

Trokutni konačni element za analizu srednje debelih ploča upotrebom vezane interpolacije

Triangular Finite Element for Moderately Thick Plate Analysis Using Linked Interpolation

Teo Mudrić⁺, Gordan Jelenić^{*}

⁺*Universita degli studi di Padova, Dipartimento di costruzioni e trasporti, Via Marzolo 9, Padova, Italia*
E-mail: teo.mudric@studenti.unipd.it

^{*}*Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci, Viktora Cara Emina 5, 51 000 Rijeka*
E-mail: gordan.jelenic@gradri.hr

Sažetak. U ovome radu provedena je numerička analiza problema deformiranja linearno elastičnih pločastih nosača. Numerička analiza provedena je primjenom metode konačnih elemenata. Upotrijebljen je trokutni konačni element s vezanom interpolacijom za polje pomaka koji se temelji na Mindlinovoj teoriji srednje debelih ploča. Ponašanje spomenutog elementa testirano je na tri tipska problema te na debelim i tankim pločama.

Ključne riječi: metoda konačnih elemenata, Mindlinova teorija srednje debelih ploča, trokutni element za ploče, vezana interpolacija

Abstract. In this paper a numerical analysis for deformation of linear elastic plates has been carried out. Numerical analysis is performed using the finite element method. A triangular finite element with linked interpolation for transverse displacements based on Mindlin moderately thick plate theory was used. The performance of the mentioned element was tested on three typical problems and on thick and thin plates.

Key words: finite element method, Mindlin moderately thick plate theory, triangular element for plates, linked interpolation

1. Uvod

Metoda konačnih elemenata je numerička metoda koja se temelji na fizičkoj diskretizaciji kontinuuma i predstavlja posebne varijante Galerkinove i Rayleigh-Ritzove metode. Njenom se uporabom rješavanje problema mehanike konstrukcija svodi na rješavanje sustava algebarskih jednadžbi umjesto sustava diferencijalnih i/ili integralnih jednadžbi koji, vrlo često, i nemaju egzaktno rješenje [1].

Ploče su specijalan slučaj trodimenzionalnog kontinuuma kod kojih je debljina jako mala u usporedbi s ostalim dimenzijama.

Teorija tankih ploča temelji se na pretpostavkama koje je formulirao Kirchhoff 1850. god. [2], pa se njegovo ime vezuje uz ovu teoriju, premda je jednu raniju verziju 1811. god. prezentirala Sophie Germain [2]. Modifikaciju Kirchhoffove teorije ploča učinili su Reissner 1945. god. [2], i u nešto malo drugačijem obliku Mindlin 1951. god. [2]. Ove modificirane teorije proširuju primjenu teorije na debele ploče te se zbog toga teorija debelih ploča naziva još i Reissner-Mindlinova teorija ploča [2].

U ovome radu izvršena je analiza naprezanja i deformacija ploča metodom konačnih elemenata. Analize su provedene uporabom trokutnih konačnih elemenata s vezanom interpolacijom [3] za polje pomaka. Navedeni trokutni konačni element temelji se na Mindlinovoj teoriji srednje debelih ploča.

Rad je organiziran na sljedeći način. U poglavlju 2 dane su osnove Mindlinove teorije srednje debelih ploča. Također su dani i izrazi za energiju deformacije i potencijal vanjskog opterećenja, čime je određena potencijalna energija ploče. U 3. poglavlju obrađeni su trokutni konačni element s linearnom interpolacijom polja pomaka i zaokreta i trokutni konačni element s vezanom interpolacijom za polje pomaka. Za navedene elemente dane su interpolacijske funkcije i funkcije pomaka te izrazi za matricu krutosti, vektor opterećenja i jednadžbu ravnoteže konačnog elementa. U poglavlju 4 napravljen je patch test za oba elementa iz poglavlja 3 te je provedena numerička analiza tipskih testnih problema na kojima je testirano ponašanje trokutnog konačnog elementa s vezanom interpolacijom za polje pomaka.

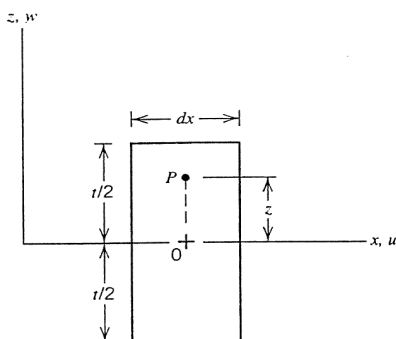
2. Mindlinova teorija srednje debelih ploča

Pod pojmom *ploča* podrazumijeva se plosnato tijelo koje zauzima domenu

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathcal{R}^3 \mid z \in \left[-\frac{t}{2}, +\frac{t}{2} \right], (x, y) \in \mathcal{A} \subset \mathcal{R}^2 \right\}$$

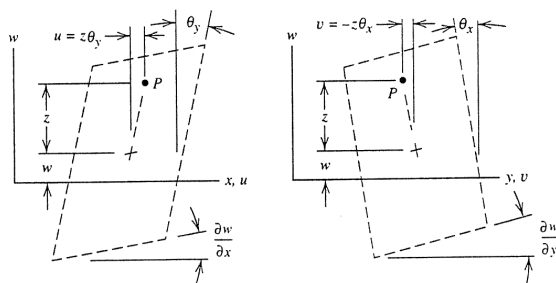
gdje se ravnina $z=0$ podudara sa srednjom plohom neopterećene ploče, a poprečna dimenzija (ili debljina) t je mala u odnosu na ostale dvije dimenzije. Osim toga, opterećenje $p(x,y)$ može djelovati samo u smjeru okomitom na srednju plohu.

