspostavili vezu sa $\bar{L}_{-2}^{W_\infty}$.

Teorem 6.4. *Preslikavanje* $\Phi : \mathcal{W}_{2,3} \to \bar{L}_{-2}^{W_\infty}$ *definirano sa*

$$L(n) \mapsto J_n^1, \quad W(n) \mapsto \sqrt{\frac{2}{3}}(J_n^2 + \frac{n+2}{2}J_n^1),$$

odnosno

$$L(x) \mapsto J^1(x), \quad W(x) \mapsto \sqrt{\frac{2}{3}}(J^2(x) - \frac{1}{2}DJ^1(x))$$

je homomorfizam verteks algebri.

Dokaz. Prve dvije relacije iz definicije algebre $\mathcal{W}_{2,3}$ provjerimo direktno

$$[L(m), L(n)] = [J^1_m, J^1_n] = ((m+1)-(n+1))J^{1+1-1}_{m+n} + c\delta_{m,-n}\frac{[m+1]_2[1-m]_1}{3!}$$

$$= (m-n)L(m+n) + \frac{\delta_{m,-n}(m-m^3)}{6}$$

$$[L(m), W(n)] = [J^1_m, \sqrt{\frac{2}{3}}(J^2_n + \frac{n+2}{2}J^1_n)] = \sqrt{\frac{2}{3}}([J^1_m, J^2_n] + \frac{n+2}{2}[J^1_m, J^1_n]) =$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}((2(m+1)-(n+2))J^2_{m+n} + [m+1]_2 J^1_{m+n} + c\delta_{m,-n}\frac{2}{24}[m+1]_3(2-m) +$$

$$\frac{n+2}{2}((m-n)J^1_{m+n} + c\delta_{m,-n}\frac{1}{6}(m-m^3))) = \sqrt{\frac{2}{3}}((2m-n)J^2_{m+n}$$

$$+\frac{m+n+2}{2}(2m-n)J^1_{m+n}) = (2m-n)W(m+n).$$

Zbog Teorema 6.3 dovoljno je provjeriti da vrijede relacije iz tog teorema da bi slijedila relacija za komutator $[W(m), W(n)]$ iz definicije $\mathcal{W}_{2,3}$ verteks algebre.

$$W_0W = W(-2)W(-3)\mathbf{1} = \sqrt{\frac{2}{3}}J^2_{-2}\sqrt{\frac{2}{3}}(J^2_{-3} - \frac{1}{2}J^1_{-3})\mathbf{1} =$$

$$\frac{2}{3}(2J^3_{-5} - 4J^2_{-5} + 3J^1_{-5})\mathbf{1} = \frac{2}{3}(2(2J^2_{-5} - 4J^1_{-5} + 2J^1_{-2}J^1_{-3}) - 4J^2_{-5} + 3J^1_{-5})\mathbf{1} =$$

$$(\frac{-10}{3}J^1_{-5} + \frac{8}{3}J^1_{-2}J^1_{-3})\mathbf{1}.$$

$$W_1W = W(-1)W(-3)\mathbf{1} = \frac{2}{3}(J^2_{-1} + \frac{1}{2}J^1_{-1})(J^2_{-3} - \frac{1}{2}J^1_{-3})\mathbf{1} = \frac{2}{3}(4J^3_{-4} - 4J^2_{-4}$$

$$+\frac{5}{2}J^1_{-4})\mathbf{1} = \frac{2}{3}(-\frac{3}{2}J^1_{-4} + 4(J^1_{-2})^2)\mathbf{1} = (-L(-4) + \frac{8}{3}L(-2)^2)\mathbf{1}.$$

$$W_2W = W(0)W(-3)\mathbf{1} = \frac{2}{3}(J^2_0 + J^1_0)(J^2_{-3} - \frac{1}{2}J^1_{-3})\mathbf{1} = \frac{2}{3}\frac{3}{2}J^1_{-3}\mathbf{1} = L(-3)\mathbf{1}.$$

$$W_3W = W(1)W(-3)\mathbf{1} = \frac{2}{3}(J^2_1 + \frac{3}{2}J^1_1)(J^2_{-3} - \frac{1}{2}J^1_{-3})\mathbf{1} = 2J^1_{-2}\mathbf{1} = 2L(-2)\mathbf{1}.$$

$$W_4W = W(2)W(-3)\mathbf{1} = \frac{2}{3}(J^2_2 + 2J^1_2)(J^2_{-3} - \frac{1}{2}J^1_{-3})\mathbf{1} = 0.$$

$$W_5W = W(3)W(-3)\mathbf{1} = \frac{2}{3}(J^2_3 + \frac{5}{2}J^1_3)(J^2_{-3} - \frac{1}{2}J^1_{-3})\mathbf{1} = \frac{-2}{3}\mathbf{1}.$$

□

Već smo izračunali u Propoziciji 5.4 da je vektor

$$\theta = (-22J^1_{-6} + 9J^1_{-2}J^2_{-4} - 2J^1_{-2}J^1_{-4} - \frac{9}{2}(J^2_{-3})^2 - 9J^1_{-3}J^2_{-3} + 8(J^1_{-3})^2 + 4(J^1_{-2})^3)\mathbf{1}$$

sadržan u idealu generiranom singularnim vektorom $v_s = (J^3_{-4} - J^2_{-4} + J^1_{-4} - (J^1_{-2})^2)\mathbf{1}$, odnosno $\theta = 0$ u $\bar{L}^{W_\infty}_{-2}$. Zapišimo θ u terminima $L(n) = J^1_n$ i $W(n) = \sqrt{\frac{2}{3}}(J^2_n + \frac{n+2}{2}J^1_n)$:

$$\begin{aligned}
&(-22J^1_{-6} + 9J^1_{-2}J^2_{-4} - 2J^1_{-2}J^1_{-4} - \frac{9}{2}(J^2_{-3})^2 - 9J^1_{-3}J^2_{-3} + 8(J^1_{-3})^2 + 4(J^1_{-2})^3)\mathbf{1} \\
&= -22L_{-6} + 9L_{-2}(\sqrt{\frac{3}{2}}W_{-4} + L_{-4}) - 2L_{-2}L_{-4} + 4L^3_{-2} - \frac{9}{2}(\sqrt{\frac{3}{2}}W_{-3} + \frac{1}{2}L_{-3})^2 \\
&\qquad - 9L_{-3}(\sqrt{\frac{3}{2}}W_{-3} + \frac{1}{2}L_{-3}) + 8L^2_{-3} \\
&= -22L_{-6} + \frac{19}{8}L^2_{-3} + 4L^3_{-2} - \frac{27}{4}W^2_{-3} + 7L_{-2}L_{-4} \\
&\qquad - \sqrt{\frac{3}{2}}(\frac{27}{4}W_{-6} + \frac{27}{2}L_{-3}W_{-3} - 9L_{-2}W_{-4})
\end{aligned}$$

Teorem 6.5. *Neka su*

$$v_s = (\frac{3}{2}W^2_{-3} - \frac{19}{36}L^2_{-3} - \frac{8}{9}L^3_{-2} - \frac{14}{9}L_{-2}L_{-4} + \frac{44}{9}L_{-6})\mathbf{1}$$

$$v'_s = (\frac{9}{2}W_{-6} + 9L_{-3}W_{-3} - 6L_{-2}W_{-4})\mathbf{1}$$

linearno nezavisni singularni vektori iz Teorema 6.2. Vrijedi $\Phi(v_s) = \Phi(v_{s'}) = 0$, *odnosno* $\langle v_s, v_{s'}\rangle \subset \operatorname{Ker}\Phi$.

Dokaz. Gornjim računom je pokazano

$$0 = \theta = -\frac{9}{2}\Phi(v_s) + \frac{3}{2}\Phi(v'_s).$$

Teorem 6.2 također sadrži formule $v'_s = \frac{27}{98}W_0 v_s$, $v_s = \frac{1}{36}W_0 v'_s$ koje povezuju dva singularna vektora. Stoga

$$0 = W_0(-\frac{9}{2}\Phi(v_s) + \frac{3}{2}\Phi(v'_s)) = \frac{-9\cdot 98}{54}\Phi(v'_s) + 54\Phi(v_s)$$

. Determinanta sustava je $9\cdot 49/6 - 81 \neq 0$ pa je nužno $\Phi(v_s) = \Phi(v'_s) = 0$. □

Teorem 6.6. $\bar{L}_{\mathcal{W}_{2,3}} = \mathcal{W}_{2,3}/\langle v_s, v'_s\rangle$ *je izomorfna sa* $\bar{L}^{W_\infty}_{-2}$.

Dokaz. Injektivnost slijedi iz Teorema 6.5, a surjektivnost iz činjenice da je $\bar{L}^{W_\infty}_{-2}$ jako generirana poljima $J^1(z)$ i $J^2(z)$ (Teorem 5.6). □

Poglavlje 7

Singularni vektori za W_∞ do nivoa 10 za općenit centralni naboj

U ovom poglavlju klasificiramo centralne naboje za koje postoji singularni vektor u $M_{-2c}^{W_\infty}$ za $\widehat{\mathcal{D}}^{(1)}$ do nivoa 10. Dajemo eksplicitne formule za singularne vektore za u slučajevima $c \in \{-1, 2, 3, 4\}$. Pomoću eksplicitnih formula za te singularne vektore dokazujemo da je pripadni kvocijent jako generiran Virasorovim vektorom i primarnim vektorima težine $3, 4, 5$ u slučajevima $c \in \{-1, 2\}$. Ti rezultati će nam biti važni u sljedećim poglavljima.

Teorem 7.1. *Verteks algebra $M_{-2c}^{W_\infty}$ na nivoima 5, 7, 9 nema singularnih vektora. Na nivou 6 ima singularan vektor samo ako je centralni naboj $c \in \{2, -1\}$. Za $c = 2$*

$$v_s = (\frac{3}{2}J^5_{-6} - 3J^4_{-6} + 5J^3_{-6} - 6J^2_{-6} + 6J^1_{-6} - 3J^1_{-2}J^3_{-4} + 3J^1_{-2}J^2_{-4} - 3J^1_{-2}J^1_{-4}$$

$$+(J^1_{-2})^3)\mathbf{1},$$

a za $c = -1$

$$v_s = (\frac{1}{12}J^5_{-6} + \frac{-1}{6}J^4_{-6} + J^3_{-6} - J^2_{-6} + J^1_{-2}J^3_{-4} - J^1_{-2}J^2_{-4} - (J^2_{-3})^2 + J^1_{-3}J^2_{-3})\mathbf{1}.$$

Na nivou 8 ima singularan vektor samo za $c = 3$:

$$v_s = (-54J^1_{-8} + 78J^2_{-8} - 90J^3_{-8} + 60J^4_{-8} - 27J^5_{-8} + 9J^6_{-8} - 3J^7_{-8} + 24J^1_{-2}J^1_{-6}$$

$$-24J^1_{-2}J^2_{-6} + 20J^1_{-2}J^3_{-6} - 12J^1_{-2}J^4_{-6} + 6J^1_{-2}J^5_{-6} + 3J^1_{-4}J^1_{-4} - 6J^1_{-2}J^1_{-2}J^1_{-4}$$

$$-6J^1_{-4}J^2_{-4} + 3J^2_{-4}J^2_{-4} + 6J^1_{-2}J^1_{-2}J^2_{-4} + 6J^1_{-4}J^3_{-4} - 6J^2_{-4}J^3_{-4} + 3J^3_{-4}J^3_{-4}$$

$$-6J^1_{-2}J^1_{-2}J^3_{-4} + J^1_{-2}J^1_{-2}J^1_{-2}J^1_{-2})\mathbf{1}$$

Na nivou 10 ima singularan vektor samo za $c = 4$:

$$v_s = (15120J^1_{-10} - 15120J^2_{-10} + 9180J^3_{-10} - 4140J^4_{-10} + 1494J^5_{-10} - 450J^6_{-10}$$

$$+120J^7_{-10} - 30J^8_{-10} + \frac{15}{2}J^9_{-10} - 270J^1_{-2}J^1_{-8} + 390J^1_{-2}J^2_{-8} - 450J^1_{-2}J^3_{-8} + 300J^1_{-2}J^4_{-8}$$

$$-135J^1_{-2}J^5_{-8} + 45J^1_{-2}J^6_{-8} - 15J^1_{-2}J^7_{-8} - 60J^1_{-4}J^1_{-6} + 60J^2_{-4}J^1_{-6} - 60J^3_{-4}J^1_{-6}$$

$$+60(J^1_{-2})^2J^1_{-6} + 60J^1_{-4}J^2_{-6} - 60J^2_{-4}J^2_{-6} + 60J^3_{-4}J^2_{-6} - 60(J^1_{-2})^2J^2_{-6} - 50J^1_{-4}J^3_{-6}$$

$$+50J^2_{-4}J^3_{-6}-50J^3_{-4}J^3_{-6}+50(J^1_{-2})^2J^3_{-6}+30J^1_{-4}J^4_{-6}-30J^2_{-4}J^4_{-6}+30J^3_{-4}J^4_{-6}$$
$$-30(J^1_{-2})^2J^4_{-6}-15J^1_{-4}J^5_{-6}+15J^2_{-4}J^5_{-6}-15J^3_{-4}J^5_{-6}+15(J^1_{-2})^2J^5_{-6}+15J^1_{-2}(J^1_{-4})^2$$
$$-10(J^1_{-2})^3J^1_{-4}-30J^1_{-2}J^1_{-4}J^2_{-4}+15J^1_{-2}(J^2_{-4})^2+10(J^1_{-2})^3J^2_{-4}+30J^1_{-2}J^1_{-4}J^3_{-4}$$
$$-30J^1_{-2}J^2_{-4}J^3_{-4}+15J^1_{-2}(J^3_{-4})^2-10(J^1_{-2})^3J^3_{-4}+(J^1_{-2})^5)\mathbf{1}$$

Dokaz. Djelovanjem operatora J^1_1,J^2_1 i J^1_5 na općenit vektor $v_s=(a_1J^4_{-5}+a_2J^3_{-5}+a_3J^2_{-5}+a_4J^1_{-5}+a_5J^1_{-2}J^2_{-3}+a_6J^1_{-2}J^1_{-3})\mathbf{1}$ sa nivoa 5 dobijemo sustav 6 jednadžbi koji je ranga 6 pa nema netrivijalnih rješenja:

$$12a_1+8a_2=0$$
$$6a_2+7a_3+3a_5=0$$
$$2a_3+6a_4+6a_6=0$$
$$6a_6=0$$
$$20a_4+34a_6=0$$
$$-24a_1-36a_2-30a_3-20a_4-14a_5-28a_6=0.$$

Dakle, nema ni singularnog vektora na nivou 5, bez obzira na centralni naboj c.

