

Dalibor Gelo¹, Mladen Meštrov², Marta Šavor³

MATRICA KRUTOSTI ŠTAPA DISKONTINUIRANO PROMJENJIVOG POPREČNOG PRESJEKA

Rezime

Rad opisuje izvod matrice krutosti štapa diskontinuirano promjenjivog presjeka primjenom metoda sila. Pod pojmom diskontinuiteta misli se isključivo na promjene u geometrijskim i fizikalnim karakteristikama grede. Također je opisan primjer iz prakse (izlaz na balkon) koji se često javlja kao arhitektonsko rješenje u zgradarstvu. Proučavanjem tog primjera zapaženi su nedostaci izvedene matrice (zanemarivanje poprečnih sila) i uočena je mogućnost za daljnje istraživanje.

Ključne riječi

Matrica krutosti, diskontinuitet, metoda sila, geometrijske i fizikalne karakteristike

STIFFNESS MATRIX OF DISCONTINUOUS BEAMS OF VARIABLE CROSS SECTIONSUMMARY

Summary

The paper describes the derivation of stiffness matrices discontinuously variable section beams using the force method. The term discontinuity is meant purely to changes in geometrical and physical characteristics of the beams. It also describes an example from practice (balcony), which often occurs as architectural design of buildings. By studying the examples were noted deficiencies derived matrix (ignoring transverse force), and spotted the opportunity for further research.

Key words

Stiffness matrix, discontinuities, force method, geometrical and physical characteristics

¹ Mag. ing. aedif, Karlovačka cesta 58a, 10020 Novi Zagreb, Hrvatska, daliborgelo@gmail.com

² Prof.dr.sc., dipl.ing.grad., dipl.ing.mat., Građevinski fakultet, Kačićeva 26, 10000 Zagreb, Hrvatska, mestar@grad.hr

³ Dipl.ing.grad., Građevinski fakultet, Kačićeva 26, 10000 Zagreb, Hrvatska, msavor@grad.hr

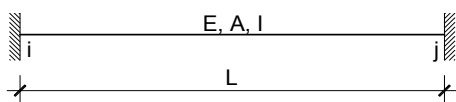
1. UVOD

Mehanika kontinuuma je znanost o čvrstim deformabilnim tijelima, a dovela nas je do matematičkih modela (diferencijalnih jednažbi) koji opisuju ponašanje promatranog tijela. Nemogućnost određivanja analitičkog rješavanja složenih diferencijalnih jednažbi prisiljava nas na primjenu numeričkih metoda.

Primjenom numeričke metode konačnih elemenata (MKE) područje kontinuuma s beskonačno stupnjeva slobode dijeli se na konačan broj područja s konačnim brojem stupnjeva slobode koja predstavljaju konačne elemente. Problem rješavanja diferencijalnih jednažbi primjenom MKE svodi se na sustav linearnih jednažbi:

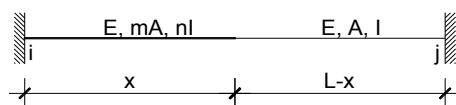
$$\mathbf{F} = \mathbf{k}\mathbf{u} \quad (1)$$

Matrica \mathbf{k} označava matricu krutosti, a ona se izvodi za različite konačne elemente i u pravilu uz konstantne fizikalne i geometrijske karakteristike (modul elastičnosti, viskozitet, moment inercije, površinu).



Slika 1. Model obostrano upetog štapa s konstantnim fizikalnim i geometrijskim karakteristikama

Izvod matrice krutosti za štapni element s diskontinuiranim promjenjivim poprečnim presjekom (mijenjaju se fizikalne i geometrijske karakteristike u diskretnoj točki) bit će prikazan u ovom radu.

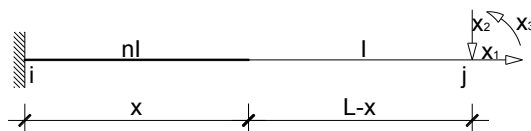


Slika 2. Model obostrano upetog štapa s promjenjivim fizikalnim i geometrijskim karakteristikama

2. IZVOD MATRICE KRUTOSTI DISKONTINUIRANO PROMJENJIVOG PRESJEKA PRIMJENOM METODE SILA

Matrica krutosti za štapni model obostrano upetog štapa sa slike 2 izvedena je primjenom principa stacionarne vrijednosti komplementarne energije. Da bi se na statički neodređenoj konstrukciji izračunala komplementarna deformacijska energija, potrebno ju je presijecanjem prekobrojnih veza pretvoriti u statički određenu. Broj veza koje je potrebno presjeći da bi zadani sistem postao statički određen označava se kao stupanj statičke

neodređenosti. Presijecanjem prekobrojnih veza oslobađaju se nepoznate sile u tim vezama, a označavaju se s $X_1, X_2, X_3, \dots, X_m$. [1]