Na Slici 1 prikazan je diferencijalni dio ploče koji je izdvojen s dvije ravnine okomite na os x .



Slika 1. Diferencijalni dio ploče debljine t prije opterećenja [4]

Pod djelovanjem opterećenja diferencijalni element sa Slike 1 poprima deformacije prikazane na Slici 2, gdje su θ_x i θ_y komponente rotacije linije koja je prije deformacije bila okomita na srednju plohu.



Slika 2. Pomaci poprečnog presjeka paralelnog sa xz ravninom i poprečnog presjeka paralelnog sa yz ravninom [4]

Sa Slike 2 uočava se da presjeci koji su prije deformacije bili ravni i okomiti na srednju plohu nakon deformiranja mogu poprimiti rotacije različite od rotacija srednje plohe te na taj način ne ostaju okomiti na srednju ravninu ploče, ali i dalje ostaju ravni. Na taj se način u Mindlinovoj teoriji srednje debelih ploča [4] uzimaju u obzir poprečne posmične deformacije, što ovu teoriju razlikuje od Kirchhoffove teorije tankih ploča [4] kod koje se poprečne

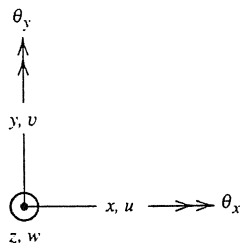
posmične deformacije zanemaruju, a poprečni presjeci koji su prije deformiranja bili okomiti na srednju ploh, nakon deformiranja ostaju okomiti na srednju ploh. Normalne deformacije u smjeru osi z se zanemaruju ($\varepsilon_z=0$).

Pomaci proizvoljne točke P u smjeru koordinatnih osi određeni su sljedećim izrazima:

$$u = z\theta_y \quad v = -z\theta_x \quad w = w(x, y) \quad (1)$$

gdje je u pomak u smjeru osi x , v pomak u smjeru osi y i w pomak u smjeru osi z .

Positivni smjerovi rotacija θ_x i θ_y prikazani su na Slici 3.



Slika 3. Pomaci i pozitivni smjerovi rotacija θ_x i θ_y [4]

Veza između deformacija i pomaka prikazana je kinematičkim jednadžbama:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta_y \\ \theta_x \end{Bmatrix} = z \mathbf{D}_b \mathbf{u} \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta_y \\ \theta_x \end{Bmatrix} = \mathbf{D}_s \mathbf{u} \quad (3)$$

gdje su \mathbf{D}_b i \mathbf{D}_s matrice diferencijalnih operatora, a \mathbf{u} je vektor funkcija pomaka.

Veza naprezanja i deformacija prikazana je konstitutivnim jednadžbama [5]:

$$\sigma_b = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\sigma_s = \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

gdje je E Youngov modul, a ν je Poissonov koeficijent.

Rezultante naprezanja i njihove momente u poprečnim presjecima dobivene su integriranjem naprezanja i momenata naprezanja po visini ploče:

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz, \quad (6)$$

$$S_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz, \quad S_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{zx} dz, \quad (7)$$

kao

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{Bmatrix} S_y \\ S_x \end{Bmatrix} = \frac{Et k}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \end{Bmatrix} \quad (9)$$

U izrazu (8) M_x je specifični moment savijanja (po jedinici duljine) u smjeru osi x , M_y je specifični moment savijanja u smjeru osi y i M_{xy} je specifični moment uvijanja (torzije). U izrazu (9) S_y je specifična poprečna sila (po jedinici duljine) u smjeru osi y i S_x je specifična poprečna sila u smjeru osi x . Koeficijent k je korekcijski koeficijent kojim se uzima u obzir nejednolikost posmičnih naprezanja, a obično se uzima da iznosi $5/6$ [6].

