

Modeliranje i simulacija

Jadranka Božikov

DEFINICIJE. VRSTE MODELA

U *Hrvatskom općem leksikonu* (Zagreb: Leksikografski zavod *Miroslav Krleža*, 1996) nalazimo ove natuknice:

model (franc.). **1** Uzor, uzorak, obrazac. **2** Kalup po kojem se izrađuje neki predmet. **3** Osoba koja (obično za novac) pozira umjetniku. **4** Predmet (najčešće odjevni ili ukrasni) načinjen samo u jednom primjerku; unikat.

simulacija (lat.). **1** Glumljenje (neke bolesti), pretvaranje, zavaravanje, prenemaganje. **2** **INF** prikazivanje nekih svojstava ili vladanja fizičkog ili apstraktnog sustava s pomoću vladanja nekog drugog sustava.

Dok je drugo navedeno značenje riječi simulacija izvrsna definicija tog pojma u informatičkome smislu, dotle ni jedno od navedena četiriju značenja pojma model smislom ne odgovara potrebama ovog teksta. Modelom ćemo, naime, nazivati kopiju, prikaz, sliku ili prezentaciju nekoga realnog sustava, koja je napravljena da bi se prikazao taj sustav i omogućilo njegovo daljnje proučavanje i upoznavanje.

Model je pojednostavnjeni prikaz realnoga sustava napravljen zato da bi poslužio boljem razumijevanju i/ili daljnjem proučavanju tog sustava i eksperimentiranju s njim.

Sada je pak nužno definirati realni sustav.

Realni sustav je više ili manje izdvojeni dio stvarnoga svijeta koji čini funkcionalnu cjelinu. Realnim sustavom smatramo i nešto što u stvarnosti ne postoji, nego je zamišljeno (planirano) da se napravi u budućnosti.

Modeliranje je stvaranje (oblikovanje) modela.

Modeli se mogu podijeliti prema više različitih stajališta.

Prema građi (strukturi) modeli su:

- fizički (koji se dalje dijele na ikoničke i analogne)
- simbolički (apstraktni)

Prema ponašanju u vremenu oni su:

- statički
- dinamički

Prema načinu su rješavanja:

- konceptualni
- matematički
- simulacijski

Mogli bismo također reći da su tri vrste modela prema ovoj, posljednjoj podjeli zapravo tri stupnja razvoja. Model ćemo najprije prikazati konceptualno (npr. shematski

prikaz, opis riječima). U sljedećem koraku ćemo model formalizirati u obliku matematičkog modela ili pak implementirati kao program za elektroničko računalo kojim ćemo simulirati promjene realnog sustava tijekom vremena. U užem (strogo) smislu riječi matematički je model prikaz realnog sustava sustavom jednažbi (statički model bit će prikazan algebarskim jednažbama dok je matematička prezentacija dinamičkog modela sustav diferencijalnih jednažbi koje prikazuju promjene varijabli tog modela u vremenu).

Mi se u ovom predmetu bavimo simboličkim ili apstraktnim modelima. Zovu se tako jer su pojedini elementi (ili varijable) tih modela prikazane simbolima ili brojevanim vrijednostima, dakle apstraktnim pojmovima. Bavit ćemo se dinamičkim modelima tj. modelima sustava koji se mijenjaju tijekom vremena i upravo te promjene želimo ispitivati simulacijom na računalu.

Simulacijski se modeli dalje dijele prema dvama kriterijima: prema vrsti varijabli u modelu i prema načinu na koji se mijenja stanje modela u vremenu.

Prema izvjesnosti/neizvjesnosti rezultata modeli su:

- deterministički
- stohastički

Prema načinu na koji se mijenja stanje modela razlikuju se:

- modeli diskretnih događaja
- modeli kontinuiranog stanja

Nema strogih pravila (recepta) kako napraviti dobar model, nego veliku važnost imaju:

- razumijevanje problema
- sposobnost apstrakcije
- sistematičnost
- sposobnost razlučivanja bitnog od nebitnog
- iskustvo

Stoga N. T. Bailey kaže:

Modeliranje je umijeće, a ne znanost.