Vektor na nivou 6 mora biti oblika $v_s=(a_1J^5_{-6}+a_2J^4_{-6}+a_3J^3_{-6}+a_4J^2_{-6}+a_5J^1_{-6}+a_6J^1_{-2}J^3_{-4}+a_7J^1_{-2}J^2_{-4}+a_8J^1_{-2}J^1_{-4}+a_9(J^1_{-2})^3+a_{10}(J^2_{-3})^2+a_{11}J^1_{-3}J^2_{-3}+a_{12}(J^1_{-3})^2)\mathbf{1}$, za neke kompleksne a_i, $i=1,..,12$.

Djelovanjem operatorima J^1_1, J^2_1 i J^3_1 dobijemo sustav od 18 jednadžbi koji je ranga 10. Zapisane su one međusobno nezavisne

$$20a_1+10a_2=0$$
$$12a_2+9a_3+3a_6+10a_{10}=0$$
$$6a_3+8a_4+6a_7-8a_{10}=0$$
$$2a_4+7a_5+9a_8-3a_9-4a_{10}-2a_{11}-4a_{12}=0$$
$$6a_6+6a_7+4a_{10}+4a_{11}=0$$
$$2a_7+5a_8+9a_{10}+2a_{11}+8a_{12}=0$$
$$60a_1+30a_2+15a_3+25a_6+40a_{10}=0$$
$$24a_2+6a_3+14a_4-12a_6+30a_7-40a_{10}+14a_{11}=0$$
$$6a_3-14a_4+13a_5-34a_7+35a_8+15a_9+40a_{10}-14a_{11}+28a_{12}=0$$
$$60a_8+180a_9+48a_{12}=0.$$

Dva linearno nezavisna rješenja tog sustava su

$$(\frac{3}{2},-3,5,-6,6,-3,3,-3,1,0,0,0)$$

i

$$(\frac{1}{12},\frac{-1}{6},1,-1,0,1,-1,0,0,-1,1,0).$$

Drugim riječima, singularni vektor, ako postoji, mora biti u linearnoj ljusci vektora

$$v_{s,2} = (\frac{3}{2}J^5_{-6} - 3J^4_{-6} + 5J^3_{-6} - 6J^2_{-6} + 6J^1_{-6} - 3J^1_{-2}J^3_{-4} + 3J^1_{-2}J^2_{-4} - 3J^1_{-2}J^1_{-4} + (J^1_{-2})^3)\mathbf{1},$$

$$v_{s,-1} = (\frac{1}{12}J^5_{-6} + \frac{-1}{6}J^4_{-6} + J^3_{-6} - J^2_{-6} + J^1_{-2}J^3_{-4} - J^1_{-2}J^2_{-4} - (J^2_{-3})^2 + J^1_{-3}J^2_{-3})\mathbf{1}.$$

Djelovanje operatorima J^k_m za $m = 5$ ili $m > 6$ očito poništava gornje vektore, jer $M^{W_\infty}_{-2c}$ nema vektora na nivou 1. Već imamo $J^1_1 v_{s,2} = J^1_1 v_{s,-1} = 0$. Direktnim računom se vidi

$$J^2_0 v_{s,2} = -6v_{s,2},\ J^1_2 v_{s,2} = (3c-6)(J^3_{-4} - J^2_{-4} + J^1_{-4} - (J^1_{-2})^2)\mathbf{1},$$
$$J^1_3 v_{s,2} = J^1_4 v_{s,2} = J^1_6 v_{s,2} = 0.$$

Da bi J^1_2 poništavao $v_{s,2}$ mora biti $c = 2$. Zbog Leme 5.2 vidimo $\widehat{\mathcal{D}}^{(1)}_+ v_{s,2} = 0$, tj. $v_{s,2}$ zaista jest singularni vektor za $c = 2$.

Razmotrimo sad drugog kandidata za singularni vektor, $v_{s,-1}$. Vrijede relacije

$$J^1_2 v_{s,-1} = (c+1)(-J^3_{-4} + J^2_{-4}),\ J^1_3 v_{s,-1} = -2(c+1)J^1_{-3},$$

$$J^1_4 v_{s,-1} = 4(c+1)J^1_{-2},\ J^1_6 v_{s,-1} = 0.$$

Da bi $v_{s,-1}$ bio singularan, zbog gornjih jednakosti mora biti $c = -1$. Zbog Leme 5.2 vidimo da je $v_{s,-1}$ singularan za centralni naboj $c = -1$.

Eventualni treći singularni vektor v bi morao biti oblika $\alpha v_{s,2} + \beta v_{s,-1}$. Djelovanjem operatorima J^1_3 i J^1_2 vidimo $\alpha = \beta = 0$.

Za singularne vektore na višim nivoima imitiramo ovu proceduru. Za vektor v na nivou n znamo da je oblika

$$v = \sum \alpha_i v_i,$$

gdje su $v_i = (\prod_{j=1}^r J^{k_j}_{m_j})\mathbf{1}$ vektori PBW baze iz Propozicije 4.2 takvi da

$$m_1 + \cdots + m_r = n.$$

Na v djelujemo operatorima J^k_m za 'male' $m = 1, \ldots, n$, $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ i koristeći komutacijske relacije u $\widehat{\mathcal{D}}^{(1)}$ dobijemo sustav jednadžbi $Ax = 0$ po koeficijentima $x = (\alpha_i)$. Ukoliko je prostor rješenja dimenzije veće od 1, uzmemo novi operator J^{k+1}_m. Komutacijskim relacijama iz nužnog uvjeta singularnosti $J^{k+1}_m v = 0$ dobijemo novi sustav $A'x = 0$, tako da retke matrice A' koji su linearno nezavisni sa retcima od A 'dodamo' sustavu $Ax = 0$. Ukoliko $J^{k+1}_m v = 0$ nije producirao nijednu jednadžbu linearno nezavisnu sa $Ax = 0$, prelazimo na uvjet $J^1_{m+1} v = 0$.

Budući da je za nivoe veće od 5 riječ o velikim sustavima jednadžbi koristimo softver za svođenje uvjeta $J^k_m v = 0$ na sustav jednadžbi $A'x = 0$.

Ukoliko u nekom koraku dobijemo da je defekt $d(A) = 0$, zaključujemo da singularni vektor ne postoji, i to je slučaj na nivoima 7 i 9. Ako dobijemo $d(A) = 1$ dobili smo vektor v koji ispunjava nužne uvjete singularnosti, poništavaju ga *neki* od operatora J^k_m, $m > 0$. Da bi provjerili da ga poništavaju *svi* takvi J^k_m, dovoljna nam je provjera da je v svojstveni vektor za J^2_0 te da ga poništavaju J^1_m, $m = 1, \ldots, n$. Time smo u uvjetima Leme 5.2 i v jest singularan vektor. Na ovaj način dobijemo preostale singularne vektore iz teorema. □

Teorem 7.2. *$\bar{L}^{W_\infty}_{-2c} = M^{W_\infty}_{-2c}/\langle v_s \rangle$ je jako generirana poljima $J^1(z)$, $J^2(z)$, $J^3(z)$ i $J^4(z)$, za $c \in \{-1, 2\}$.*

Dokaz. Postupamo kao kod Teorema 5.6.

Ako je $J^k_{-k-1}\mathbf{1}$ jako generiran sa $J^1(z)$, $J^2(z)$, $J^3(z)$ i $J^4(z)$, pomoću derivacije zaključujemo da je i svaki $J^k_m\mathbf{1}$, $m < -k-1$ prikaziv na taj način, pa onda i svi monomi oblika $(\prod_{i=1}^r J^{k_i}_{m_i})\mathbf{1}$, $k_i \leq k$.

Baza matematičke indukcije, odnosno prikazivost vektora $J^5_{-6}\mathbf{1}$, slijedi iz singularnih vektora $v_{s,c}$,

$$J^5_{-6}\mathbf{1} = \frac{2}{3}(3J^4_{-6} - 5J^3_{-6} + 6J^2_{-6} - 6J^1_{-6} + 3J^1_{-2}J^3_{-4} - 3J^1_{-2}J^2_{-4} + 3J^1_{-2}J^1_{-4} - (J^1_{-2})^3)\mathbf{1},$$

za $c = 2$, odnosno

$$J^5_{-6}\mathbf{1} = 12(\frac{1}{6}J^4_{-6} - J^3_{-6} + J^2_{-6} - J^1_{-2}J^3_{-4} + J^1_{-2}J^2_{-4} + (J^2_{-3})^2 - J^1_{-3}J^2_{-3})\mathbf{1}.$$

za $c = -1$.

Pretpostavimo da su za sve $i \leq k$, $J^i_m\mathbf{1}$ prikazivi pomoću dana 4 polja. Vektor $J^{k-3}_{-k+4}v_{s,c}$ je sadržan u idealu generiranom singularnim vektorom, odnosno iznosi 0 u kvocijentu. Naprimjer za $c = 2$ imamo

$$J^{k-3}_{-k+4}(J^5_{-6} - 2J^4_{-6} + \frac{10}{3}J^3_{-6} - 4J^2_{-6} + 4J^1_{-6} - 2J^1_{-2}J^3_{-4} + 2J^1_{-2}J^2_{-4}$$

$$-2J^1_{-2}J^1_{-4} - \frac{2}{3}(J^1_{-2})^3)\mathbf{1} = 0.$$

Zbog komutacijskih relacija u $\widehat{\mathcal{D}}^{(1)}$ od prvog monoma dobijemo

$$J^{k-3}_{-k+4}J^5_{-6}\mathbf{1} = \sum_{i=1}^{\max\{k-3,5\}} \left(\binom{5}{i}[1]_i - \binom{k-3}{i}[-1]_i\right) J^{k+2-i}_{-k-2}\mathbf{1}$$

pa je jedini član koji ima superindeks veći od k onaj vodeći, tj. $J^{k+2-1}_{-k-2}\mathbf{1}$ i njegov koeficijent je $5 + (k-3) = k+2 \neq 0$. Svi ostali članovi su manjeg superindeksa, po pretpostavci indukcije prikazivi pomoću $J^1(z)$, $J^2(z)$, $J^3(z)$ i $J^4(z)$. Ostali monomi u izrazu $J^{k-3}_{-k+4}v_{s,c}$ su oblika

$$J^{k-3}_{-k+4}(\prod_{i=1}^{r} J^{k_i}_{m_i})\mathbf{1},$$

pri čemu su svi $k_i \leq 4$, štoviše, $\sum_{i=1}^r k_i \leq 4$. To znači da komutiranjem nadesno operatora J^{k-3}_{-k+4} koji anihilira vakuum, možemo dobiti operator superindeksa najviše

$$k - 3 + \sum k_i - r \leq k.$$

Induktivna pretpostavka povlači da su monomi $J^{k-3}_{-k+4}(\prod_{i=1}^r J^{k_i}_{m_i})\mathbf{1}$ jako generirani poljima $J^l(z)$, $l = 1, 2, 3, 4$, pa pa je i $J^{k+1}_{-k-2}\mathbf{1}$ jako generiran sa ta 4 polja. $\square$

Poglavlje 8

Primarni vektori u W_∞

Motivirani rezultatima iz prethodnog poglavlja klasificiramo primarne vektore u verteks–algebri $M_{-2c}^{W_\infty}$ koji imaju konformne težine $3, 4, 5$.

Budući da je $M_{-2c}^{W_\infty}$ algebra verteks operatora (teorem 4.5), tada je ona i modul za Virasorovu algebru $Vir^+(\beta)$ centralnog naboja $-2c$ za $\beta = 0$. U tom slučaju nas zanimaju singularni vektori u $M_{-2c}^{W_\infty}$ za Virasorovu algebru. Takvi vektori se nazivaju **primarnim vektorima** i zbog uvjeta singularnosti moraju ispunjavati

$$L(n)v = 0, \quad \text{za sve } \ n \geq 1.$$

Na nivou 3, primarni vektor w_3, ako postoji, mora biti oblika

$$w_3 = (\alpha J_{-3}^2 + \beta J_{-3}^1)\mathbf{1}$$

za neke kompleksne skalare α i β. Ovaj vektor je očito anihiliran sa svakim $L(n)$, $n \geq 2$. Preostaje iz uvjeta da djelovanje operatora $L(1)$ anihilira w_3 odrediti skalare α i β.

$$L(1)w_3 = J_1^1(\alpha J_{-3}^2 + \beta J_{-3}^1)\mathbf{1} = (\alpha(5J_{-2}^2 + 2J_{-2}^1) + \beta(4J_{-2}^1))\mathbf{1} = (2\alpha + 4\beta)J_{-2}^1\mathbf{1}$$

Vidimo da će to biti 0 ako i samo ako $\alpha = -2\beta$, pa

$$w_3 = (J_{-3}^2 + \frac{-1}{2}J_{-3}^1)\mathbf{1}$$

zaista jest primarni vektor.

Uočimo da smo ovaj vektor već koristili u Teoremu 6.4 za konstrukciju homomorfizma $\mathcal{W}_{2,3} \to \bar{L}_{-2c}^{W_\infty}$ za centralni naboj -2.