2.1 Potencijalna energija ploče

Potencijalna energija tijela sastoji se od potencijalne energije deformacije ϕ i potencijala vanjskog opterećenja U :

$$\Phi = \phi - U \quad (10)$$

Energiju deformacije možemo izraziti kao zbroj energije deformacije od savijanja (ϕ_1) i energije deformacije od poprečnog posmika (ϕ_2), pa je ukupna energija deformacije:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 \quad (11)$$

$$\phi = \frac{1}{2} \int_A \int_{-t/2}^{t/2} \boldsymbol{\varepsilon}_b^T \mathbf{C}_b \boldsymbol{\sigma}_b dz dA + \frac{k}{2} \int_A \int_{-t/2}^{t/2} \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \mathbf{C}_s \boldsymbol{\sigma}_s dz dA \quad (12)$$

Uvrštavanjem (2), (3), (4) i (5) u (12) dobiva se:

$$\phi = \frac{1}{2} \int_A \mathbf{u}^T \mathbf{D}_b^T \mathbf{C}_b \mathbf{D}_b \mathbf{u} dA + \frac{1}{2} \int_A \mathbf{u}^T \mathbf{D}_s^T \mathbf{C}_s \mathbf{D}_s \mathbf{u} dA \quad (13)$$

gdje su \mathbf{C}_b i \mathbf{C}_s matrice elastičnosti i prikazane su sljedećim izrazima:

$$\mathbf{C}_b = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_s = \frac{Etk}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Za ploču opterećenu površinskim opterećenjem u smjeru osi z (p_{sz}), koncentriranom silom u smjeru osi z ($P_{z,n}$) koja djeluje u nekoj točki sa koordinatama (x_n, y_n) , koncentriranim momentom oko osi x ($M_{y,n}$) koji djeluje u nekoj točki sa koordinatama (x_n, y_n) i koncentriranim momentom oko osi y ($M_{x,n}$) koji djeluje u nekoj točki sa koordinatama (x_n, y_n) potencijal vanjskog opterećenja prikazan je sljedećim izrazom:

$$U = \int_S p_{sz} w dS + P_{z,n} w(x_n, y_n) + M_{x,n} \theta_y(x_n, y_n) + M_{y,n} \theta_x(x_n, y_n) \quad (15)$$

3. Trokutni konačni element za analizu srednje debelih ploča

Trokutni konačni element koji će se upotrijebiti ima tri čvora koji se nalaze u vrhovima trokuta. Svaki čvor ima tri stupnja slobode, što znači da element ima ukupno devet stupnjeva slobode. Stupnjevi slobode u svakom čvoru su: pomak u smjeru osi z (ima oznaku w), rotacija oko osi y (ima oznaku θ_y) i rotacija oko osi x (ima oznaku θ_x).

3.1 Trokutni konačni element s linearnom interpolacijom polja pomaka i rotacija

Raspodjele poprečnih pomaka (w), rotacija oko osi y (θ_y) i rotacija oko osi x (θ_x) prikazane su sljedećim funkcijama:

$$w = \sum_{i=1}^3 N_i w_i \quad \theta_y = \sum_{i=1}^3 N_i \theta_{yi} \quad \theta_x = \sum_{i=1}^3 N_i \theta_{xi} \quad (16)$$

gdje su N_i ($i=1,2,3$) funkcije oblika, a w_i , θ_{yi} i θ_{xi} ($i=1,2,3$) pomak i rotacije čvorova i .

Interpolacijske funkcije N_1 , N_2 i N_3 (ili funkcije oblika) su linearne i prikazane su sljedećim izrazima:

$$N_1 = \frac{1}{2\Delta} [y_3 x_2 - y_2 x_3 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \quad (17)$$

$$N_2 = \frac{1}{2\Delta} [y_1 x_3 - y_3 x_1 + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \quad (18)$$

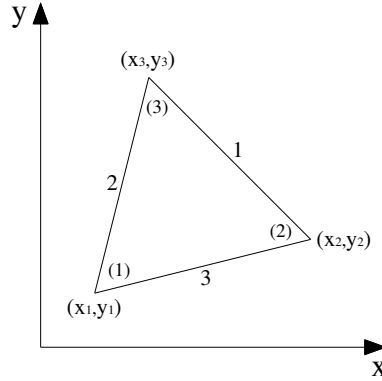
$$N_3 = \frac{1}{2\Delta} [y_2 x_1 - y_1 x_2 + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \quad (19)$$

U izrazima (17), (18) i (19) x_i i y_i su koordinate čvora i ($i=1,2,3$), a Δ je površina trokutnog konačnog elementa prikazanog na Slici 4.

Izraze (16) možemo zapisati i u matičnom obliku:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} w(x, y) \\ \theta_y(x, y) \\ \theta_x(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{N}\mathbf{a} \quad (20)$$

gdje je \mathbf{u} vektor funkcija pomaka, \mathbf{N} matrica interpolacijskih funkcija i $\mathbf{a}^T = \langle w_1 \quad \theta_{y1} \quad \theta_{x1} \quad w_2 \quad \theta_{y2} \quad \theta_{x2} \quad w_3 \quad \theta_{y3} \quad \theta_{x3} \rangle$ vektor čvornih pomaka.



Slika 4. Trokutni konačni element

3.2 Trokutni konačni element s vezanom interpolacijom za polje pomaka

Za interpolaciju poprečnog pomaka kod ovoga je elementa upotrijebljena vezana interpolacija [2, 3, 5]. Uporabom vezane interpolacije dobivamo funkciju poprečnih pomaka w koja je za jedan stupanj viša od funkcija rotacija θ_y i θ_x što je potrebno za granični slučaj tanke ploče kada su rotacije derivacije poprečnih pomaka.