SIMULACIJSKO MODELIRANJE

Iako za proces izradbe modela nema striktnih pravila, dugo iskustvo velikoga broja ljudi koji su se time bavili dovelo je do nekih općih preporuka za izradu simulacijskih modela koje je formulirao G. Gordon još davne, 1969. godine (1).

1. Granica sustava s okolinom mora biti odabrana tako da sustav, odnosno njegov model, obuhvaća samo fenomene od interesa. Okolina sustava modelira se tako da se ne uključuju detalji i uzročne veze među njima, nego se daje samo njihov sažeti prikaz (npr. slučajna razdioba dolazaka u sustav).

2. Modeli ne smiju biti odveć složeni ni detaljni, nego treba modelirati samo relevantne elemente sustava. Odviše složene i detaljne modele teško je ili čak nemoguće razumjeti i vrjednovati, što znači da su i njihov razvoj i uporaba teški i neizvjesne kvalitete.
3. Model ne smije niti odveć pojednostavniti problem npr. izbacivanjem varijabli nužnih za adekvatni opis sustava ili odveć velikim stupnjem agregiranja komponenti sustava.
4. Model je razumno rastaviti na više dobro definiranih i jednostavnih modula s točno određenom funkcijom koju je lakše izgraditi i provjeriti.
5. U razvoju modela preporučuje se primjena neke od provjerenih metoda za razvoj algoritma i programa koje trebaju omogućiti bolje razumijevanje modela i pojedinih njegovih modula u svim fazama razvoja modela.
6. Potrebna je provjera logičke i kvantitativne ispravnosti modela, i to kako pojedinačnih modula, tako i cijelog modela. Kod modela koji uključuju slučajne varijable to znači i primjenu odgovarajućih statističkih tehnika.

Simulacijski je proces struktura rješavanja stvarnih problema s pomoću simulacijskog modeliranja. On se može opisati u obliku niza koraka koji čine pojedine faze rješavanja problema ovom metodom i koji slijede jedan nakon drugog, iako ne strogo sekvencijalno, jer je moguć povratak na prethodne korake procesa, ovisno o rezultatima dobivenima u pojedinim fazama toga procesa.

Osnovni su koraci simulacijskoga procesa sljedeći (kako su ih formulirali Law i Kelton, 1982. godine (2)):

1. Definicija cilja simulacijske studije.
2. Identifikacija sustava.
3. Prikupljanje podataka o sustavu i njihova analiza.
4. Izgradnja simulacijskog modela.
5. Izgradnja simulacijskoga programa.
6. Verificiranje simulacijskog programa.
7. Vrjednovanje simulacijskog modela.
8. Planiranje simulacijskih eksperimenata i njihovo izvođenje.
9. Analiza rezultata eksperimenata.
10. Zaključci i preporuke.

Izgradnja i uporaba simulacijskih modela, u pravilu, zahtijeva rad tima stručnjaka, i onih kojima je promatrani sustav predmet zanimanja i stručnjaka informatičara. Pri složenijim projektima može biti posrijedi tim sastavljen od više desetaka stručnjaka različitih specijalnosti, dok u jednostavnijim slučajevima to mogu biti jedan ili dva čovjeka koji istodobno poznaju i promatrani sustav i metode i tehnike simulacijskog modeliranja. Simulacijski se model realizira u obliku kompjutorskoga programa koji oponaša ponašanje realnog sustava. Taj je program obično napravljen dovoljno općenitim da bi se s pomoću njega mogle simulirati različite situacije koje jesu ili bi mogle nastupiti u stvarnosti. Takve situacije simuliraju se pomoću promjenjivih ulaznih podataka koji su analogni uvjetima (pobudi) u koje može biti doveden realni sustav. Stoga se svako izvođenje kompjutorskoga programa može smatrati simulacijskim eksperimentom koji daje rezultate analogne onima koji bi nastupili u stvarnosti u danim uvjetima. Budući da se rezultati odmah obrađuju i dobivaju u sređenom obliku (tablični i grafički prikazi, statistički obrađeni rezultati) moguća je njihova brža i lakša