Slika 3. Model osnovnog sistema

Na temelju jediničnih dijagrama mogu se odrediti članovi matrice fleksibilnosti sljedećim izrazom

$$\delta_{kp} = \left(\frac{n_{kp} \cdot n_{pk}}{EA} + \frac{m_{kp} \cdot m_{pk}}{EI} \right) \quad (2)$$

koji predstavlja pomake na mjestu, pravcu i smjeru sile X_k izazvan silom $X_p = 1$. Izvod matrice fleksibilnosti omogućuje uspostavljanje odnosa između pomaka čvorova

$$D \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i - \varphi_i \cdot L \\ \varphi_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_j \\ w_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix}, \quad (3)$$

a invertiranjem matrice fleksibilnosti dobivaju se vrijednosti sila i momenata u čvoru ji

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_j \\ t_j \\ m_j \end{Bmatrix} = D^{-1} \begin{Bmatrix} u_j - u_i \\ w_j - w_i + \varphi_i \cdot L \\ \varphi_j - \varphi_i \end{Bmatrix}. \quad (4)$$

Također poznat nam je odnos momenata i sila između čvorova ji i ij , tako da vrijedi sljedeće

$$\begin{Bmatrix} n_i \\ t_i \\ m_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -n_j \\ -t_j \\ -m_j + L \cdot t_j \end{Bmatrix}. \quad (5)$$

Opisanim postupkom mogu se odrediti članovi matrice krutosti, a dimenzija matrice krutosti za štapni element je 6x6.

$$k_{11} = \frac{2EA m}{L + Lm} \quad (6)$$

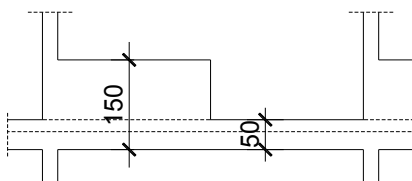
$$k_{23} = -\frac{24EI n(1 + 3n)}{L^2(1 + 14n + n^2)} \quad (7)$$

$$k_{66} = \frac{8EI_n(7+n)}{L(1+14n+n^2)} \quad (8)$$

Zbog složenosti izraza za članove matrice krutosti prikazana su samo tri člana i uvedena je pretpostavka $x = \frac{L}{2}$ (vidi sliku 2.).

3. PRAKTIČNA PRIMJENA

Izvedena matrica može se primijeniti prilikom modeliranja grednih nosača koji imaju promjenu geometrijskih i fizikalnih karakteristika. Promjena fizikalnih karakteristika grede vrlo je rijetka pojava u graditeljstvu dok je promjena geometrijskih karakteristika česta pojava. U zgradarstvu se redovito pojavljuje promjena dimenzije grede kod izlaza na balkon. Ako se promotri arhitektonsko rješenje izlaza na balkon, uočava se da je visina grede ispod vrata znatno manja nego u području ispod prozora. Ta promjena dimenzije prisiljava nas na umetanje dodatnog čvora ili primjenu izvedene matrice.



Slika 4. Primjer grede promjenjivog poprečnog presjeka

4. ZAKLJUČAK

Izvedena matrica uspoređena je s poznatim rješenjima i kompjutorskim programom SAP2000 i utvrđeno je da su dobiveni rezultati točni. Također je pokazano da se matrica krutosti za diskontinuirano promjenjivi presjek može primijeniti u praksi i to u slučaju kada su promjenjive geometrijske i fizikalne karakteristike štapa.

Prikazan je primjer izlaza na balkon kao česti primjer promjene geometrijskih karakteristika grede. Ako se obrati pozornost na visinu grede u području ispod prozora može se uočiti da je znatno premašen omjer $L/5$, što ukazuje na znatan utjecaj poprečnih sila koje su zanemarene u izvodu odnosno u jednadžbi 2. Uočena je mogućnost za daljnje istraživanje, drugim riječima - proširenje izvedene matrice za slučaj kada poprečne sile imaju značajan utjecaj (Timošenkov štap).

LITERATURA

- [1] Anđelić, M.: „Građevna statika II“, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2005.
- [2] Sorić, J.: „Metoda konačnih elemenata“, Naklada Ljevak, Zagreb, 2004.
- [3] Herman, K.: „Teorija elastičnosti i plastičnosti“, Zagreb, 2008.
- [4] CSI Analysis Reference Manual, for SAP, ETABS and SAFE, Computers & Structures, Inc., Berkeley, 2005