Raspodijela poprečnog pomaka (w) po elementu određena je sljedećom funkcijom [2]:

$$w = \sum_{i=1}^3 N_i w_i - \frac{1}{8} \sum_{a=1}^3 (N_{w\theta})_a l_{bc} (\theta_{sb} - \theta_{sc}) \quad (21)$$

U izrazu (21) N_i ($i=1,2,3$) su funkcije oblika, l_{bc} je duljina stranice između čvorova b i c , θ_{sb} je rotacija u čvoru b oko normale na stranicu između čvorova b i c u ravnini ploče, a $(N_{w\theta})_a$ je funkcija oblika koja daje kvadratnu raspodjelu pomaka w uzduž stranice između čvorova b i c , dok u čvorovima konačnog elementa ima vrijednost nula. Također, a , b i c predstavljaju cikličku permutaciju brojeva 1, 2 i 3. Funkcije $N_{w\theta}$ su definirane kao [2]:

$$\mathbf{N}_{w\theta} = 4[N_1 N_2, N_2 N_3, N_3 N_1] \quad (22)$$

Rotacija oko normale na stranicu $b-c$ u ravnini ploče u čvoru b može se izraziti preko komponenti rotacija θ_{yb} i θ_{xb} (rotacije normale na ploču u čvoru b u smjeru osi x i y , respektivno) uporabom izraza:

$$\theta_{sb} = \cos \psi_{bc} \theta_{yb} - \sin \psi_{bc} \theta_{xb} \quad (23)$$

gdje je ψ_{bc} kut koji čini stranica $b-c$ sa osi x .

Raspodjele rotacija (θ_y i θ_x) prikazane su funkcijama:

$$\theta_y = \sum_{i=1}^3 N_i \theta_{yi} \quad \theta_x = \sum_{i=1}^3 N_i \theta_{xi} \quad (24)$$

gdje su N_i ($i=1,2,3$) funkcije oblika.

Funkcije oblika u (21), (22) i (24) jednake su funkcijama oblika (17), (18) i (19).

Funkcije w , θ_y i θ_x možemo zapisati u matičnom obliku:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} w(x, y) \\ \theta_y(x, y) \\ \theta_x(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & f_{y1} & f_{x1} & N_2 & f_{y2} & f_{x2} & N_3 & f_{y3} & f_{x3} \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{N}\mathbf{a} \quad (25)$$

gdje je \mathbf{u} vektor nepoznatih funkcija pomaka i rotacija, \mathbf{N} matrica interpolacijskih funkcija i \mathbf{a} vektor čvornih nepoznanica. U izrazu (25) funkcije $f_{y1}, f_{x1}, f_{y2}, f_{x2}, f_{y3}$ i f_{x3} prikazane su sljedećim izrazima:

$$f_{ya} = \frac{1}{2} l_{ca} N_c N_a \cos \psi_{ca} - \frac{1}{2} l_{ab} N_a N_b \cos \psi_{ab} \quad (26)$$

$$f_{xa} = \frac{1}{2} l_{ab} N_a N_b \sin \psi_{ab} - \frac{1}{2} l_{ca} N_c N_a \sin \psi_{ca} \quad (27)$$

uz cikličku permutaciju indeksa a , b i c za vrijednosti 1, 2 i 3.

Ove su funkcije dobivene uvrštavanjem (23) u (21) i zatim grupiranjem članova uz $\theta_{y1}, \theta_{x1}, \theta_{y2}, \theta_{x2}, \theta_{y3}$ i θ_{x3} .

3.3 Matrica krutosti, vektor opterećenja i jednadžba ravnoteže konačnog elementa

Kontinuum, odnosno konstrukcija je u ravnoteži kada je prva varijacija ukupne potencijalne energije jednaka nuli. To znači da mora biti u ravnoteži i svaki konačni element. Da bi se odredila potencijalna energija konačnog elementa potrebno je odrediti energiju deformacije i potencijal vanjskog opterećenja konačnog elementa.

Energija deformacije konačnog elementa može se odrediti iz (13) kao [7]:

$$\phi = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a} \quad (28)$$

gdje je \mathbf{a} vektor čvornih pomaka i \mathbf{K} matrica krutosti konačnog elementa.

Matrica krutosti konačnog elementa definirana je kao:

$$\mathbf{K} = \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dA \quad (29)$$

gdje je \mathbf{B} matrica veze deformacija – pomak, a \mathbf{C} je konstitutivna matrica. B-matrica je prikazana sljedećim izrazom:

$$\mathbf{B} = \mathbf{D} \mathbf{N} \quad (30)$$

gdje je \mathbf{D} matrica diferencijalnih operatora i \mathbf{N} matrica interpolacijskih funkcija. Matrica diferencijalnih operatora \mathbf{D} prikazana je kao

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Konstitutivna matrica \mathbf{C} definirana je kao