Sad želimo sličnim pristupom povezati verteks algebru $\mathcal{W}_{2,3,4,5}$ i $\bar{L}_{-2c}^{W_\infty}$. $\mathcal{W}_{2,3,4,5}$ je generirana sa 3 primarna vektora konformnih težina 3, 4 i 5, pa nam trebaju primarni vektori w_3, w_4 i w_5 u $M_{-2c}^{W_\infty}$.

Teorem 8.1. *Primarni vektori u $M_{-2c}^{W_\infty}$ na nivoima 3, 4 i 5 su dani formulama*

$$w_3 = (J_{-3}^2 + \frac{-1}{2}J_{-3}^1)\mathbf{1},$$

$$w_4 = (\frac{5c-11}{6}J_{-4}^3 + \frac{11-5c}{6}J_{-4}^2 + \frac{c-4}{3}J_{-4}^1 + (J_{-2}^1)^2)\mathbf{1}$$

$$w_5 = (\frac{7c-57}{60}J_{-5}^4 + \frac{57-7c}{40}J_{-5}^3 + \frac{3c-33}{20}J_{-5}^2 + \frac{21-c}{20}J_{-5}^1 - \frac{1}{2}J_{-2}^1J_{-3}^1 + J_{-2}^1J_{-3}^2)\mathbf{1}$$

Dokaz. U diskusiji prije teorema smo pokazali da je w_3 zaista primarni. Vektor w_4 tražimo u obliku

$$w = (a_1 J^1_{-4} + a_2 J^2_{-4} + a_3 J^3_{-4} + a_4 (J^1_{-2})^2)\mathbf{1}.$$

Očito ga poništavaju svi $L(n) = J^1_n$ za $n \geq 3$, dok nam nužne i dovoljne uvjete da je w primaran daju jednadžbe

$$J^1_1 w = 0,$$
$$J^1_2 w = 0.$$

Operatori J^1_1 i J^1_2 poništavaju vektor $\mathbf{1}$, pa ih korištenjem komutacijskih relacija pomičemo desno do vakum vektora. Na taj način dobijemo sustav jednadžbi

$$A_4 \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow J^1_{-4} \\ \leftarrow J^2_{-4} \\ \leftarrow J^3_{-4} \\ \leftarrow (J^1_{-2})^2 \end{array} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \\ 6 & 6 & 6 & 8-2c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = 0$$

Lako se vidi da je jezgra tog sustava upravo jednodimenzionalni potprostor

$$\operatorname{Ker} A_4 = \operatorname{Span}_{\mathbb{C}} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{c-4}{3} \\ \frac{11-5c}{6} \\ \frac{5c-11}{6} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

odnosno primarni vektori na nivou 4 su kolinearni sa vektorom $w_4 = (\frac{5c-11}{6} J^3_{-4} + \frac{11-5c}{6} J^2_{-4} + \frac{c-4}{3} J^1_{-4} + (J^1_{-2})^2)\mathbf{1}$.

w_5 tražimo u obliku

$$w = (a_1 J^1_{-5} + a_2 J^2_{-5} + a_3 J^3_{-5} + a_4 J^4_{-5} + a_5 J^1_{-2} J^1_{-3} + a_6 J^1_{-2} J^2_{-3})\mathbf{1}.$$

Očito ga poništavaju svi $L(n) = J^1_n$ za $n \geq 4$, dok nam nužne i dovoljne uvjete da je w primaran daju jednadžbe

$$J^1_1 w = 0,$$
$$J^1_2 w = 0,$$
$$J^1_3 w = 0.$$

Operatori J^1_1, J^1_2 i J^1_3 poništavaju vektor $\mathbf{1}$, pa ih korištenjem komutacijskih relacija pomičemo desno do vakum vektora. Na taj način dobijemo sustav jednadžbi

$$A_5 \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow J^1_{-5} \\ \leftarrow J^2_{-5} \\ \leftarrow J^3_{-5} \\ \leftarrow J^4_{-5} \\ \leftarrow J^1_{-2} J^1_{-3} \\ \leftarrow J^1_{-2} J^2_{-3} \end{array} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 6 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 7 & 6 & 6 & 0 & 12-c & 0 \\ 0 & 9 & 18 & 24 & 0 & 12-c \\ 8 & 12 & 24 & 24 & 20-4c & 10-2c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = 0$$

Lako se vidi da je jezgra tog sustava upravo jednodimenzionalni potprostor

$$\mathrm{Ker}\, A_5 = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{21-c}{20} \\ \frac{3c-33}{20} \\ \frac{57-7c}{40} \\ \frac{7c-57}{60} \\ \frac{-1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

odnosno primarni vektori na nivou 5 su kolinearni sa vektorom $w_5 = (\frac{7c-57}{60} J^4_{-5} + \frac{57-7c}{40} J^3_{-5} + \frac{3c-33}{20} J^2_{-5} + \frac{21-c}{20} J^1_{-5} - \frac{1}{2} J^1_{-2} J^1_{-3} + J^1_{-2} J^2_{-3})\mathbf{1}$

□

Uočimo također da za (Virasorov) centralni naboj $-2c = -2$, odnosno (Liejev) $c = 1$, primarni vektor w_4 postaje upravo singularni vektor za Liejevu algebru $\widehat{\mathcal{D}}^{(1)}$,

$$v = (J^3_{-4} - J^2_{-4} + J^1_{-4} - (J^1_{-2})^2)\mathbf{1}.$$

To je i očekivano jer

$$Vir(0)_+ \subset \widehat{\mathcal{D}}^{(1)}_+,$$

odnosno vektor koji je singularan za $\widehat{\mathcal{D}}^{(1)}$ mora biti singularan i za $Vir(0)$.

Konstruktivni postupak u dokazu teorema nalazi primarni vektor za općenit c i pokazuje da ne postoji nijedan drugi primarni vektor na nivou 4, za $c = 1$.

Poglavlje 9

Eksplicitna realizacija i simplektički fermioni

U ovom poglavlju ćemo ponoviti eksplicitnu realizaciju verteks algebre $W_{1+\infty}$ iz [19], te ju modificirati i primjeniti na verteks–algebru W_∞. Ta konstrukcija daje ulaganje pripadne proste verteks algebre u Cliffordovu verteks superalgebru. Koristeći te ideje autori su u [19] klasificirali ireducibilne module. Naš cilj je dokazati analogne rezultate za slučaj verteks algebre tipa W_∞. Ulogu Cliffordove verteks-algebre zamijenit će verteks-algebra pridružena simplektičkim fermionima iz [2]. Umjesto algebre $\widehat{\mathfrak{gl}}$ mi ćemo gledati njenu podalgebru $\widehat{\mathfrak{gl}}_o$. Koristeći eksplicitnu realizaciju pokazat ćemo da na simplektičkim fermionima imamo komutirajuće djelovanje grupe $GL(l)$ i verteks-algebre W_∞. Kao posljedica ove konstrukcije bit će dokazano da se prosta verteks-algebra pridružena W_∞ realizira kao podalgebra simplektičkih fermiona.

9.1 Teoremi o dekompoziciji pomoću dualnih parova

Sada ćemo navesti konstrukciju i teorem iz [26] koji su nam ključni u dekompoziciji Cliffordove verteks algebre u izotipske podmodule.

Neka je A asocijativna algebra nad $\mathbb{C}$ i neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra takva da je asocijativna algebra A ujedno i $\mathfrak{g}-$modul. A-modul V se naziva $(A,\mathfrak{g})$-modulom ako V ima strukturu $\mathfrak{g}$-modula tako da je

$$g(av) = (ga)v + a(gv), \quad g \in \mathfrak{g}, \quad a \in A.$$

Neka je

$$A^{\mathfrak{g}} = \{a \in A| \quad \mathfrak{g}a = 0\}.$$

U primjeni ćemo se fokusirati baš na tu podalgebru invarijanti.

Za ireducibilan $\mathfrak{g}-$modul E, sa V_E označimo sumu svih $\mathfrak{g}-$podmodula od V izomorfnih sa E. V_E se naziva *E-izotipska komponenta* $\mathfrak{g}-$modula V. V_E je i $A^{\mathfrak{g}}-$podmodul od V. Naime za svaki $\mathfrak{g}-$podmodul U od V vrijedi da je preslikavanje $U \to aU$, $u \mapsto au$ $\mathfrak{g}-$homomorfizam. Odaberemo jednodimenzionalan potprostor F od E. Zbog Schurove leme tad postoji jedinstven izbor (ovisan o F) jednodimenzionalnih potprostora F' u svakom ireducibilnom $\mathfrak{g}-$podmodulu od V_E. Sa V^E označimo sumu svih takvih F'. V^E je $A^{\mathfrak{g}}$-podmodul od V_E i vrijedi

$$V_E = E \otimes V^E,$$

pa je

$$V = \bigoplus_E (E \otimes V^E),$$

gdje sumacija ide po svim klasama ekvivalencije ireducibilnih $\mathfrak{g}-$modula. Uz ove oznake vrijedi teorem:

Teorem 9.1. *[26], Theorem 1.1. Neka je A poluprost $\mathfrak{g}-$modul. Neka je V $(\mathfrak{g}, A)-$modul takav da je*

1. *V ireducibilan $A-$modul*
2. *V je direktna suma najviše prebrojivo mnogo konačnodimenzionalnih ireducibilnih $\mathfrak{g}-$modula.*

Tada je svaka izotipska komponenta V_E ireducibilan $(\mathfrak{g}, A)$-modul, odnosno svaki V^E je ireducibilan $A^{\mathfrak{g}}$-modul.

Treba nam i analogna tvrdnja za slučaj gdje umjesto Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ imamo grupu G. Tada se postavlja uvjet da je A modul za G. $A-$modul V je (G, A)-modul ako V ima strukturu G-modula tako da

$$g(av) = (ga)(gv), \quad g \in G, \quad v \in V, \quad a \in A.$$

Analogno se definira A^G. Ponovo vrijedi dekompozicija na izotipske komponente

$$V = \bigoplus_E (E \otimes V^E),$$

gdje E ide po klasama ekvivalencije ireducibilinih $G-$ modula.

Teorem 9.2. *[26], Remark 1.1. Neka je A poluprost $G-$modul. Neka je V $(G, A)-$modul takav da je*

1. *V ireducibilan $A-$modul*
2. *V je direktna suma najviše prebrojivo mnogo konačnodimenzionalnih ireducibilnih $G-$modula.*

Tada je svaka izotipska komponenta V_E ireducibilan (G, A)-modul, odnosno svaki V^E je ireducibilan A^G-modul.

9.2 Konačnodimenzionalne ireducibilne reprezentacije od $\mathfrak{gl}(l)$ i $GL(l, \mathbb{C})$

$GL(l, \mathbb{C})$ je grupa regularnih $l \times l$ matrica nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. $\mathfrak{gl}(l)$ je pak Liejeva algebra $l \times l$ matrica, dakle vektorski prostor $M_l(\mathbb{C})$ uz komutator $[A, B] = AB - BA$.

Navest ćemo još poznati rezultat o klasifikaciji ireducibilnih $GL(l, \mathbb{C})$ (pa time i $\mathfrak{gl}(l)$) modula. Uočimo torus $T = (\mathbb{C}^\times)^l$. Njega možemo promatrati kao podgrupu dijagonalnih matrica od $GL(l, \mathbb{C})$.

$GL(l,\mathbb{C})$-modul V se kao vektorski prostor dekomponira

$$V = \bigoplus V_\mu, \quad V_\mu = \{v \in V,\, z \cdot v = z^\mu v = z_1^{\mu_1} \ldots z_l^{\mu_l} v, \text{ za sve } z \in T\},$$

gdje su $\mu \in \mathbb{Z}^n$ težine. Na skupu težina definiramo parcijalni uređaj $\lambda \geq \mu$ za

$$\lambda - \mu = (k_1, k_2 - k_1, \ldots, k_{l-1} - k_{l-2}, -k_{l-1}),\, k_i \geq 0.$$

Kažemo da V ima **najveću težinu** λ ako $V_\lambda \neq 0$ te ako $V_\mu \neq 0$ povlači $\lambda \geq \mu$.

Sa N označimo podgrupu unipotentnih matrica (gornjetrokutaste matrice sa jedinicama na dijagonali). Za vektor $v \in V$ kažemo da je **vektor najveće težine** ako je sadržan u nekom V_λ i invarijantan je na djelovanje od N.

Definira se podskup dominantnih težina

$$\Sigma = \{(m_1, m_2, \ldots, m_l), \quad m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_l,\, m_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Teorem 9.3. *Za svaku težinu $\lambda \in \Sigma$ postoji $GL(l,\mathbb{C})-$modul $V(\lambda)$ za koji vrijede sljedeće (međusobno ekvivalentne) tvrdnje:*

1. *$V(\lambda)$ je ireducibilan i najveće težine λ.*
2. *$V(\lambda)$ ima jednodimenzionalan potprostor vektora najveće težine i ti vektori imaju težinu λ.*

Svaki ireducibilan konačno–dimenzionalni modul za $GL(l,\mathbb{C})$ je izomorfan nekom $V(\lambda)$, $\lambda \in \Sigma$.

Uz ovu terminologiju je jednodimenzionalna reprezentacija $g \mapsto \det(g)$ ustvari ireducibilna reprezentacija $V(1,\ldots,1)$. Analogno je $g \mapsto \det(g^{-1})$ ireducibilna reprezentacija $V(-1,\ldots,-1)$. Vrijedi

$$V(1,\ldots,1) \otimes V(\lambda) = V(\lambda_1 + 1, \ldots, \lambda_l + 1),$$
$$V(-1,\ldots,-1) \otimes V(\lambda) = V(\lambda_1 - 1, \ldots, \lambda_l - 1),$$

pa je dovoljno promatrati težine λ iz skupa

$$P^+ = \{(m_1, m_2, \ldots, m_l), \quad m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_l \geq 0,\, m_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Konačnodimenzionalne reprezentacije od $GL(l,\mathbb{C})$ i $\mathfrak{gl}(l)$ su u bijektivnoj korespodenciji. Naime, reprezentacija

$$\pi : GL(l,\mathbb{C}) \to \mathrm{Aut}(V)$$

inducira reprezentaciju

$$d\pi_e : \mathfrak{gl}(l) \to \mathrm{Der}(V),$$

gdje je $d\pi_e$ diferencijal reprezentacije grupe u identiteti, dok reprezentacija

$$\pi' : \mathfrak{gl}(l) \to \mathrm{Der}(V)$$

inducira reprezentaciju

$$\exp \circ \pi' : GL(l,\mathbb{C}) \to \mathrm{Aut}(V),$$

gdje je $\exp(\pi'(g)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pi'(g))^n}{n!}$.