interpretacija nego što je to slučaj pri rezultatima dobivenima eksperimentalno na samom realnom sustavu. Dakako, simulacijsko je modeliranje metoda izbora u proučavanju realnih sustava s kojima ne možemo ili ne smijemo eksperimentirati. Stoga se postavlja pitanje kada se i s kojim ciljem na taj način pristupa proučavanju realnih sustava. Možemo reći da se simulacijski modeli općenito primjenjuju radi ovih triju ciljeva:

1. ISTRAŽIVANJE – provjera (verifikacija/falsifikacija) hipoteza o strukturi i ponašanju sustava

Realni sustav koji istražujemo često nam je nedovoljno ili nepotpuno poznat te ćemo na temelju onoga što znamo ili samo pretpostavljamo o tom sustavu napraviti njegov model koji pak treba poslužiti daljnjemu proučavanju tog sustava i eksperimentiranju s njim. Ideja je da nam taj model posluži za reprodukciju ponašanja sustava kako bismo na temelju analize rezultata simulacije verificirali ili falsificirali hipotezu o njegovoj strukturi ili pak ocijenili pojedine kvantitativne parametre.

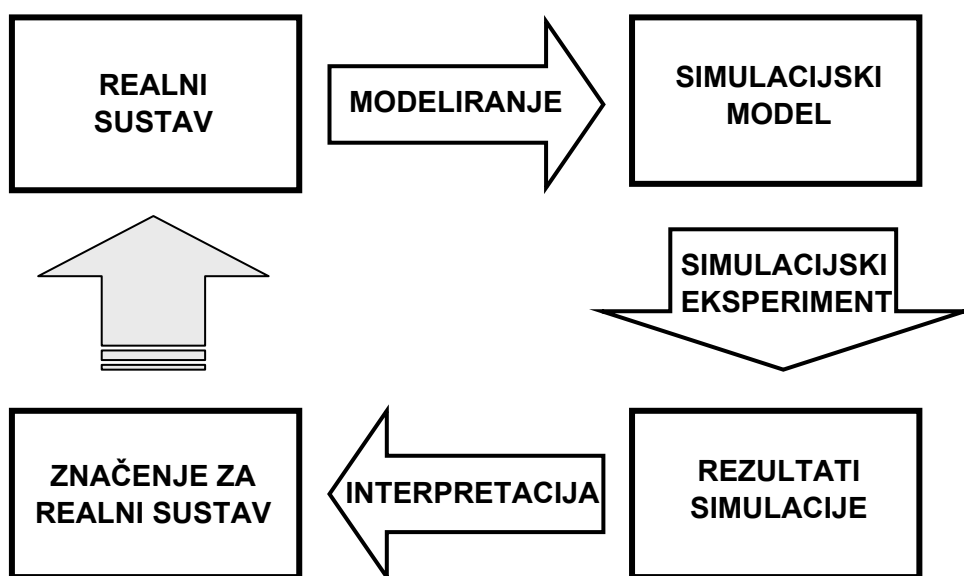
2. PROJEKTIRANJE – projekcija ponašanja sustava u situacijama s kojima nemamo iskustva (npr. u budućnosti za koju se pripremamo)

Druga situacija u kojoj rješavanju stvarnih problema pristupamo s pomoću simulacijskog modeliranja jest ona kad trebamo predvidjeti ponašanje realnog sustava u situacijama s kojima nemamo iskustva (npr. u budućnosti za koju se pripremamo). Tada ćemo ponašanje promatranog sustava simulirati s pomoću računala da bismo ga temeljito analizirali ispitivanjem različitih, potencijalno mogućim uvjetima u kojima bi se mogao naći sustav i odabirom onih rješenja koja smatramo optimalnima. Najčešće se to radi kako bi se sam realni sustav promijenio (npr. reorganizirao) pa rezultati simulacije čine temelj za donošenje odluka o promjeni realnoga sustava.