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \frac{t^3}{12} & \nu \frac{t^3}{12} & 0 & 0 & 0 \\ \nu \frac{t^3}{12} & \frac{t^3}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)t^3}{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)tk}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)tk}{2} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Potencijal vanjskog opterećenja koje djeluje na konačni element možemo odrediti iz izraza (15). Za element opterećen površinskim opterećenjem (p_{sz}) na čitavoj površini te koncentriranim silama (P_z) i momentima (M_x i M_y) u čvorovima potencijal vanjskog opterećenja dobiva se kao [7]:

$$U = \mathbf{a}^T \mathbf{R} \quad (33)$$

gdje je \mathbf{R} vektor opterećenja konačnog elementa definiran kao:

$$\mathbf{R} = \int_S p_{sz} \mathbf{N}_1^T dS + \mathbf{F} \quad (34)$$

U izrazu (34) \mathbf{N}_1 je prvi redak matrice interpolacijskih funkcija \mathbf{N} , a \mathbf{F} je vektor koncentriranih sila i momenata prikazan izrazom:

$$\mathbf{F}^T = \langle P_{z1} \quad M_{x1} \quad M_{y1} \quad P_{z2} \quad M_{x2} \quad M_{y2} \quad P_{z3} \quad M_{x3} \quad M_{y3} \rangle \quad (35)$$

U vektoru \mathbf{F} indeksi 1, 2 i 3 označavaju broj čvora u kojem djeluje opterećenje.

Ukupna potencijalna energija konačnog elementa može se sada zapisati kao:

$$\Phi = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a} - \mathbf{a}^T \mathbf{R} \quad (36)$$

Da bi konačni element bio u ravnoteži, proizvoljna varijacija ukupne potencijalne energije konačnog elementa mora biti jednaka nuli:

$$\delta \Phi = \delta \mathbf{a}^T (\mathbf{K} \mathbf{a} - \mathbf{R}) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{R} \quad (37)$$

Jednadžba (37) naziva se jednadžba ravnoteže ili jednadžba krutosti konačnog elementa.

Definiranje funkcija oblika praktično je najvažniji dio formulacije konačnog elementa, jer se, jedanput kada se odrede, mogu uvrstiti u izraze (29), (34) i (37). Dakle, uvrštavanjem funkcija pomaka (20) u (29), (34) i (37) dobiva se matrica krutosti, vektor opterećenja i jednadžba ravnoteže trokutnog konačnog elementa s linearnom interpolacijom polja pomaka i rotacija, a uvrštavanjem funkcija pomaka (25) u izraze (29), (34) i (37) dobiva se matrica krutosti, vektor opterećenja i jednadžba ravnoteže trokutnog konačnog elementa s vezanom interpolacijom za polje pomaka.

4. Numerička analiza

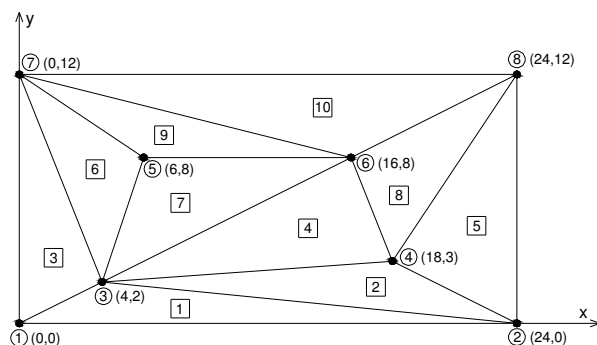
U ovome poglavlju napravljen je patch test i dani su rezultati numeričke analize tipskih testnih problema. Numerička analiza provedena je pomoću programskog paketa MathCAD po uzoru na MathCAD datoteku dr.sc. Vanje Travaša [8].

Cilj je provedenih numeričkih testova analizirati ponašanje trokutnog konačnog elementa s vezanom interpolacijom.

4.1 Patch test

Patch test je test kojim se provjerava sposobnost elementa da prikaže (a) stanje konstantne deformacije, (b) pomak krutog tijela bez deformacije, i (c) kompatibilnost sa susjednim elementima kada prevladava stanje konstantne deformacije [4]. Ako element prolazi patch test rješenja koja se dobivaju proglašivanjem mreže konačnih elemenata, konvergirat će prema egzaktnom rješenju promatranoga problema [4].

Za oba elementa obrađena u poglavlju 3 učinjen je patch test koji je opisan u nastavku. Provjera sposobnosti reproduciranja stanja konstantne deformacije/naprezanja učinjena je na mreži od deset elemenata, prikazanoj na slici 5 [9].



Slika 5. Mreža konačnih elemenata podvrgnuta patch testu

Karakteristike ploče su $E = 10^6$, $\nu = 0.3$, i $k = 5/6$, a za debljinu ploče uzete su u obzir dvije vrijednosti: $t=1$ koja odgovara debeloj ploči i $t=0.001$ koja odgovara tankoj ploči.