Zbog ove konstrukcije, i ireducibilne reprezentacije od $\mathfrak{gl}(l)$ i $GL(l,\mathbb{C})$ su u 1-1 korespodenciji. Uz tu korespodenciju imamo vezu vektora najveće težine za Liejevu grupu $GL(l,\mathbb{C})$ i Liejevu algebru $\mathfrak{gl}(l)$:

Propozicija 9.4. *Netrivijalan vektor $v \in V_\mu$ je $N-$ invarijantan (odnosno vektor najveće težine za grupu $GL(l,\mathbb{C})$) ako i samo ako $E_i \cdot v = 0$ za djelovanje Chevalleyevih generatora $E_i \in \mathfrak{gl}(l)$, tj. matrica koje imaju 1 na koordinatama $(i, i+1)$ i 0 drugdje.*

9.3 Eksplicitna fermionska realizacija verteks algebre $W_{1+\infty}$

Ponavljamo rezultat o ulaganju proste verteks algebre $W_{1+\infty}$ u verteks superalgebru $\mathcal{F}^{\otimes l}$ iz [37]. Preciznije, iz dekompozicije od $\mathcal{F}^{\otimes l}$ pomoću dualnog para $(\mathfrak{gl}(l), \widehat{\mathfrak{gl}})$ i homomorfizma $\Phi : \widehat{\mathcal{D}} \to \widehat{\mathfrak{gl}}$, pokazuje se da je ireducibilna komponenta za trivijalnu težinu upravo $\bar{L}_c^{W_{1+\infty}}$.

Označimo s C asocijativnu Cliffordovu algebru zadanu generatorima ψ_i^+, ψ_i^-, $i \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$ i relacijama

$$[\psi_m^+, \psi_n^-]_+ = \psi_m^+\psi_n^- + \psi_n^-\psi_m^+ = \delta_{m+n,0},$$
$$[\psi_m^+, \psi_n^+]_+ = [\psi_m^-, \psi_n^-]_+ = 0.$$

Označimo sa $\mathcal{F}$ ciklički $C-$modul generiran vakuum vektorom $|0\rangle$ takav da

$$\psi^+_{n+\frac{1}{2}}|0\rangle = \psi^-_{n+\frac{1}{2}}|0\rangle = 0 \quad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}).$$

Fockov prostor $\mathcal{F}$ je, kao vektorski prostor, izomorfan s vanjskom algebrom

$$\bigwedge\left(\{\psi^{\pm}_{n+\frac{1}{2}} \,|\, n < 0\}\right).$$

Definiramo par formalnih redova potencija

$$\psi^+(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi^+_{n+\frac{1}{2}} x^{-n-1}, \quad \psi^-(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi^-_{n+\frac{1}{2}} x^{-n-1},$$

sadržanih u $(\mathrm{End}\,\mathcal{F})[[x, x^{-1}]]$, odnosno takvih da su im koeficijenti generatori Cliffordove algebre C. $\psi^+(x)$ i $\psi^-(x)$ su sadržani u $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{F}((x)))$ pa su slabi verteks operatori.

Propozicija 9.5. *Polja $\psi^+(x)$ i $\psi^-(x)$ su lokalna u smislu da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da*

$$(x_1 - x_2)^k [\psi^+(x_1), \psi^-(x_2)]_+ = 0.$$

Dokaz. Antikomutator je jednak $x_1^{-1}\delta(\frac{x_1}{x_2})$ pa vidimo da je dovoljno uzeti $k = 1$. □

Uzmemo l parova fermionskih polja $\psi^{+,p}(x)$, $\psi^{-,p}(x)$ i promatramo pripadni Fockov prostor $\mathcal{F}^{\otimes l}$. Definiraju se sljedeći formalni redovi

$$E(x_1, x_2) = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} E_{ij} x_1^{i-1} x_2^{-j} = \sum_{p=1}^{l} :\psi^{+,p}(x_1)\psi^{-,p}(x_2):,$$

$$e^{pq}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{pq}(n) x^{-n-1} =: \psi^{-,p}(x)\psi^{-,q}(x): \quad (p \neq q),$$

$$e^{pq}_{**}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{pq}_{**}(n) x^{-n-1} =: \psi^{+,p}(x)\psi^{+,q}(x): \quad (p \neq q),$$

$$e^{pq}_{*}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{pq}_{*}(n) x^{-n-1} =: \psi^{+,p}(x)\psi^{-,q}(x):$$

pri čemu $p, q = 1, .., l$ a *normalni produkt* :: znači da se operatori koji poništavaju $|0\rangle$ pomiču udesno do vakum vektora i množe sa (-1) potencirano na broj pomaka. Drugim riječima, za $a^1, \ldots, a^r \in \{\psi^{\pm,p}\}$, $i_1, \ldots, i_r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$

$$: a^1_{i_1} := a^1_{i_1}$$

i

$$: a^1_{i_1} \dots a^r_{i_r} := \begin{cases} a^1_{i_1} : a^2_{i_2} \dots a^r_{i_r} :, & i_1 < 0 \\ (-1)^{s-1} : a^2_{i_2} \dots a^r_{i_r} : a^1_{i_1}, & i_1 \geq 0 \end{cases}$$

Zbog lokalnosti koja je navedena u Propoziciji 9.5, dobivamo da je $\mathcal{F}^{\otimes l}$ verteks superalgebra.

Operatori

$$E_{i,j} = \sum_{p=1}^{l} : \psi^{+,p}_{-i+\frac{1}{2}} \psi^{-,p}_{j-\frac{1}{2}} :, \quad i, j \in \mathbb{Z}$$

daju reprezentaciju od $\widehat{\mathfrak{gl}}$ sa centralnim nabojem l na prostoru $\mathcal{F}^{\otimes l}$, dok operatori $e^{pq}(n)$, $e^{pq}_*(n)$, $e^{pq}_{**}(n)$, $p, q = 1, \dots, l, n \in \mathbb{Z}$ daju reprezentaciju afine algebre $\widehat{so}(2l)$ centralnog naboja 1. Stavimo li $n = 0$, $e^{pq}(0), e^{pq}_*(0), e^{pq}_{**}(0)$, $p, q = 1, \dots, l, n \in \mathbb{Z}$ generiraju reprezentaciju horizontalne algebre $\mathfrak{so}(2l)$. Operatori

$$e^{pq}_* = e^{pq}_*(0) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} : \psi^{+,p}_{i+\frac{1}{2}} \psi^{-,q}_{-i-\frac{1}{2}} :,$$

daju reprezentaciju od $\mathfrak{gl}(l)$.

U Lemi 3.1 iz [37] je pokazano da gore definirana djelovanje od $\mathfrak{gl}(l)$ i od $\widehat{\mathfrak{gl}}$ na $\mathcal{F}^{\otimes l}$ međusobno komutiraju.

Također je promatran potprostor

$$(\mathcal{F}^{\otimes l})^{\mathfrak{gl}(l)} = \{v \in \mathcal{F}^{\otimes l} | \ \mathfrak{gl}(l)v = 0\}.$$

za koji se lako pokaže da je verteks podalgebra od $\mathcal{F}^{\otimes l}$.

Zbog razmatranja iz [37], Remark 3.1, $\mathcal{F}^{\otimes l}$ ima $\frac{1}{2}\mathbb{Z}-$graduaciju, induciranu svojstvenim vrijednostima operatora d

$$[d, \psi^{\pm,p}_{-j}] = j\psi^{\pm,p}_{-j}, \quad d|0\rangle = 0.$$

Pri toj graduaciji $\mathcal{F}^{\otimes l}$ je kvazikonačan vektorski prostor. Horizontalna algebra $\mathfrak{so}(2l)$ ima težinu 0, pa i njena podalgebra $\mathfrak{gl}(l)$ djeluje poluprosto na $\mathcal{F}^{\otimes l}$.

$\mathcal{F}^{\otimes l}$ je i ireducibilan C-modul pa smo u uvjetima Teorema 9.1 i V^λ je ireducibilan $A^{\mathfrak{g}}-$modul. Zbog rezultata iz klasične teorije invarijanti, $A^{\mathfrak{g}}$ je kvocijent od $\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{gl}})$.

Ako uzmemo $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(l)$ i $A = C$ u Teoremu 9.1 dobivamo dekompoziciju

$$\mathcal{F}^{\otimes l} = \bigoplus_{\lambda \in \Sigma} L(\lambda, \mathfrak{gl}(l)) \otimes V^\lambda,$$

gdje je $L(\lambda, \mathfrak{gl}(l))$ ireducibilni $\mathfrak{gl}(l)-$modul najveće težine λ, a V^λ neki $\widehat{\mathfrak{gl}}-$modul.

Dodatne informacije o V^λ se dobiju konstrukcijom vektora najveće težine.

Definiraju se operatori

$$\Xi^{+,m}_i \equiv \psi^{+,i}_{-m+\frac{1}{2}} \cdots \psi^{+,i}_{-\frac{3}{2}} \psi^{+,i}_{-\frac{1}{2}},$$

$$\Xi^{-,m}_i \equiv \psi^{-,i}_{-m+\frac{1}{2}} \cdots \psi^{-,i}_{-\frac{3}{2}} \psi^{-,i}_{-\frac{1}{2}}.$$

pri čemu podrazumijevamo $\Xi^{\pm,0} = 1$. Definiramo $\Lambda_+ : \Sigma \to \widehat{\mathfrak{gl}}^*_0$:

$$\lambda = (m_1, \cdots, m_l) \longmapsto \Lambda_+(\lambda)$$

$$\Lambda_+(\lambda) = \widehat{\Lambda}_{m_1} + \cdots + \widehat{\Lambda}_{m_l}.$$

Teorem 9.6. *[37], Teorem 3.1.*

1) Vrijedi sljedeća dekompozicija $(\mathfrak{gl}(l), \widehat{\mathfrak{gl}})$-modula $\mathcal{F}^{\otimes l}$:

$$\mathcal{F}^{\otimes l} = \bigoplus_{\lambda \in \Sigma} L(\lambda, \mathfrak{gl}(l)) \otimes L\left(\Lambda_+(\lambda), \widehat{\mathfrak{gl}}, l\right)$$

gdje je $L(\lambda, \mathfrak{gl}(l))$ ireducibilni $\mathfrak{gl}(l)$-modul najveće težine λ, $L(\Lambda_+(\lambda), \widehat{\mathfrak{gl}}, l)$ je ireducibilni $\widehat{\mathfrak{gl}}$-modul najveće težine $\Lambda_+(\lambda)$ centralnog naboja l.

2) Za dani $\lambda = (m_1, \dots, m_l) \in \Sigma$, neka je

$$m_1 \geq \cdots m_i \geq m_{i+1} = \cdots = m_{j-1} = 0 > m_j \geq \cdots \geq m_l.$$

Tada je vektor najveće težine koji odgovara najvećoj težini $\lambda \in \Sigma$ dan formulom

$$v_\Lambda = \Xi_1^{+,m_1} \dots \Xi_i^{+,m_i} \Xi_j^{-,-m_j} \dots \Xi_l^{-,-m_l} |0\rangle. \tag{9.1}$$

Iz teorema slijedi da je za $\lambda = 0$, $V^\lambda = (\mathcal{F}^{\otimes l})^{\mathfrak{gl}(l)}$ ireducibilna reprezentacija od $\widehat{\mathfrak{gl}}$. Koristeći homomorfizam

$$\Phi_0 : \widehat{\mathcal{D}} \to \widehat{\mathfrak{gl}}$$

$$\Phi_0(t^m f(D)) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(-j) E_{j-m,j}$$

slijedi da je $(\mathcal{F}^{\otimes l})^{\mathfrak{gl}(l)}$ ireducibilna reprezentacija od $M_l^{W_{1+\infty}}$. Ovo razmatranje povlači sljedeći teorem:

Teorem 9.7. *Postoji homomorfizam*

$$\overline{\Phi} : M_l^{W_{1+\infty}} \to \mathcal{F}^{\otimes l}$$

jednoznačno određen s

$$J^k(x) \mapsto \sum_{i=1}^{l} : \psi^{+,i}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^k \psi^{-,i}(x) :$$

odnosno

$$J^k_{-k-1}\mathbf{1} \mapsto \overline{\Phi}(J^k_{-k-1}\mathbf{1}) = \sum_{i=1}^{l} k! \psi^{+,i}_{-\frac{1}{2}} \psi^{-,i}_{-k-\frac{1}{2}} |0\rangle.$$

Štoviše

$$\operatorname{Im} \overline{\Phi} \cong (\mathcal{F}^{\otimes l})^{\mathfrak{gl}(l)} \cong L_l^{W_{1+\infty}}.$$

9.4 Simplektička grupa $Sp(2l, \mathbb{C})$ i opća linearna grupa $GL(l, \mathbb{C})$

Simplektička matrica reda $2l$ nad poljem $\mathbb{C}$ je kvadratna matrica oblika

$$g = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

pri čemu su A, B, C, D kvadratne matrice reda l takve da vrijedi

$$A^t D - C^t B = I, \quad A^t C = C^t A, \quad D^t B = B^t D.$$

Drugim riječima g je simplektička ako $g^t J g = J$ pri čemu je

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}.$$

Simplektičke matrice čine grupu obzirom na množenje i označavamo je sa

$$Sp(2l, \mathbb{C}).$$

Grupa $Sp(2l, \mathbb{C})$ prirodno djeluje na simplektički vektorski prostor

$$\mathbb{C}^{2l} = \operatorname{Span}_{\mathbb{C}}\{b_1, \ldots, b_l, c_1, \ldots, c_l\}.$$

Neka je $A \in GL(l, \mathbb{C})$ proizvoljna regularna matrica reda l. Tada je očito

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^{-1})^t \end{bmatrix} \in Sp(2l, \mathbb{C}).$$

Na taj način dobivamo ulaganje

$$GL(l, \mathbb{C}) \hookrightarrow Sp(2l, \mathbb{C}).$$

Prisjetimo se da su generatori od $GL(l, \mathbb{C})$ dani s

$$\begin{array}{c} \\ \\ i \rightarrow \\ \\ j \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, l$$

(matrica dobivena iz jedinične matrice I zamjenom i-tog i j-tog retka),

$$\begin{array}{rc} i \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \lambda \neq 0,\ i = 1, \ldots, l$$

(matrica dobivena iz I zamjenom i-tog elementa na dijagonali sa skalarom λ),

$$\begin{array}{rc} & j \downarrow \\ i \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & 0 & 1 & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

(matrica dobivena iz I zamjenom 0 na mjestu (i, j) sa 1).