3. EDUKACIJA – upoznavanje ponašanja sustava stjecanjem umjetnog (posrednog) iskustva (engl. *vicarious experience*)

Mnogi su modeli razvijeni kao edukacijski (nastavni) materijali koji onomu tko uči omogućuju da u interakciji s računalom postavi svoju vlastitu strategiju rješavanja problema i ispita je simulacijom na računalu te tako stekne posredno iskustvo kako o ponašanju promatranog sustava i mogućnostima za njegovo mijenjanje. Valja reći da su mnogi modeli koji su prvotno bili razvijeni radi istraživanja ili projiciranja ponašanja sustava nakon što su provjereni i pokazali da vjerno označuju i oponašaju sustav prerasli u modele za edukaciju.

U svim trima navedenim situacijama polazimo od promatranja i proučavanja realnog sustava, stvaramo njegovu apstraktnu sliku koju realiziramo u obliku kompjutorskoga simulacijskoga programa koji, kad je jednom razvijen, omogućuje vrlo brzo, jeftino i efikasno izvođenje simulacijskih eksperimenata čije rezultate treba interpretirati i na neki način primijeniti na sam realni sustav koji je predmet proučavanja, bilo radi njegovog boljeg upoznavanja bilo radi mijenjanja. Slika C-1. opisuje sva tri slučaja.



Slika C-1. Simulacijski proces

Metode i tehnike simulacijskog modeliranja

Dvije su glavne metode simulacijskog modeliranja: simulacija diskretnih događaja i kontinuirana simulacija čija je posebna podvrsta sistemna dinamika (3,4). Svrha je simulacije diskretnih događaja detaljan prikaz ponašanja realnoga sustava uz uporabu stohastičkih varijabli. U modelima sistemske dinamike agregiraju se entiteti i događaji u odjeljke i tokove kako bi se simuliralo ponašanje sustava sa povratnom vezom (engl. *feedback loop*) za koje se pretpostavlja da su deterministički po svojoj naravi iako uključuju varijable probabilističkih karaktera (brzine ili vjerojatnosti prelaska iz jednog u drugi odjeljak). Na taj se način najčešće modeliraju i simuliraju ekonomski, društveni i biološki fenomeni.

Veliku važnost pri izradbi modela imaju razvoj i primjena konceptualnih modela koji omogućuju eksplicitni prikaz ideja o radu modeliranog sustava te tako olakšavaju razumijevanje i komunikaciju među ljudima koji rade na izradi modela. Svaka od metoda simulacijskog modeliranja ima karakteristične konceptualne modele i simbole koji se rabe u grafičkome prikazu tih modela.

Najvažniji konceptualni modeli u diskretnoj simulaciji jesu:

- dijagrami ciklusa aktivnosti
- Petrijeve mreže (engl. *Petri nets*) kojih ima više vrsta

Konceptualne prikaze modela sistemske dinamike čine:

- dijagrami uzročnih petlji (engl. *causal loop diagrams*)
- dijagrami toka (engl. *flow charts*)

Slijedi sažeti prikaz osnovnih pojmova ovih dviju simulacijskih metoda. Na slikama su prikazani simboli koji se rabe u grafičkome prikazu pripadajućih konceptualnih modela i njihovi primjeri.