Test se sastoji od zadavanja poprečnih pomaka i rotacija u čvorovima ploče na slici 5. Zadani pomaci odgovaraju sljedećim stanjima [9]:

a) stanje konstantnih posmičnih deformacija

$$w = 10^{-3}(x + y), \quad \theta_x = -10^{-3}, \quad \theta_y = 10^{-3}$$

kojem se još dodaju i jednoliko raspodijeljeni momenti m_x i m_y po čitavoj ploči

$$m_x = 641.026t, \quad m_y = -641.026t$$

b) stanje konstantne zakrivljenosti

$$w = -10^{-3}(x + y), \quad \theta_x = -10^{-3}(x + 2y), \quad \theta_y = 10^{-3}(2x + y).$$

Zahtjevi koji moraju biti zadovoljeni su sljedeći: točni poprečni pomaci i rotacije unutrašnjih čvorova za zadane poprečne pomake i rotacije rubnih čvorova i točne deformacije/naprezanja na bilo kojem mjestu unutar ploče. Poprečni pomaci i rotacije čvorova prikazani su prethodnim izrazima, a rezultante naprezanja i njihovi momenti u poprečnim presjecima moraju biti jednaki:

a) $M_x = M_y = M_{xy} = 0$ i $S_y = S_x = 641.026t$ za stanje konstantne posmične deformacije,

b) $M_x = M_y = 238.095t^3$, $M_{xy} = 64.103t^3$ i $S_x = S_y = 0$ za stanje konstantne zakrivljenosti.

Trokutni konačni element s linearnom interpolacijom zadovoljava test konstantne posmične deformacije, a ne zadovoljava test konstantne zakrivljenosti, neovisno o debljini ploče. Prilikom izazivanja stanja konstantne zakrivljenosti u elementima se osim momenata koji imaju točnu vrijednost javljaju i poprečne sile kojih, kao što je navedeno, ne bi smjelo biti, a prilikom zadavanja poprečnih pomaka i rotacija u rubnim čvorovima javljaju se krivi pomaci i rotacije u unutrašnjim čvorovima. Patch test ukazuje da trokutni konačni element s linearnom interpolacijom nije dobar za korištenje u problemima deformiranja pločastih nosača [7] te se stoga taj element u nastavku neće analizirati.

Trokutni konačni element s vezanom interpolacijom prolazi sve navedene testove, neovisno o debljini ploče.

4.2 *Tipski testni problemi*

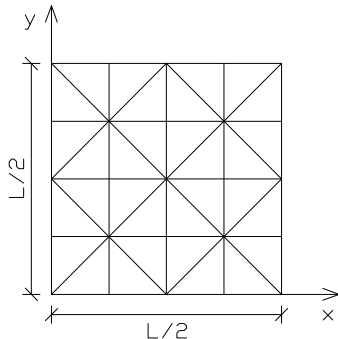
U ovome dijelu analizirana su tri tipska testna problema: kvadratna ploča, kružna ploča i kosa ploča. Numeričke su analize provedene uporabom trokutnih konačnih elemenata s vezanom interpolacijom. Analizirane su debele i tanke ploče. Radi usporedbe su prikazani i rezultati dobiveni elementom 9βQ4 [8] i elementom T3BL [10].

4.2.1 *Kvadratna ploča*

Analizirana je kvadratna ploča sa stranicama duljine $L = 10$ opisana u [9]. Ploča je opterećena jednoliko raspodijeljenim opterećenjem $q = 1$. U obzir su uzeti sljedeći rubni uvjeti: ploča upeta na sve četiri stranice i slobodno oslonjena ploča na sve četiri stranice. Kod slobodnog oslanjanja razmatrani su SS1 i SS2 rubni uvjeti. Kod SS1 rubnih uvjeta čvorovima na slobodno oslonjenom rubu ploče spriječen je samo vertikalni pomak, a rotacije oko

normale i tangente na oslonjeni rub su slobodne. Kod SS2 rubnih uvjeta čvorovi na oslonjenom rubu ploče imaju spriječen vetikalni pomak i rotacije oko normale na rub, dok su rotacije oko tangente ruba slobodne. Razmatrane su debele ($L/t = 10$) i tanke ($L/t = 1000$) ploče, gdje t označava debljinu ploče. Materijalne su karakteristike ploče $E = 10.92$ i $\nu = 0.3$, koeficijent k iznosi $5/6$, a C_b je definiran kao $C_b = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$.

Kvadratna je ploča analizirana koristeći četiri mreže različite gustoće, nazvane mreža 2x2, 4x4, 8x8 i 16x16. Na Slici 6 prikazana je geometrija mreže 4x4. Analizirana je četvrtina ploče. Rezultati koji se odnose na element $9\beta Q4$ i element T3BL dobiveni su mrežama koje imaju broj čvorova jednak broju čvorova mreže 16x16.



Slika 6. Mreža 4x4, gornja desna četvrtina kvadratne ploče

Napominje se da su konačni rezultati u obrađenim testnim problemima ovisni, osim o gustoći mreže, i o geometriji mreže. To znači da različit raspored elemenata kod istog rasporeda čvorova daje različite rezultate.

U Tablici 1 prikazane su vrijednosti poprečnih pomaka i momenata savijanja u sredini upete ploče dobivene upotrebom elementa s vezanom interpolacijom. Element s vezanom interpolacijom ponaša se dobro u slučaju debele i tanke ploče. Može se uočiti da sa progušćivanjem mreže konačnih elemenata dobivena rješenja konvergiraju referentnom rješenju u oba slučaja debljine ploče. Brzina konvergiranja nije velika. Element se ponaša podjednako dobro i u slučaju slobodno oslonjene ploče, što se može uočiti iz Tablice 2.