Označimo odgovarajuće elemente grupe $Sp(2l, \mathbb{C})$ redom s

$$g_{i,j}, \quad g_{i,\lambda}, \quad g_{(i,j)}.$$

Očito vrijede relacije

$$g_{i,j}(b_i) = b_j, \quad g_{i,j}(b_j) = b_i, \quad g_{i,j}(b_k) = b_k, \text{ za } k \neq i, j,$$

$$g_{i,j}(c_i) = c_j, \quad g_{i,j}(c_j) = c_i, \quad g_{i,j}(c_k) = c_k, \text{ za } k \neq i, j,$$

$$g_{i,\lambda}(b_i) = \lambda b_i, \quad g_{i,\lambda}(b_k) = b_k, \text{ za } k \neq i, \quad g_{i,\lambda}(c_i) = \frac{1}{\lambda} c_i, \quad g_{i,\lambda}(c_k) = c_k, \text{ za } k \neq i,$$

$$g_{(i,j)}(b_i) = b_i + b_j, \quad g_{(i,j)}(b_k) = b_k,\ k \neq i, \quad g_{(i,j)}(c_j) = c_j - c_i, \quad g_{(i,j)}(c_k) = c_k,\ k \neq j.$$

9.5 Eksplicitna realizacija verteks algebre W_∞ na simplektičkim fermionima

U Točki 9.3 smo uspostavili vezu između $L_l^{W_{1+\infty}}$ i pogodne ireducibilne komponente od $\mathcal{F}^{\otimes l}$. Taj postupak ćemo imitirati kod $L_{-2l}^{W_\infty}$ i pogodne ireducibilne komponente od simplektičkih fermiona $\overline{\mathcal{F}}^{\otimes l}$. $\overline{\mathcal{F}}^{\otimes l}$ je verteks–podalgebra od $\mathcal{F}^{\otimes l}$ generirana vektorima

$$b_i = \psi^{+,i}_{-\frac{1}{2}}|0\rangle, \quad c_i = \psi^{-,i}_{-\frac{3}{2}}|0\rangle,$$

odnosno poljima

$$b_i(x) = Y(b_i, x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_i(n)x^{-n-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi^{+,i}_{n+\frac{1}{2}} x^{-n-1},$$

$$c_i(x) = Y(c_i, x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_i(n)x^{-n-1} = Y(D\psi^{-,i}_{-\frac{1}{2}}|0\rangle, x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-n)\psi^{-,i}_{n-\frac{1}{2}} x^{-n-1},$$

za $i = 1, .., l$. Vrijedi antikomutacijska relacija

$$[b_i(n), c_j(m)]_+ = n\delta_{i,j}\delta_{m,-n}.$$

Ovaj modul je konstruiran u članku [2] (u oznaci SF) direktno iz asocijativne algebre generirane sa $\{b_n^i, c_n^i|, i = 1, \ldots, l, n \in \mathbb{Z}\}$ i antikomutacijskom relacijom, ali vidimo da se zbog identifikacije operatora

$$b_i(n) = \psi^{+,i}_{n+\frac{1}{2}}, \quad c_i(n) = (-n)\psi^{-,i}_{n-\frac{1}{2}}$$

prirodno ulaže u $\mathcal{F}^{\otimes l}$.

U $\overline{\mathcal{F}}^{\otimes l}$ se prirodno promatra sljedeći konformni vektor

$$\omega = \sum_{i=1}^{l} c_i(-1)b_i(-1)|0\rangle$$

i na taj način $\overline{\mathcal{F}}^{\otimes l}$ postaje $\mathbb{Z}_{\geq 0}$–graduirna verteks–superalgebra centralnog naboja $-2l$.

Također u [2] je pokazano

Teorem 9.8. *[2] Grupa automorfizama* $\mathrm{Aut}\,\overline{\mathcal{F}}^{\otimes l}$ *je izomorfna simplektičkoj grupi* $Sp(2l, \mathbb{C})$*, koja prirodno djeluje na simplektički prostor* $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{b_i(-1)|0\rangle, c_i(-1)|0\rangle\}$.

Poistovjetimo li $b_i(-1)|0\rangle$ sa b_i i $c_i(-1)|0\rangle$ sa c_i tada je djelovanje generatora od $Sp(2l, \mathbb{C})$ na $(\overline{\mathcal{F}}^{\otimes l})_1$ dano relacijama u poglavlju 9.4 i proširuje se na cijeli $\overline{\mathcal{F}}^{\otimes l}$ relacijama:

$$g(|0\rangle) = |0\rangle$$

$$g(b_i(n)v) = (g(b_i))(n)g(v)$$

$$g(c_i(n)v) = (g(c_i))(n)g(v),$$

za $v \in \overline{\mathcal{F}}^{\otimes l}$.

Budući da se $GL(l)$ prirodno ulaže u $Sp(2l, \mathbb{C})$, imamo i djelovanje podgrupe $GL(l)$ na $\overline{\mathcal{F}}^{\otimes l}$.

Lema 9.9. *Za $g \in GL(l,\mathbb{C})$ vrijedi*

$$g(J^k_{-k-1}|0\rangle) = J^k_{-k-1}|0\rangle$$

za svaki $k \geq 1$.

Dokaz.

$$g(J^k_{-k-1}|0\rangle) = \sum_{i=1}^{l} k! g(b_i(-1)c_i(-k))|0\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{l} k! g(b_i(-1)|0\rangle)_{-1} g(c_i(-1)|0\rangle)_{-k}|0\rangle$$

Dovoljno nam je dokazati tvrdnju za generatore od $GL(l,\mathbb{C})$ Razlikujemo tri slučaja:

(1) $g = g_{i,j}$, transpozicijska matrica koja zamjenjuje stupce i i j a ostale ostavi nepromijenjenima.

$$\frac{1}{k!} g(J^k_{-k-1}|0\rangle) = \sum_{p\neq i,j} g(b_p)_{-1} g(c_p)_{-k}|0\rangle + g(b_i)_{-1} g(c_i)_{-k}|0\rangle + g(b_j)_{-1} g(c_j)_{-k}|0\rangle$$

$$= \sum_{p\neq i,j} b_p(-1)c_p(-k)|0\rangle + b_j(-1)c_j(-k)|0\rangle + b_i(-1)c_i(-k)|0\rangle$$

$$= \sum_{p=1}^{l} b_p(-1)c_p(-k)|0\rangle$$

(2) $g = g_{i,\lambda}$, množenje stupca i skalarom λ.

$$\frac{1}{k!} g(J^k_{-k-1}|0\rangle) = \sum_{p\neq i} g(b_p)_{-1} g(c_p)_{-k}|0\rangle + g(b_i)(-1) g(c_i)(-k)|0\rangle +$$

$$\sum_{p\neq i} b_p(-1)c_p(-k)|0\rangle + \lambda b_i(-1)\frac{1}{\lambda}c_i(-k)|0\rangle = \sum_{p=1}^{l} b_p(-1)c_p(-k)|0\rangle$$

(3) $g = g_{(i,j)} = I + e^{ij}$, jedinična matrica uvećana za matricu koja na koordinatama (i,j) ima 1, na ostalima 0.

$$\frac{1}{k!} g(J^k_{-k-1}|0\rangle) = \sum_{p\neq i,j} g(b_p)_{-1} g(c_p)_{-k}|0\rangle + g(b_i)_{-1} g(c_i)_{-k}|0\rangle + g(b_j)_{-1} g(c_j)_{-k}|0\rangle$$

$$= \sum_{p\neq i,j} b_p(-1)c_p(-k)|0\rangle + (b_i + b_j)(-1)c_i(-k)|0\rangle + b_j(-1)(c_j - c_i)(-k)|0\rangle$$

$$= \sum_{p=1}^{l} b_p(-1)c_p(-k)|0\rangle$$

Budući da su svi elementi od $GL(l,\mathbb{C})$ generirani sa operatorima $g_{i,j}$, $g_{i,\lambda}$, $g_{(i,j)}$ vidimo da je slika od $M^{W_\infty}_{-2l}$ invarijantna na $GL(l,\mathbb{C})$. □

Tada homomorfizam

$$\overline{\Phi} : M_l^{W_{1+\infty}} \to \mathcal{F}^{\otimes l}$$

restrikcijom odnosno ulaganjem $M_{-2l}^{W_\infty} \hookrightarrow M_l^{W_{1+\infty}}$ i restrikcijom na $(\overline{\mathcal{F}}^{\otimes l})^{GL(l)}$ postaje homomorfizam

$$\overline{\Phi} : M_{-2l}^{W_\infty} \to (\overline{\mathcal{F}}^{\otimes l})^{GL(l)}. \tag{9.2}$$

Za prostotu od $(\overline{\mathcal{F}}^{\otimes l})^{GL(l)}$ nam treba dekompozicija pomoću dualnih parova. Definiramo Liejevu algebru $\widehat{\mathfrak{gl}}_o$ na sljedeći način. Promatramo formalni red potencija

$$\widetilde{E}(x_1, x_2) = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \widetilde{E}_{ij} x_1^{i-1} x_2^{-j} = \sum_{p=1}^{l} : b_p(x_1) c_p(x_2) :,$$

odnosno koeficijente

$$\widetilde{E}_{i,j} = \sum_{p=1}^{l} : b_p(-i) c_p(j) := \sum_{p=1}^{l} (-j) : \psi_{-i}^{+,p} \psi_j^{-,p} : .$$

Koeficijenti $\widetilde{E}_{i,j}$ generiraju Liejevu podalgebru od $\widehat{\mathfrak{gl}}$ razapetu sa $\{E_{i,j} | \, j \neq 0\}$. To će nam biti beskonačnodimenzionalni dio dualnog para. Prvo ćemo pokazati da djelovanja grupe $GL(l)$ i Liejeve algebre $\widehat{\mathfrak{gl}}_o$ komutiraju.

Teorem 9.10. *Djelovanja od $GL(l)$ i $\widehat{\mathfrak{gl}}_o$ na $\overline{\mathcal{F}}^{\otimes l}$ međusobno komutiraju.*

Dokaz. Dovoljno je provjeriti komutiranje djelovanja generatora grupe $GL(l)$:

$$g_{i,j}, \quad g_{i,\lambda}, \quad g_{(i,j)}$$

sa $\widetilde{E}_{i',j'} = \sum_{p=1}^{l} : b_p(-i) c_p(j) :$, generatorima od $\widehat{\mathfrak{gl}}_o$.

$$g(\widetilde{E}_{i',j'} v) = g(\widetilde{E}_{i',j'}) g(v) = \sum_{p=1}^{l} : (g(b_p))(-i')(g(c_p))(j') : g(v).$$

Vidimo da tvrdnja o komutiranju djelovanja $GL(l)$ i $\widehat{\mathfrak{gl}}_o$ slijedi ako pokažemo da je $\widetilde{E}_{i',j'}$ invarijantan na sve generatore g od $GL(l)$. Račun je vrlo sličan dokazu prethodne leme.

(1) $g = g_{i,j}$,

$$g(\widetilde{E}_{i',j'}) = \sum_{p \neq i,j} : g(b_p)_{-i'} g(c_p)_{j'} : + : g(b_i)_{-i'} g(c_i)_{j'} : + : g(b_j)_{-i'} g(c_j)_{j'} :$$

$$= \sum_{p \neq i,j} : b_p(-i') c_p(j') : + : b_j(-i') c_j(j') : + : b_i(-i') c_i(j') :=$$

$$\sum_{p=1}^{l} : b_p(-i') c_p(j') := \widetilde{E}_{i',j'}$$

(2) $g = g_{i,\lambda}$

$$g(\widetilde{E}_{i',j'}) = \sum_{p\neq i} : g(b_p)_{-i'} g(c_p)_{j'} : + : g(b_i)(-i')g(c_i)(j') :=$$

$$\sum_{p\neq i} : b_p(-i')c_p(j') : + : \lambda b_i(-i')\frac{1}{\lambda}c_i(j') := \sum_{p=1}^{l} : b_p(-i')c_p(j') := \widetilde{E}_{i',j'}$$

(3) $g = g_{(i,j)} = I + e^{ij}$

$$g(\widetilde{E}_{i',j'}) = \sum_{p\neq i,j} : g(b_p)_{-i'} g(c_p)_{j'} : + : g(b_i)_{-i'} g(c_i)_{j'} : + : g(b_j)_{-i'} g(c_j)_{j'} :$$

$$= \sum_{p\neq i,j} : b_p(-i')c_p(j') : + : (b_i + b_j)(-i')c_i(j') : + : b_j(-i')(c_j - c_i)(j') :$$

$$= \sum_{p=1}^{l} : b_p(-i')c_p(j') := \widetilde{E}_{i',j'}$$

Ova tri slučaja povlače rezultat

$$g(\widetilde{E}_{i',j'}v) = \widetilde{E}_{i',j'}(g(v)),$$

pa time i komutiranje djelovanja $GL(l)$ i $\widehat{\mathfrak{gl}}_o$ na $\overline{\mathcal{F}}^{\otimes l}$.