SISTEMNA DINAMIKA

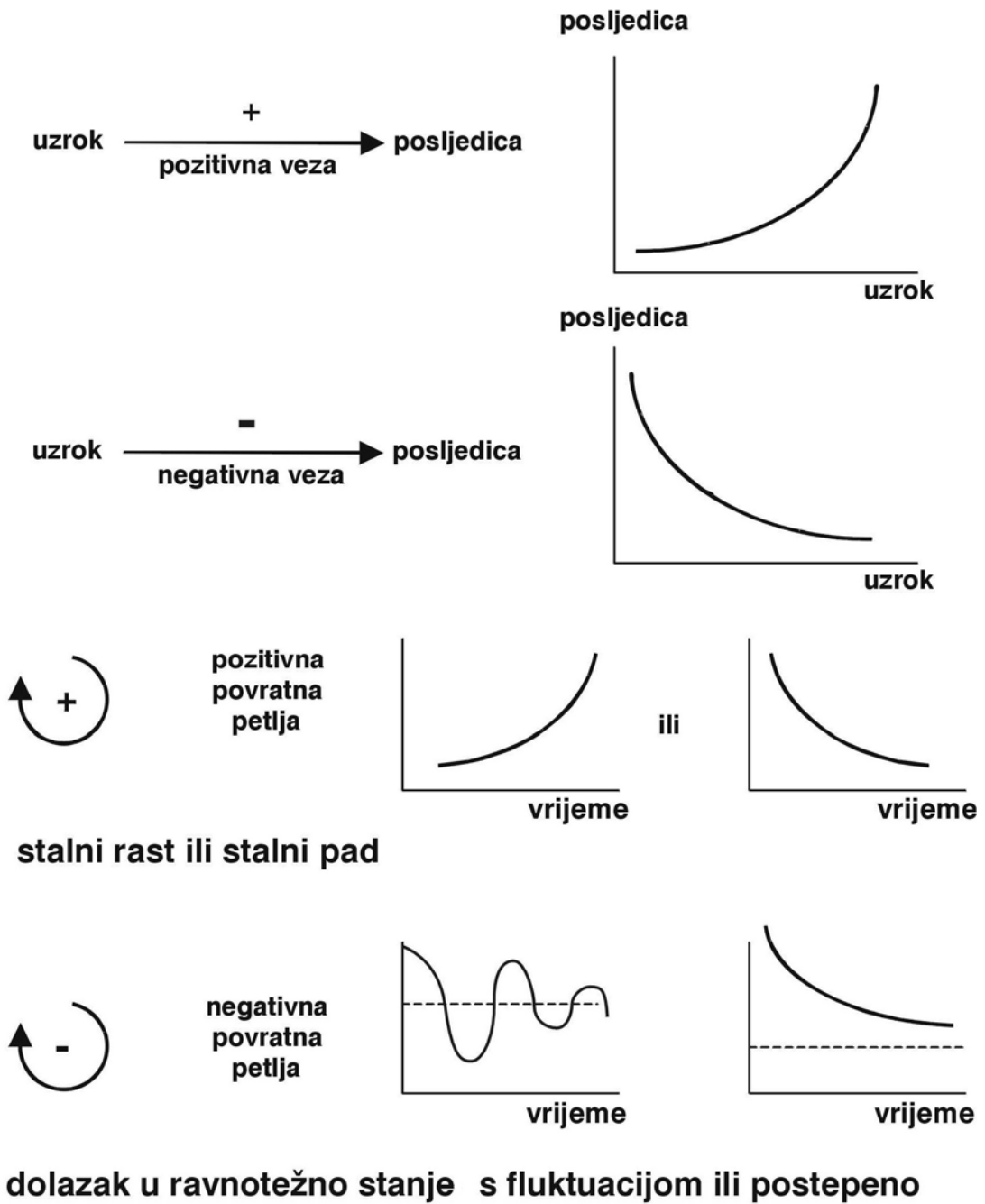
Kao što je već rečeno modelima sisteme dinamike, entiteti i događaji agregiraju se u odjeljke (engl. *levels*) koji su zapravo varijable stanja sustava i tokovi (engl. *flows*). U odjeljcima dolazi do akumulacije materijala dok su tokovi materijala i informacija između odjeljaka određeni brzinama prijelaza na koje, osim odjeljaka, utječu i pomoćne varijable. Poseban tip odjeljka čine oni u kojima dolazi do zadržke ili kašnjenja (engl. *time delay*). To su eksponencijalna kašnjenja konačnog ili beskonačnog reda (može biti riječ o kašnjenju materijala ili o kašnjenju informacija). Oni se na ponašanje sustava sa samoregulacijom (negativnom povratnom petljom) reflektiraju kao oscilacije do kojih dolazi nakon što je sustav “izbačen” iz ravnotežnog (stacionarnog) stanja.