Tablica 1. Poprečni pomak i moment na sredini upete kvadratne ploče

Mreža	$L/t = 10$		$L/t = 1000$	
	$w/\left(\frac{qL^4}{100C_b}\right)$	$M/\left(\frac{qL^2}{100}\right)$	$w/\left(\frac{qL^4}{100C_b}\right)$	$M/\left(\frac{qL^2}{100}\right)$
2x2	0.084715	1.11035	0.000021	0.00034
4x4	0.139256	2.07501	0.093471	1.59102
8x8	0.147865	2.26152	0.117949	2.11057
16x16	0.149828	2.30559	0.124724	2.25459
9βQ4	0.150638	2.32770	0.126714	2.29888
T3BL	0.150131	2.30930	0.126092	2.28031
Referentno rješenje	0.14990*	2.3100*	0.12653**	2.2905**

* Rješenja za debele ploče [9]

** Rješenja za granični slučaj tanke ploče [9]

Tablica 2. Poprečni pomak i moment na sredini slobodno oslonjene kvadratne ploče

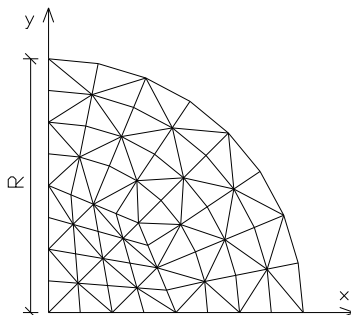
Mreža	$L/t = 10$ (SS1)		$L/t = 10$ (SS2)		$L/t = 1000$ (SS2)	
	$w/\left(\frac{qL^4}{100C_b}\right)$	$M/\left(\frac{qL^2}{100}\right)$	$w/\left(\frac{qL^4}{100C_b}\right)$	$M/\left(\frac{qL^2}{100}\right)$	$w/\left(\frac{qL^4}{100C_b}\right)$	$M/\left(\frac{qL^2}{100}\right)$
2x2	0.393022	3.85911	0.367257	3.63014	0.325527	3.38545
4x4	0.433873	4.69574	0.415495	4.53030	0.386272	4.40109
8x8	0.450803	4.96364	0.424661	4.72891	0.401261	4.68860
16x16	0.458273	5.05689	0.426653	4.77410	0.404997	4.76346
9βQ4	0.460942	5.09577	0.427305	4.79586	0.406242	4.79585
T3BL	0.458561	5.07377	0.426869	4.78940	0.405871	4.78282
Ref. rj.			0.42728*	4.7886*	0.40624*	4.7886*

* Navierovo rješenje [9]

4.2.2 Kružna ploča

Analizirana je upeta i slobodno oslonjena (SS1) kružna ploča. Radijus ploče je $R = 5$, a ploča je opterećena jednoliko raspodijeljenim poprečnim opterećenjem $q = 1$ [9]. U obzir je uzeta debela ($R/t = 5$) i tanka

($R/t = 50$) ploča. Materijalne su karakteristike iste kao u primjeru kvadratne ploče. Modelirana je četvrtina ploče. Upotrijebljene su tri mreže različite gustoće. Najrjeđa mreža se sastoji od 6 elemenata, zatim slijede mreža od 24 elemenata i mreža od 96 elemenata (Slika 7).



Slika 7. Mreža od 96 elemenata, gornja desna četvrtina kružne ploče

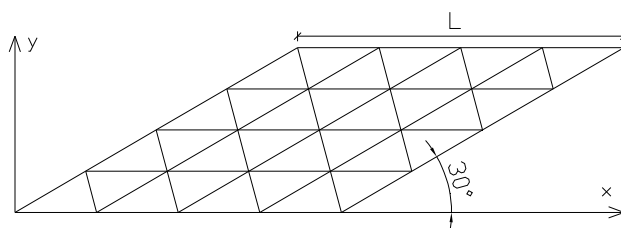
U Tablici 3 prikazane su vrijednosti poprečnog pomaka i momenta savijanja u sredini ploče dobivene numeričkom analizom. Može se uočiti dobro ponašanje elementa za slučaj debele i tanke ploče. Kod upete ploče rezultati konvergiraju prema točnom rješenju sporije nego kod slobodno oslonjene ploče. Rezultati koji se odnose na element $9\beta Q4$ i element T3BL dobiveni su mrežama koje imaju broj čvorova jednak mreži od 96 elemenata.