□

Sada ćemo primjeniti rezultate iz Točke 9.1 na simplektičke fermione.

Neka je $\mathcal{A}$ asocijativna algebra s generatorima $b_i(n)$, $c_i(n)$, $i = 1, \ldots, l$, $n \in \mathbb{Z}$ i netrivijalnim relacijama

$$[b_i(n), c_j(m)]_+ = n\delta_{i,j}\delta_{m,-n}.$$

Djelovanje grupe $Sp(2l, \mathbb{C})$ na simplektički prostor

$$\mathbb{C}^{2l} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{b_1, \ldots, b_l, c_1, \ldots, c_l\}$$

se prirodno proširuje do djelovanja grupe $Sp(2l, \mathbb{C})$ na $\mathcal{A}$. Budući da je $GL(l, \mathbb{C})$ podgrupa od $Sp(2l, \mathbb{C})$, dobivamo da $GL(l, \mathbb{C})$ djeluje na $\mathcal{A}$ automorfizmima. Iz klasične teorije invarijanti (potpuno analogno kao u Točki 9.1, vidi također [37]) slijedi da invarijante obzirom na djelovanje od $GL(l, \mathbb{C})$ na $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A}^{GL(l,\mathbb{C})} = \{a \in \mathcal{A} |\, ga = a \text{ za svaki } g \in GL(l, \mathbb{C})\}$$

čine asocijativnu podalgebru generiranu elementima

$$\widetilde{E}_{i,j} = \sum_{p=1}^{l} : b_p(-i)c_p(j) :,\ i, j \in \mathbb{Z}. \tag{9.3}$$

Dakle, ta algebra je kvocijent od $\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{gl}}_o)$. Prema tomo vrijedi sljeći rezultat. (Uočimo da smo u prethodnoj lemi kao pomoćni rezultat imali $\widetilde{E}_{i,j} \in \mathcal{A}^{GL(l,\mathbb{C})}$.)

Propozicija 9.11. *Postoji netrivijalni surjektivni homomorfizam asocijativnih algebri:*

$$\Psi : \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{gl}}_o) \to \mathcal{A}^{GL(l,\mathbb{C})}$$

jednoznačno određen formulom (9.3).

Nadalje, algebra verteks operatora $\overline{\mathcal{F}}^{\otimes l}$ je ireducibilan $\mathcal{A}-$modul, te je direktna suma konačnodimenzionalnih $GL(l,\mathbb{C})-$modula. Dakle imamo dekompoziciju

$$\overline{\mathcal{F}}^{\otimes l} = \bigoplus_E (E \otimes V^E)$$

pri čemu se sumira po svim klasama ekvivalencije ireducibilnih $GL(l,\mathbb{C})-$modula, a svaki V^E je $\mathcal{A}^{GL(l,\mathbb{C})}-$modul.

Sada nam Teorem 9.2 (vidi i diskusiju koja prethodi tom teoremu) daje

Teorem 9.12. *Svaki V^E je ireducibilan $\mathcal{A}^{GL(l,\mathbb{C})}-$modul.*

Korolar 9.13. *Svaki V^E je ireducibilan $\widehat{\mathfrak{gl}}_o-$modul.*

Posebno, u slučaju trivijalnog modula dobivamo:

Korolar 9.14. $(\overline{\mathcal{F}}^{\otimes l})^{GL(l,\mathbb{C})}$ *je ireducibilan $\widehat{\mathfrak{gl}}_o-$modul.*

Sada slično kao u Poglavlju 9.3 zaključujemo da je slika homomorfizma $\overline{\Phi}$, danog relacijom (9.2), zapravo prosta verteks algebra:

Teorem 9.15. *Vrijedi:*

$$(\overline{\mathcal{F}}^{\otimes l})^{GL(l,\mathbb{C})} \simeq L_{-2l}^{W_\infty}.$$

Dokaz. Zbog preglednosti navest ćemo osnovne dijelove dokaza, iako su analogni kao kod Teorema 9.7.

Prvo, $(\overline{\mathcal{F}}^{\otimes l})^{GL(l,\mathbb{C})}$ je prosta verteks-algebra i zbog Korolara 9.14 ona je ireducibilni $\widehat{\mathfrak{gl}}_o-$ modul. Također iz konstrukcije slijedi da je $(\overline{\mathcal{F}}^{\otimes l})^{GL(l,\mathbb{C})}$ i kvazikonačan $\widehat{\mathfrak{gl}}_o-$modul. Sada možemo primijeniti homomorfizam $\Phi^{(1)} = \Phi_0|_{\widehat{\mathcal{D}}^{(1)}}$ (vidi [22] i Točka 4.2.) i zaključiti da je $(\overline{\mathcal{F}}^{\otimes l})^{GL(l,\mathbb{C})}$ ireducibilan $\widehat{\mathcal{D}}^{(1)}$–modul. Odavde slijedi tvrdnja. $\square$

Ovom konstrukcijom smo dobili ulaganje proste verteks algebre $L_{-2l}^{W_\infty}$ u verteks superalgebru simplektičkih fermiona $\overline{\mathcal{F}}^{\otimes l}$. Da bi dobili dekompoziciju od $\overline{\mathcal{F}}^{\otimes l}$ kao modula za dualni par $(GL(l,\mathbb{C}), \widehat{\mathfrak{gl}}_o)$, preostaje konstruirati određene singularne vektore. Definirajmo operatore:

$$\widetilde{\Xi}_i^{+,m_i} = b_i(-m_i)\dots b_i(-1) = \Xi_i^{+,m_i},$$

$$\widetilde{\Xi}_i^{-,m_i} = c_i(-m_i)\dots c_i(-1).$$

Pomoću njih ćemo konstruirati singularne vektore, ali prvo navedimo tehničku lemu:

Lema 9.16. *Vrijede komutacijske relacije*

$$[\widetilde{E}_{i,j}, b_p(m)] = \delta_{j,-m} m b_p(-i),$$

$$[\widetilde{E}_{i,j}, c_p(m)] = \delta_{i,m} m c_p(j),$$

$$[\widetilde{E}_{i,j}, \widetilde{\Xi}_p^{+,m}] = 0, \qquad (j > i > 0),$$

$$[\widetilde{E}_{i,j}, \widetilde{\Xi}_p^{-,m}] = 0, \qquad (j > i > 0),$$

$$[\widetilde{E}_{i,i}, \widetilde{\Xi}_p^{+,m}] = [1 \leq i \leq m](-i)\widetilde{\Xi}_p^{+,m},$$

$$[\widetilde{E}_{i,i}, \widetilde{\Xi}_p^{-,m}] = [-1 \geq i \geq -m] i \widetilde{\Xi}_p^{-,m},$$

gdje je $[1 \leq i \leq m]$ *jednak* 1 *ako je izraz u zagradi istinit,* 0 *inače.*

Dokaz. Računamo

$$[\widetilde{E}_{i,j}, b_p(m)] = \sum_{q=1}^{l} [: b_q(-i) c_q(j) :, b_p(m)] = [: b_p(-i) c_p(j) :, b_p(m)],$$

budući da je za $p \neq q$ komutator $[: b_q(-i)c_q(j) :, b_p(m)]$ nula. Sad imamo dva slučaja, gdje ovisno o predznacima i i j, normalni produkt promijeni ili ne promijeni poredak operatora $b_p(-i)$ i $c_p(j)$. Ako je $-i \geq 0$ i $j < 0$

$$[: b_p(-i)c_p(j) :, b_p(m)] = [-c_p(j)b_p(-i), b_p(m)] = -c_p(j)b_p(-i)b_p(m) +$$

$$b_p(m)c_p(j)b_p(-i) = -c_p(j)(b_p(-i)b_p(m) + b_p(m)b_p(-i)) + \delta_{j,-m} m b_p(-i)$$

$$= \delta_{j,-m} m b_p(-i).$$

Analogan račun za slučaj kad normalni produkt ne promijeni poredak $b_p(-i)$ i $c_p(j)$ daje isti rezultat.

Slično dolazimo i do druge relacije. Za izraz

$$[\widetilde{E}_{i,j}, c_p(m)] = \sum_{q=1}^{l} [: b_q(-i)c_q(j) :, c_p(m)] = [: b_p(-i)c_p(j) :, c_p(m)]$$

dobijemo dva slučaja koji dadu isti rezultat. Raspišimo slučaj kad se u normalnom produktu ne mijenja poredak, odnosno za $-i < 0$ ili $j \geq 0$:

$$[b_p(-i)c_p(j), c_p(m)] = b_p(-i)c_p(j)c_p(m) - c_p(m)b_p(-i)c_p(j) =$$

$$b_p(-i)(c_p(j)c_p(m) + c_p(m)c_p(j)) - \delta_{m,i}(-i)c_p(j) = \delta_{i,m} m c_p(j).$$

Raspis treće relacije daje

$$[\widetilde{E}_{i,j}, \widetilde{\Xi}_p^{+,m}] = \widetilde{E}_{i,j}\widetilde{\Xi}_p^{+,m} - \widetilde{\Xi}_p^{+,m}\widetilde{E}_{i,j} = [\widetilde{E}_{i,j}, b_p(-m)]\widetilde{\Xi}_p^{+,m-1} + b_p(-m)$$

$$[\widetilde{E}_{i,j}, b_p(-m+1)]\widetilde{\Xi}_p^{+,m-2} + b_p(-m)b_p(-m+1)[\widetilde{E}_{i,j}, b_p(-m+2)]\widetilde{\Xi}_p^{+,m-3} + \dots$$

$$+(b_p(-m)\dots b_p(-2))[\widetilde{E}_{i,j}, b_p(-1)].$$

Vidimo da će zbog prve relacije ovaj komutator biti netrivijalan samo ako je jedan od $[\widetilde{E}_{i,j}, b_p(k)]$, $k = -1, .., -m$ netrivijalan. To vrijedi samo ako je $\delta_{j,-k} k b_p(-i)$ netrivijalno, odnosno samo ako je $1 \leq j \leq m$. Dakle, suma je ili trivijalna ili jednaka

$$-j[1 \leq j \leq m] b_p(-m) \dots b_p(-j-1) b_p(-i) b_p(-j+1) \cdots_p (-1).$$

Ukoliko je $j > i > 0$ vidimo da se u kompoziciji pojavljuje operator $b_p(-i)^2$ koji je 0. Uvrstimo li $j = i$ dobijemo rezultat

$$-[1 \leq i \leq m] i \widetilde{\Xi}_p^{+,m},$$

odnosno desnu stranu pete relacije iz leme.

Sasvim analogno se dokazuje

$$[\widetilde{E}_{i,j}, \widetilde{\Xi}_p^{-,m}] = i[-m \leq i \leq -1] c_p(-m) \dots c_p(i-1) c_p(j) c_p(i+1) \dots c_p(-1)$$

pa slijede četvrta i šesta relacija.

□

Iz Leme 9.16 direktno slijedi sljedeći korolar.

Korolar 9.17. *Operatori $\widetilde{E}_{i,i}$ djeluju poluprosto na $\overline{\mathcal{F}}^{\otimes l}$. Prema tome $\overline{\mathcal{F}}^{\otimes l}$ je težinski $\widehat{\mathfrak{gl}}_o$–modul.*

Sada navodimo sljedeći fundamentalni rezultat.

Teorem 9.18. *Za težinu $\lambda \in \Sigma$ parametriziranu cjelobrojnim l-torkama $(m_1, \dots, m_l)$ takvim da*

$$m_1 \geq m_2 \geq \dots m_{i_0} > m_{i_0+1} = 0 = \dots m_{j_0-1} > m_{j_0} \geq \dots m_l$$

singularni vektor je dan formulom

$$v_\lambda = \widetilde{\Xi}_1^{+,m_1} \dots \widetilde{\Xi}_{i_0}^{+,m_{i_0}} \widetilde{\Xi}_{j_0}^{-,-m_{j_0}} \dots \widetilde{\Xi}_l^{-,-m_l} |0\rangle.$$

Težine za $\widehat{\mathfrak{gl}}_o$ su dane relacijom

$$\widetilde{E}_{i,i} v_\lambda = -|i| k_i v_\lambda,$$

gdje je k_i broj m_p-ova većih ili jednakih i, za $i > 0$, odnosno broj m_p-ova manjih ili jednakih i, za $i < 0$. Tada vrijedi i dekompozicija

$$\overline{\mathcal{F}}^{\otimes l} = \bigoplus_{\lambda \in \Sigma} L(\lambda, GL(l, \mathbb{C})) \otimes L(\Lambda_o(\lambda), \widehat{\mathfrak{gl}}_o, -2l),$$

gdje je $L(\lambda, GL(l, \mathbb{C}))$ ireducibilan $GL(l, \mathbb{C})-$modul najmanje težine λ a $L(\Lambda_o(\lambda), \widehat{\mathfrak{gl}}_o, -2l)$ ireducibilan $\widehat{\mathfrak{gl}}_o$-modul najveće težine $\Lambda_o(\lambda)$.

Dokaz. Radi urednijeg zapisa uvedimo oznake

$$A_p = \prod_{i=1}^{p-1} \widetilde{\Xi}_i^{\pm,m_i}, \quad B_p = \prod_{i_p+1}^{l} \widetilde{\Xi}_i^{\pm,m_i},$$

$$C_{p,q} = \prod_{i=p+1}^{q-1} \widetilde{\Xi}_i^{\pm,m_i}, \quad p \leq q$$

gdje prazne produkte A_1, B_l, $C_{p,p}$ definiramo kao identitetu.