Sistemna dinamika koristi se dvama tipovima konceptualnih modela: dijagramima uzročnih petlji i dijagramima toka. Dijagrami uzročnih petlji prikazuju uzročno-posljedične veze među elementima sustava. Strjelicom se označuje smjer veze, a znak + ili – uz tu strjelicu označava tu vezu kvalitativno kao pozitivnu ili negativnu. Pozitivna je veza ona kod koje povećanje uzroka dovodi do povećanja posljedice (a smanjenje uzroka do smanjenja posljedice), dok se kod negativne veze uzrok i posljedica mijenjaju u suprotnome smjeru (kada uzrok raste, posljedica se smanjuje i obratno, smanjenje uzroka rezultira porastom posljedice). Dvije (ili više) veza koje povezuju uzrok i posljedicu, tj. dvije ili više ulančanih strjelica u smjeru uzrok-posljedica čine povratnu petlju pa ih u dijagramu zamjenjujemo jednom kružnom strjelicom koja je u sredini označena s + ili -. Pozitivna povratna petlja jest ona kod koje elementi petlje djeluju povratno na same sebe u istome smjeru, što rezultira stalnim porastom ili stalnim padom vrijednosti tih elemenata. Kod negativne povratne petlje elementi petlje uzrokuju promjenu smjera vlastita djelovanja, zbog čega sustav ide prema ravnotežnom (stacionarnom) stanju i to bilo postupno bilo fluktuirajući oko toga ravnotežnog stanja. Tip povratne petlje određen je tipom uzročno-posljedičnih veza unutar petlje. Ako su sve uzročno-posljedične veze unutar jedne povratne petlje pozitivne, onda će i čitava petlja biti pozitivna. Ako u petlji ima negativnih veza, tip petlje ovisi o tome je li ukupni broj negativnih veza paran ili neparan: petlja s parnim brojem negativnih veza pozitivna je povratna petlja, a petlja s neparnim brojem negativnih veza negativna je povratna petlja. To je stoga što se negativne veze međusobno poništavaju (jer negativna veza mijenja smjer promjena u petlji) pa stoga svaki par negativnih veza u petlji rezultira pozitivnom vezom (vraća smjer promjena u pozitivni). Simboli koji se koriste u dijagramima uzročnih petlji prikazani su na Slici C-2.