Tablica 3. Poprečni pomak i moment na sredini upete i slobodno oslonjene (SS1) kružne ploče

Broj elemenata	$R/t = 5$				$R/t = 50$			
	Upeti rub		SS1		Upeti rub		SS1	
	w	M	w	M	w	M	w	M
6	6.806	1.156	40.166	4.641	427.9	0.093	34153	3.682
24	10.377	1.813	41.207	5.016	5179.5	1.201	38658	4.811
96	11.254	1.969	41.495	5.114	9170.1	1.919	39643	5.091
$9\beta Q4$			41.540	5.162			39779	5.161
T3BL	11.302	1.978	41.556	5.124	9523.7	1.977	39785	5.124
Točno rješenje	11.551	2.031	41.599	5.156	9783.5	2.031	39832	5.156

4.2.3 Kosa ploča

Promatrana kosa ploča ima četiri stranice duljine $L = 100$, slobodno je oslonjena (SS1) na sve četiri stranice i opterećena je jednoliko raspodijeljenim opterećenjem $q = 1$ [9]. Dvije kose stranice ploče zatvaraju sa osi x kut od 30 stupnjeva. Materijalne su karakteristike iste kao u primjeru kvadratne ploče. Dvije vrijednosti debljine ploče su uzete u obzir: $t = 1$ i $t = 0.1$. Geometrija upotrijebljenih mreža prikazana je na Slici 8. Broj u oznaci mreže upućuje na broj elementarnih rombova u mreži od kojih se svaki sastoji od po dva trokutna konačna elementa.



Slika 8. Kosa ploča, mreža 4x4

Rezultati dobiveni u središtu ploče za različite mreže i različite debljine ploče prikazani su u Tablici 4.

Tablica 4. Poprečni pomak i momenti na sredini slobodno oslonjene (SS1) kose ploče

Mreža	$L/t = 100$			$L/t = 1000$		
	w/a	M_1/b	M_2/b	w/a	M_1/b	M_2/b
4x4	0.393156	1.67534	0.99468	0.393999	1.66934	1.01734
8x8	0.376569	1.81341	1.10761	0.305318	1.57819	1.11531
16x16	0.403524	1.88770	1.09378	0.285606	1.60587	1.05269
32x32	0.416390	1.92756	1.11238	0.330657	1.71740	1.00851
9βQ4	0.426964	1.95929	1.14868	0.424505	1.95315	1.14322
T3BL	0.419586	1.93657	1.12122	0.412734	1.91781	1.09998
Referentno rješenje	0.42300*			0.4080**	1.910**	1.080**

* Trodimenzionalno rješenje Babuške i Scapolle [9]

** Morleyevo rješenje za granični slučaj tanke ploče [9]

$a=q \cdot L^4 / (100 \cdot C_b)$, $b=q \cdot L^2 / 100$

Element s vezanom interpolacijom se, u ovome primjeru, za slučaj ploče debljine $t = 0.1$ ponaša lošije nego u dva prethodna primjera. Kod ploče

debljine $t = 0.1$ element se ponaša lošije nego kod ploče debljine $t = 1$. Povećanjem debljine ploče dolazi do poboljšanja rezultata.

5. Zaključak

Prikladnim povezivanjem rotacija čvorova s poprečnim pomakom čvorova [2, 3] u izrazu za raspodjelu poprečnog pomaka (w) dobiven je iz trokutnog konačnog elementa s linearnom interpolacijom konačni element s vezanom interpolacijom za polje pomaka. Element s vezanom interpolacijom prolazi patch test i pokazuje relativno dobro ponašanje kroz sve tipske testne probleme, a kod debele ploče ponaša se malo bolje nego kod tanke ploče. Na temelju prolaska patch testa ustanovljeno je da se element s vezanom interpolacijom ponaša dobro u slučaju tanke i debele ploče te da u oba slučaja prognošćivanje mreže konačnih elemenata rezultira konvergencijom rezultata ka točnome rješenju, što je i pokazano na tipskim testnim problemima.

Zahvala. Prikazani rezultati proizašli su iz znanstvenog projekta br. 114-0000000-3025 (Unapređenje točnosti nelinearnih grednih elemenata s neograničenim 3D rotacijama) provedenog uz potporu Ministarstva znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske.

Literatura

- [1] J. Brnić, M. Čanadija. *Analiza deformabilnih tijela metodom konačnih elemenata*. Rijeka, 2009.
- [2] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics, Sixth edition*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.
- [3] Y. J. Liu, H. R. Riggs. The MIN-N family of pure-displacement, triangular, Mindlin plate elements. *Structural Engineering and Mechanics*, **19**: 297-320, 2005.
- [4] R. D. Cook. *Finite Element Modeling for Stress Analysis*. John Wiley & Sons, New York, 1995.
- [5] F. Auricchio, R. L. Taylor. A triangular thick plate finite element with an exact thin limit. *Finite elements in Analysis and Design*, **19**: 57-68, 1995.
- [6] K. J. Bathe. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- [7] T. Mudrić. *Trokutni konačni element za analizu srednje debelih ploča i njegova primjena u linearnoj statičkoj analizi*. Diplomski rad, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Rijeka, 2010.
- [8] V. Travaš. Osobna komunikacija, 2010.
- [9] S. de Miranda, F. Ubertini. A simple hybrid stress element for shear deformable plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **65**: 808-833, 2006.

- [10] R. L. Taylor, F. Auricchio. Linked interpolation for Reissner-Mindlin plate elements: Part II – a simple triangle. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **36**: 3057-3066, 1993.