Treba pokazati $\widetilde{E}_{i,j}v_\lambda = 0$ za $j > i$ i $gv_\lambda = v_\lambda$ za $g \in GL(l)$ donjetrokutaste sa 1 na dijagonali. Budući da je podgrupa donjetrokutastih unipotentnih matrica generirana sa

$$g_{(i,j,\alpha)} = \begin{array}{cc} & j \downarrow \\ i \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & 0 & \alpha & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \alpha \in \mathbb{C},$$

($g_{(i,j,\alpha)}$ ima 1 na dijagonali, α na koordinatama (i, j) i ostalo 0), vidimo da je dovoljno pokazati da $g_{(i,j,\alpha)}$, takvi da je $i > j$, fiksiraju v_λ. Dokažimo prvo da je v_λ singularan za $\widehat{\mathfrak{gl}}_o$. Neka je $i < j$, tada

$$\widetilde{E}_{i,j}v = \widetilde{E}_{i,j}\widetilde{\Xi}_1^{+,m_1} \dots \widetilde{\Xi}_{i_0}^{+,m_{i_0}}\widetilde{\Xi}_{j_0}^{-,-m_{j_0}} \dots \widetilde{\Xi}_l^{-,-m_l}|0\rangle = \sum_{p=1}^{l} A_p[\widetilde{E}_{i,j}, \widetilde{\Xi}_p^{\pm,|m_p|}]B_p|0\rangle.$$

Zbog Leme 9.16, $[\widetilde{E}_{i,j}, \widetilde{\Xi}_p^{\pm,|m_p|}]$ su netrivijalni za sljedeća dva slučaja

1. $p < i_0$, $1 \leq j \leq m_p$, $i \geq 0$.

   $$[\widetilde{E}_{i,j}, \widetilde{\Xi}_p^{\pm,|m_p|}]|0\rangle = -j[1 \leq j \leq m]b_p(-m) \dots b_p(-j-1)b_p(-i)b_p(-j+1) \dots b_p(-1)|0\rangle.$$

   $b_p(-i)$ je operator koji anihilira $|0\rangle$ pa zaključujemo da je $[\widetilde{E}_{i,j}, \widetilde{\Xi}_p^{\pm,|m_p|}]|0\rangle$ i u ovom slučaju 0.

2. $p > j_0$, $-1 \geq i \geq m_p$, $j \geq 0$.

   $$[\widetilde{E}_{i,j}, \widetilde{\Xi}_p^{\pm,|m_p|}]|0\rangle = i[-m \leq i \leq -1]c_p(-m) \dots c_p(i-1)c_p(j)c_p(i+1) \dots c_p(-1)|0\rangle$$

   $c_p(j)$ je operator koji anihilira $|0\rangle$ pa zaključujemo da je $[\widetilde{E}_{i,j}, \widetilde{\Xi}_p^{\pm,|m_p|}]|0\rangle$ i u ovom slučaju 0.

Sada gledamo djelovanje podgrupe donjetrokutastih unipotentnih matrica iz $GL(2l, \mathbb{C})$. Sjetimo se da generator $g_{(i,j,\alpha)}$, $j < i$ djeluje na $\overline{\mathcal{F}}^{\otimes l}$ na način

$$g_{(i,j)}b_i(x) = (b_i(x) + \alpha b_j(x))$$

$$g_{(i,j)}c_j(x) = (c_j(x) - \frac{1}{\alpha}c_i(x))$$

a na vektore b_p, c_p koji nisu b_i ni c_j djeluje kao identiteta. Zbog $j < i$,

$$v_\lambda = A_j\widetilde{\Xi}_j^{\pm,\pm m_j}C_{j,i}\widetilde{\Xi}_i^{\pm,\pm m_i}B_i|0\rangle,$$

$$g_{(i,j,\alpha)}v\lambda = (\prod_{p=1}^{l} g_{(i,j,\alpha)}\widetilde{\Xi}_p^{\epsilon_p,\epsilon_p m_p})|0\rangle = (g_{(i,j,\alpha)}A_j)(g_{(i,j,\alpha)}\widetilde{\Xi}_j^{\epsilon_j,\epsilon_j m_j})(g_{(i,j,\alpha)}C_{j,i})$$

$$(g_{(i,j,\alpha)}\widetilde{\Xi}_i^{\epsilon_i,\epsilon_i m_i})(g_{(i,j,\alpha)}B_i)|0\rangle = A_j(g_{(i,j,\alpha)}\widetilde{\Xi}_j^{\epsilon_j,\epsilon_j m_j})C_{j,i}(g_{(i,j,\alpha)}\widetilde{\Xi}_i^{\epsilon_i,\epsilon_i m_i})B_i|0\rangle.$$

$g_{(i,j,\alpha)}$ eventualno može promijeniti $\widetilde{\Xi}_i^{\pm,|m_i|}$ ili $\widetilde{\Xi}_j^{\pm,|m_j|}$, i to ne istovremeno. Naime suprotno bi značilo da su u $\widetilde{\Xi}_i^{\pm,|m_i|}$ prisutni operatori komponente polja $b_i(x)$, odnosno $m_i > 0$, a u $\widetilde{\Xi}_j^{\pm,|m_j|}$ operatori komponente od $c_j(x)$, odnosno $m_j < 0$, a mi smo i i j odabrali tako da $i > j$ pa $m_i < m_j$, budući da je λ dominantna težina. Promatramo dva slučaja:

1. Ako je $m_i > 0$ tada je i $m_j > 0$ pa je $g_{(i,j,\alpha)}\widetilde{\Xi}_j^{\pm,|m_j|} = \widetilde{\Xi}_j^{+,m_j}$ a $g_{(i,j,\alpha)}v_\lambda$ postaje

$$A_i(b_i(-m_i) + \alpha b_j(-m_i))\dots(b_i(-1) + \alpha b_j(-1))B_i|0\rangle$$

Operator $(b_i(-m_i) + \alpha b_j(-m_i))\dots(b_i(-1) + \alpha b_j(-1))$ je suma operatora $\widetilde{\Xi}_i^{+,m_i}$ i $2^{m_i} - 1$ operatora oblika

$$B_U = \alpha^n b_{u_1}(-m_i)\dots b_{u_{m_i}}(-1),$$

takvih da su $u_k \in \{i, j\}$ i bar jedan je jednak j, tj. svaki od tih $2^{m_i} - 1$ operatora B_U sadrži neki $b_j(-m)$, $1 \le m \le m_i$. Budući da je $i > j$, odnosno $m_i \le m_j$, i $\widetilde{\Xi}_j^{+,m_j}$ (koji se nalazi u operatoru A_i) sadrži $b_j(-m)$, pa $A_iB_UB_i$ sadrži kvadrat $b_j^2(-m) = 0$, odnosno jednak je 0. Stoga

$$A_i(b_i(-m_i) + \alpha b_j(-m_i))\dots(b_i(-1) + \alpha b_j(-1))B_i|0\rangle$$
$$= A_i\widetilde{\Xi}_i^{+,m_i}B_i|0\rangle = v_\lambda.$$

2. Ako je $m_j < 0$ tada je i $m_i < 0$ pa je $g_{(i,j,\alpha)}\widetilde{\Xi}_i^{\pm,|m_i|} = \widetilde{\Xi}_i^{-,|m_i|}$ a $g_{(i,j,\alpha)}v_\lambda$ postaje

$$A_j(c_j(m_j) - \frac{1}{\alpha}c_i(m_j))\dots(c_j(-1) - \frac{1}{\alpha}c_i(-1))B_j|0\rangle$$

Operator $(c_j(m_j) - \frac{1}{\alpha}c_i(m_j))\dots(c_j(-1) - \frac{1}{\alpha}c_i(-1))$ je suma operatora $\widetilde{\Xi}_j^{-,-m_j}$ i $2^{-m_j} - 1$ operatora oblika

$$C_U = \left(\frac{1}{-\alpha}\right)^n c_{u_1}(m_j)\dots c_{u_{-m_j}}(-1),$$

takvih da su $u_k \in \{i, j\}$ i bar jedan je jednak i, tj. svaki od tih $2^{-m_j} - 1$ operatora C_U sadrži neki $c_i(-m)$, $1 \le m \le -m_j$. Budući da je $i > j$, odnosno $m_i \le m_j$, i $\widetilde{\Xi}_i^{-,-m_i}$ sadrži $c_i(-m)$, pa $A_jC_UB_j$ sadrži kvadrat $c_i^2(-m) = 0$ pa je $A_jC_UB_j = 0$. Stoga

$$A_j(c_j(m_j) - \frac{1}{\alpha}c_i(m_j))\dots(c_j(-1) - \frac{1}{\alpha}c_i(-1))B_j|0\rangle$$
$$= A_j\widetilde{\Xi}_j^{-,-m_j}B_j|0\rangle = v_\lambda.$$

Težine za $\widehat{\mathfrak{gl}}_o$ izračunamo koristeći Lemu 9.16.

$$\widetilde{E}_{i,i}v_\lambda = \sum_{p=1}^{l} A_p[\widetilde{E}_{i.i}, \widetilde{\Xi}_p^{\pm,m_p}]B_p = i(\sum_{p=1}^{i_0}[1 \le i \le m_p] + \sum_{p=j_0}^{l}[-1 \ge i \ge m_p])v_\lambda.$$

Vidimo da ove sume broje upravo k_0 i da ne mogu istovremeno obe biti netrivijalne.

□

Primjer. Za $l = 3$ i težinu $\lambda = (2, 2, -1))$ singularni vektor je

$$v_\lambda = b_1(-2)b_1(-1)b_2(-2)b_2(-1)c_3(-1)|0\rangle.$$

$$g_{(2,1,\alpha)}b_i = \begin{cases} b_1, & i = 1, \\ b_2 + \alpha b_1, & i = 2, \end{cases}$$

$$g_{(2,1,\alpha)}c_3 = c_3.$$

Kad na v_λ djelujemo elementom $g_{(2,1,\alpha)}$ dobije se:

$$g_{(2,1,\alpha)}v_\lambda = b_1(-2)b_1(-1)(b_2(-2) + \alpha b_1(-2))(b_2(-1) + \alpha b_1(-1))c_3(-1)|0\rangle$$

$$= v_\lambda + \alpha(-b_1(-2)^2b_1(-1)b_2(-1)c_3(-1) - b_1(-2)^2b_1(-1)b_2(-1)c_3(-1)-$$

$$\alpha b_1(-2)^2b_1(-1)b_2(-1)c_3(-1))|0\rangle = v_\lambda.$$

Izračunajmo i djelovanje od $\widetilde{E}_{i',j'}$ za neke $j' > i'$, na primjer $j' = 3$, $i' = 1$.

$$\widetilde{E}_{1,3}v_\lambda = (b_1(-1)c_1(3) + b_2(-1)c_2(3) + b_3(-1)c_3(3))b_1(-2)b_1(-1)b_2(-2)b_2(-1)$$

$$c_3(-1)|0\rangle = -b_1(-2)b_1(-1)^2b_2(-2)b_2(-1)c_3(-1)|0\rangle - b_1(-2)b_1(-1)$$

$$b_2(-2)b_2(-1)c_3(-1)c_2(3)|0\rangle - b_1(-2)b_1(-1)b_2(-2)b_2(-1)c_3(-1)c_3(3)|0\rangle = 0.$$

Također se lako vidi

$$\widetilde{E}_{2,2}v_\lambda = -4v_\lambda,$$

$$\widetilde{E}_{1,1}v_\lambda = -2v_\lambda,$$

$$\widetilde{E}_{-1,-1}v_\lambda = -v_\lambda,$$

$$\widetilde{E}_{i,i}v_\lambda = 0, \quad i \notin \{\pm 1, 2\}.$$

Poglavlje 10

Parafermionska konstrukcija za $\mathcal{W}_\infty$ za centralni naboj $c = -4$

U ovom poglavlju pokazat ćemo da se verteks-algebra $\mathcal{W}_\infty$ može javiti i u nekim drugim konstrukcijama verteks-algebri. Pokazat ćemo da je u slučaju $c = -4$ prosta verteks algebra pridružena $\mathcal{W}_\infty$ izomorfna parafermionskoj verteks-algebri pridruženoj afinoj verteks algebri tipa $A_1^{(1)}$ nivoa -1. Ta afina verteks-algebra je zanimljiva i javlja se u člancima D.Adamovića i O. Peršea [8], te u člancima A. Linshawa. Zanimljivo je da općenito parafermionske verteks-algebre nisu realizirane kao verteks-algebre pridružene beskonačno–dimenzionalnim Liejevim algebrama. Ali ovaj naš rezultat pokazuje da i parafermionske verteks-algebre mogu biti tako realizirane.

Ovo poglavlje koristi neke dijelove teorije W-algebri, afinih verteks-algebri i verteks-algebri pridruženih rešetkama koji se ne javljaju u ostatku radnje. Zbog toga strukturne dijelove tih teorija su izostavljenje. Detaljnija analiza rezultata iz ovog poglavlja i neke zanimljive primjene bit će izložene u članku [1].

Neka je $L = \mathbb{Z}\beta$, $\langle \beta, \beta \rangle = -2$ i neka je $V_L = M_\beta(1) \otimes \mathbb{C}[L]$ verteks algebra rešetke. Promatrajmo verteks superalgebru

$$\overline{F}^{\otimes 2} \otimes V_L,$$

i njenu podalgebru generiranu s

$$\begin{aligned} e &= \Psi_1^+(-\frac{1}{2})\Psi_2^+(-\frac{1}{2})\mathbf{1} \otimes e^{\beta} \\ f &= \Psi_1^-(-\frac{3}{2})\Psi_2^-(-\frac{3}{2})\mathbf{1} \otimes e^{-\beta} \\ h &= -\beta. \end{aligned}$$

Tada e, f, h jako generiraju verteks podalgebru izomorfnu prostoj afinoj algebri verteks operatora $L_{-1}(sl_2)$. Virasorov vektor ω dobiven Sugawarinom konstrukcijom dan je formulom

$$\begin{aligned} \omega_{sug} &= -\frac{1}{4}\beta(-1)^2\mathbf{1} + (\Psi_1^-(-\frac{3}{2})\Psi_1^+(-\frac{1}{2}) + \Psi_2^-(-\frac{3}{2})\Psi_2^+(-\frac{1}{2}))\mathbf{1} \\ &= -\frac{1}{4}\beta(-1)^2\mathbf{1} + J_{-2}^1\mathbf{1}. \end{aligned}$$

Promatrajmo koset podalgebru

$$K(sl_2, -1) = \{v \in L_{-1}(sl_2) \mid h(n)v = 0 \quad \forall\, n \geq 0\}.$$

$K(sl_2,-1)$ je algebra verteks operatora centralnog naboja $c=-4$ sa konformnim vektorom $J^1 = J^1_{-2}\mathbf{1}$.