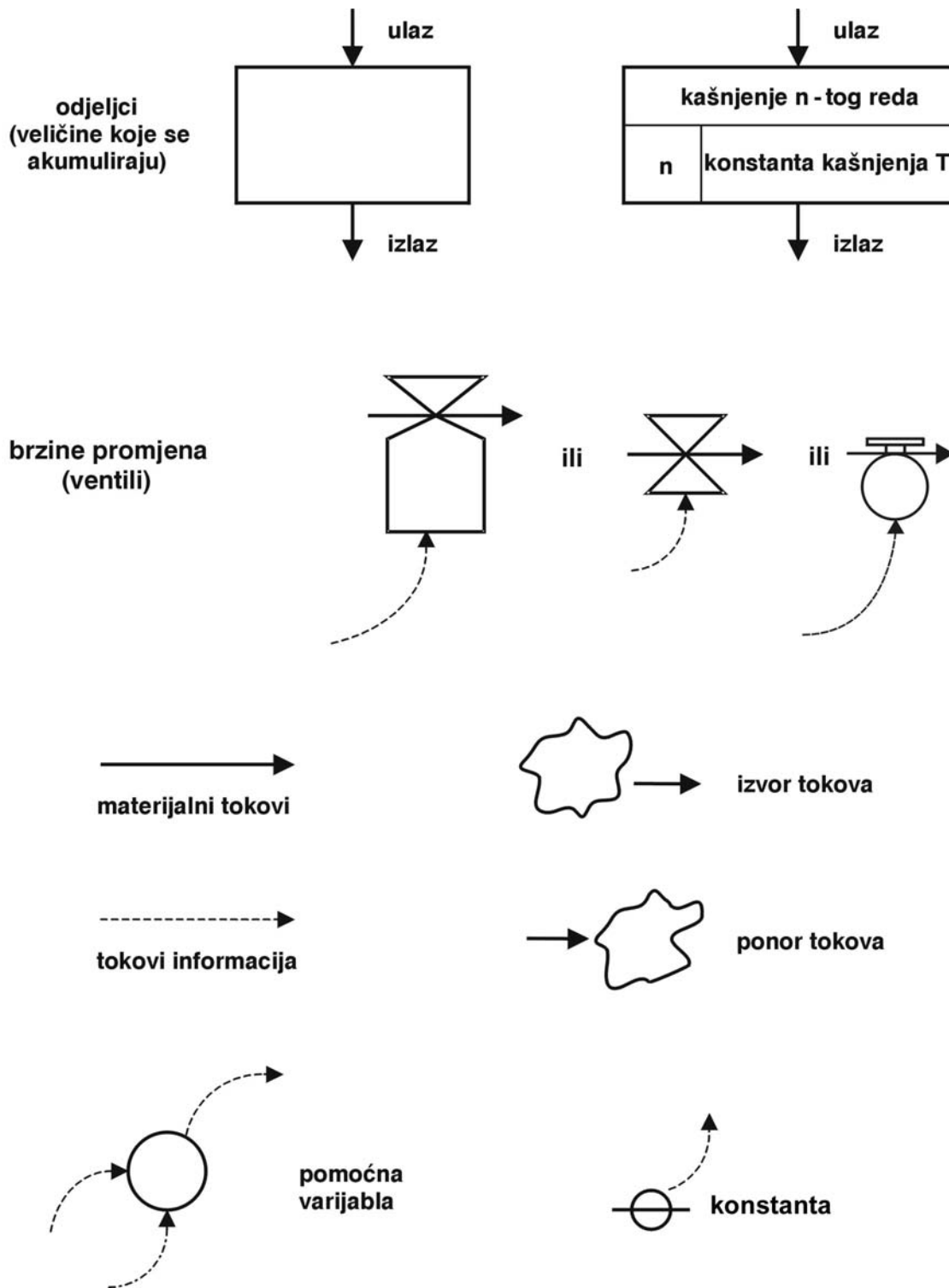
Simboli koji se upotrebljavaju u dijagramima toka prikazani su na slici C-3. Pravokutnicima se prikazuju odjeljci u kojima tijekom vremena dolazi do akumulacije materijala (ulazni tokovi povećavaju, a izlazni smanjuju tu akumulaciju). Tokovi materijala prikazuju se simbolom ventila koji može propuštati više ili manje materijala u jedinici vremena: propusna moć ventila regulirana je tokovima informacija. Stoga obratite pozornost na to da dvostruke (ili pune) strjelice označuju tok materijala dok jednostruke strjelice označuju tok informacija. Krugom se prikazuju pomoćne varijable (poseban tip pomoćnih varijabli jesu konstante). Nepravilan oblik upotrebljava se kao

simbol za prikaz izvora i ponora tokova. Eksponencijalna kašnjenja prikazuju se pravokutnicima kao i odjeljci (ali uz takav odjeljak vezan je još red kašnjenja i vremenska konstanta kašnjenja).