Lema 10.1. *Vrijedi*
$$J^2 = J^2_{-3}\mathbf{1} \in K(sl_2,-1).$$

Dokaz. Vrijedi jednakost
$$e(-2)f = (\Psi_1^-(-\frac{3}{2})\Psi_1^+(-\frac{3}{2}) + \Psi_2^-(-\frac{3}{2})\Psi_2^+(-\frac{3}{2}))\mathbf{1} + L(-1)\beta(-1)\mathbf{1} + p_3(\beta)\mathbf{1},$$
pri čemu je
$$p_3(\beta) = -\frac{1}{6}(\beta(-1)^3 + 3\beta(-1)\beta(-2) + 2\beta(-3))\mathbf{1},$$
a to povlači tvrdnju $J^2 = J^2_{-3}\mathbf{1} \in K(sl_2,-1)$.

□

Prisjetimo se da smo konstruirali homomorfizam
$$\Phi : M_{-4}^{\mathcal{W}_\infty} \to \overline{F}^{\otimes 2}.$$
Budući da je $M_{-4}^{\mathcal{W}_\infty}$ generirana s J^1, J^2 (ne *jako generirana*!), slijedi zaključak:

Lema 10.2.
$$Im(\Phi) \subseteq K(sl_2,-1).$$

Koristeći strukturnu teoriju koset verteks algebri $K(sl_2,k)$ razvijenu u nizu članaka autora C. Dong, H. Yamada, C. Lam i drugih, znamo da je $K(sl_2,-1)$ kao verteks algebra jako generirana Virasorovim elementom ω centralnog naboja -4 i tri primarna vektora (singularna vektora za Virasorovu algebru) W^3, W^4, W^5 konformnih težina 3, 4 i 5 redom. Tada je $K(sl_2,-1)$ W-algebra tipa $W(2,3,4,5)$ i centralnog naboja -4. Štoviše, u [17] (vidi također [10]) je pokazano da je verteks-algebra $K(sl_2,k)$ generirana vektorom konformne težine 3

$$\begin{aligned} W^3 &= k^2h(-3)\mathbf{1} + 3kh(-2)h(-1)\mathbf{1} + 2h(-1)^3\mathbf{1} \\ &\quad -6kh(-1)e(-1)f(-1)\mathbf{1} + 3k^2e(-2)f(-1)\mathbf{1} - 3k^2e(-1)f(-2)\mathbf{1}. \end{aligned}$$

Stavimo li $k=-1$ u gornji izraz, dobijemo
$$\begin{aligned} W^3 &= -\beta(-3)\mathbf{1} - 3\beta(-2)\beta(-1)\mathbf{1} - 2\beta(-1)^3\mathbf{1} \\ &\quad -6\beta(-1)e(-1)f(-1)\mathbf{1} + 3e(-2)f(-1)\mathbf{1} - 3e(-1)f(-2)\mathbf{1}. \end{aligned}$$

Budući da je u verteks algebri $M_{-4}^{\mathcal{W}_\infty}$ svaki primarni vektor konformne težine 3 proporcionalan sa
$$J^2_{-3}\mathbf{1} - \frac{1}{2}J^1_{-3}\mathbf{1},$$
imamo
$$W^3 = \nu(J^2_{-3}\mathbf{1} - \frac{1}{2}J^1_{-3}\mathbf{1}) \qquad (\nu \neq 0).$$
Ovo povlači da $K(sl_2,-1) \subset \mathrm{Im}(\Phi)$. Na ovaj način smo dokazali sljedeći rezultat

Teorem 10.3. *Vrijedi:*

(1) $K(sl_2,-1) \cong L_{-4}^{\mathcal{W}_\infty}$.

(2) $Im(\Phi)$ je prosta verteks algebra.

(3) $L_{-4}^{\mathcal{W}_\infty}$ *je prosta* $\mathcal{W}$*–algebra tipa* $\mathcal{W}(2,3,4,5)$.

Bibliografija

[1] D. Adamović, M. Polić, O. Perše, to appear

[2] T. Abe, A Z_2-orbifold model of the symplectic fermionic vertex operator superalgebra, Math. Z. 255 (2007) 755-792, arXiv:math/0503472v2

[3] D. Adamović, Representations of the vertex algebra $W_{1+\infty}$ with a negative integer central charge, *Communications in Algebra* 29(7) (2001) 3153-3166

[4] D. Adamović, Classification of irreducible modules of certain subalgebras of free boson vertex algebra, *Journal of Algebra* 270 (2003) 115-132

[5] D. Adamović, A. Milas, On the triplet vertex algebra W(p), *Advances in Mathematics* 217 (2008) 2664-2699

[6] D. Adamović, A. Milas, The $N = 1$ triplet vertex operator superalgebras, *Communications in Mathematical Physics* 288 (2009) 225-270

[7] D. Adamović, O. Perše, On coset vertex algebras with central charge 1, *Mathematical Communications* 15 (2010) 143-157

[8] D. Adamović, O. Perše, The Vertex Algebra $M(1)+$ and Certain Affine Vertex Algebras of Level -1, SIGMA 8 (2012), 040, 16 pages

[9] D. Adamović, O. Perše, Fusion rules and complete reducibility of certain modules for affine Lie algebras, *Journal of algebra and its applications* 13, 1350062 (2014) (18 pages)

[10] T. Arakawa, C. Lam, H. Yamada, Zhu's algebra, C_2-algebra and C_2-cofiniteness of parafermion vertex operator algebras, Adv. Math., vol.264 (2014), 261–295.

[11] H. Awata, M. Fukuma, Y. Matsuo, and S. Odake, Subalgebras of $W_{1+\infty}$ and their quasi-finite representations, *J. Phys. A* 28, 105-112 (1995).

[12] Borcherds, Richard (1986), Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster, *Proc.Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 83 (1986), 3068-3071

[13] T. Creutzig, A. Linshaw, The super $W_{1+\infty}$ algebra with integral central charge, to appear in Transactions of the AMS

[14] T. Creutzig, A. Linshaw, Orbifolds of symplectic fermion algebras, to appear in Transactions of the AMS

[15] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa, Operator approach to the Kadomtsev-Petviashvili equation. Transformation groups for soliton equations III, *J. Phys. Soc. Japan* 50 (1981) 3806-3812

[16] A. De Sole, V. G. Kac, Freely generated vertex algebras and non-linear Lie conformal algebras, *Comm. Math. Phys.* 254 (2005), no. 3, 659-694

[17] C. Dong, C. H. Lam, Q. Wang, H. Yamada, The structure of parafermion vertex operator algebras, *Journal of Algebra* 323 (2010) 371-381

[18] Feigin, B.L., The Lie algebras $gl(\lambda)$ and the cohomology of the Lie algebra of differential operators, *Usp. Mat. Nauk.* 35, No.2, 157-158 (1988)

[19] E. Frenkel, V. G. Kac, A. Radul, W. Wang, $W_{1+\infty}$ and $W(gl_N)$ with Central Charge N, *Comm. Math. Phys.* 1995, 170, 337-357.

[20] E. Frenkel, D. Ben-Zvi, Vertex algebras and algebraic curves. Second edition. Mathematical Surveys and Monographs, 88. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. xiv+400 pp.

[21] I. Frenkel and Y.-C. Zhu, Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras, *Duke Math. J.* **66** (1992), 123-168.

[22] J. García, J. Liberati, Quasifinite representations of classical Lie subalgebras of $W_{\infty,p}$, *J. Math. Phys.* 54 (2013), no. 7, 073502, 19 pp.

[23] V. Kac, Vertex algebras for beginners. University Lecture Series, 10. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. viii+141 pp

[24] Kac, V.G., Peterson, D.H., Spin and wedge representations of infinite-dimensional Lie algebras and groups, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 78, 3308-3312 (1981)

[25] V. Kac, A. Radul, Quasi-finite Highest Weight Modules Over the Lie Algebra of Differential Operators on the Circle, *Comm. Math. Phys.* 1993, 157, 429-457.

[26] V. Kac, A. Radul, Representation Theory of the Vertex Algebra $W_{1+\infty}$ *Transform. Groups.* 1996, 1, 41-70.

[27] V. Kac, W. Wang, C. Yan, Quasifinite Representations of Classical Lie Subalgebras of $W_{1+\infty}$, *Adv. Math.* 1998, 39, 56-140.

[28] Kac, V. G. and Liberati, J. I., Unitary quasifinite representations of W_∞. *Lett. Math. Phys.* 53, 11-27 (2000).

[29] J. Lepowsky; H. Li, Introduction to vertex operator algebras and their representations. Progress in Mathematics, 227. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 2004. xiv+318 pp

[30] H. Li, Representation theory and tensor product theory for vertex operator algebras, Ph.D. thesis (Rutgers University 1994) [hep-th/9406211]

[31] Li, W.L.: 2-cocycles on the algebra of differential operators, *J. Algebra* 122, 64-80, (1989)

[32] A. Linshaw, Invariant chiral differential operators and the W_3-algebra, *J. Pure Appl. Algebra* 213 (2009), 632-648.

[33] A. Linshaw, Invariant theory and the $W_{1+\infty}$ algebra with negative integral central charge, *J. Eur. Math. Soc.* (JEMS) 13 (2011), no. 6, 1737-1768.

[34] A. Linshaw, Invariant subalgebras of affine vertex algebras. *Adv. Math.* 234 (2013), 61-84.

[35] W. Wang, $W_{1+\infty}$ Algebra, W_3 Algebra, and Friedan-Martinec-Shenker bosonization, *Comm. Math. Phys.* 1998, 195, 95-111.

[36] W. Wang, Classification of Irreducible Modules of W_3 Algebra with Central Charge -2. *Comm. Math. Phys.* 1998, 195, 113-128

[37] W. Wang, Duality in infinite dimensional Fock representations, *Commun. Contemp. Math.*, Vol. 1 (1999) 155–199

[38] A. Zamolodchikov, Infinite extra symmetries in two-dimensional conformal quantum field theory, *Teoret. Mat. Fiz.*, 65(3):347-359, 1985.

[39] Y.-C. Zhu, Modular invariance of characters of vertex operator algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), 237–302.

Sažetak

U radnji proučavamo strukturnu teoriju i teoriju reprezentacija verteks algebri $W_{1+\infty}$ i W_∞ za neke centralne naboje. Dajemo eksplicitnu formulu za familiju singularnih vektora u univerzalnim verteks algebrama $W_{1+\infty}$ i W_∞.

Dokazano je da je netrivijalni kvocijent verteks algebre W_∞ za $c = -2$ izomorfan $W_{2,3}$ algebri iz članka W. Wanga [36]. U slučaju centralnog naboja $c = -4$ prosti kvocijent od W_∞ je izomorfan parafermionskoj verteks algebri pridruženoj afinoj Liejevoj algebri $A_1^{(1)}$ nivoa -1. U slučaju nekih drugih centralnih naboja određen je minimalan skup generatora kvocijenata univerzalne verteks–algebre za W_∞.

Promatrana je teorija dualnih parova i realizirana je verteks algebra W_∞ kao podalgebra verteks superalgebre pridružene simplektičkim fermionima. Dokazano je da je verteks superalgebra pridružena simplektičkim fermionima potpuno reducibilna reprezentacija od W_∞.

Summary

In this thesis we study structure and representation theory for vertex algebras $W_{1+\infty}$ i W_∞ for certain central charges. We give explicit formula for a family of singular vectors in universal vertex algebras $W_{1+\infty}$ i W_∞.

It is proved that a non-trivial quotient of the vertex algebra W_∞ with central charge $c = -2$ is isomorphic to $W_{2,3}$ algebra from the paper of W. Wang [36]. In the case of central charge $c = -4$ simple quotient of W_∞ is isomorphic to the parafermionic vertex algebra associated to the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$ of the level -1. For some other central charges, the minimal set of generators for the quotient of universal vertex algebra of W_∞ is determined.

The theory of dual pairs is used for realization of the vertex algebra W_∞ as a subalgebra of the vertex superalgebra associated to the symplectic fermions. It is proved that the vertex superalgebra associated to the symplectic fermions is completely reducible representation of W_∞.

Životopis

Marijan Polić rođen je u Šibeniku, 16. svibnja 1984. godine, gdje je završio osnovnu i srednju školu.

Dodiplomski studij matematike upisao je 2002. godine na PMF Matematičkom odjelu u Zagrebu. Diplomirao je 2008. godine na smjeru Teorijska matematika diplomskim radom *Cliffordove algebre* kod prof. dr. sc. Dražena Adamovića. Iste godine upisao je poslijediplomski doktorski studij matematike.

U travnju 2009. godine zaposlen je kao znanstveni novak na PMF Matematičkom odjelu, gdje radi i danas. Do sada je držao auditorne vježbe iz kolegija Konstruktivne metode u geometriji, Matematička analiza 1 i 2 (ing. studij fizike), Matematička analiza 1 i 2 (nastavnički studij fizike), Računarski praktikum 1, Algebarske strukture i Vektorski prostori.

U školskim godinama 2012/2013, 2013/2014, 2014/2015 obnašao je dužnost člana državnog povjerenstva za natjecanja iz matematike u organiziciji Agencije za odgoj i obrazovanje u Zagrebu.

Sudjelovao je na sljedećim konferencijama: *Representation Theory XI* u Dubrovniku, 2009, *Representation Theory XII* u Dubrovniku, 2011, *Algebraic methods in mathematical physics* u Zagrebu, 2012, *Representation Theory XIII* u Dubrovniku, 2013. Član je Seminara za algebru i Hrvatskog matematičkog društva.