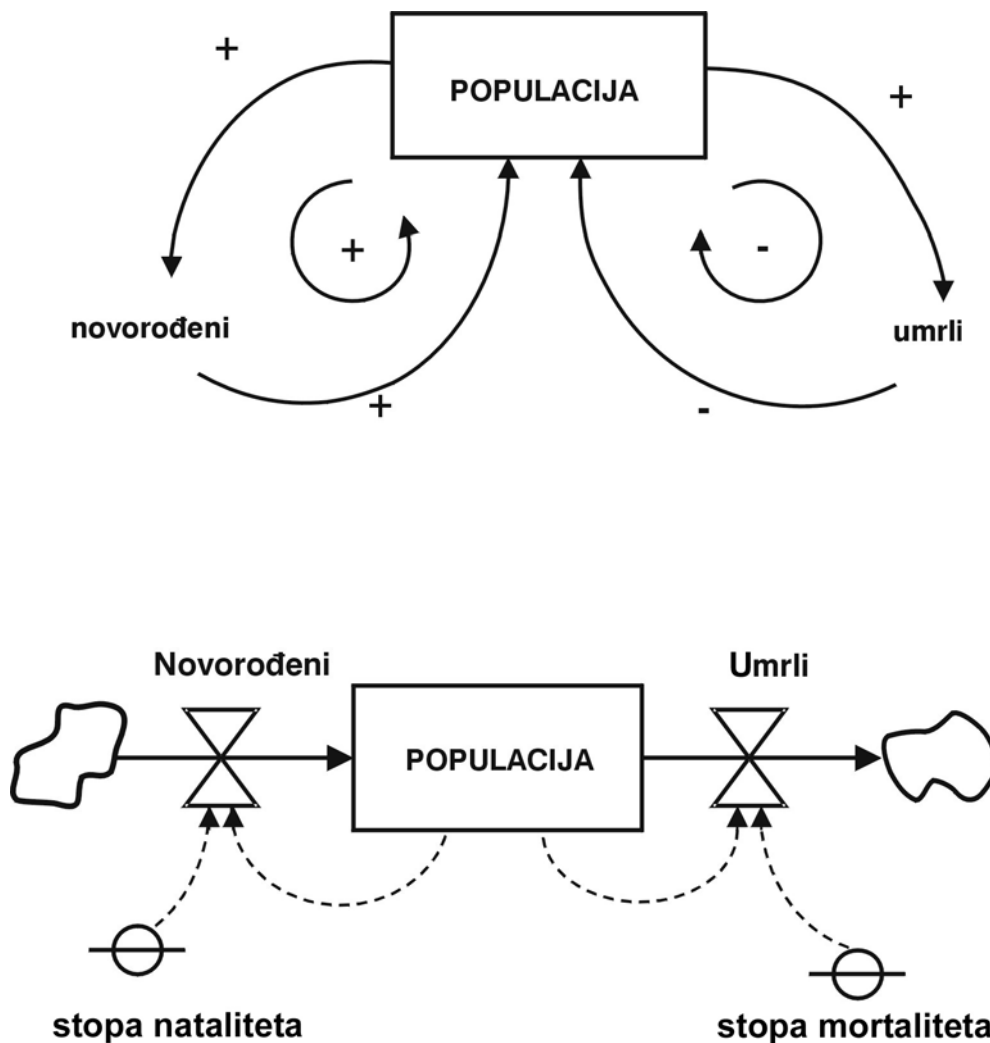
Model dinamike populacije prikazan je na Slici 4. dijagramom uzročnih petlji i dijagramom toka (detaljan opis modela nalazi se na kraju ovog poglavlja).



Slika C-2. Simboli koji se upotrebljavaju u dijagramima uzročnih petlji i njihovo značenje za model



Slika C-3. Simboli koji se upotrebljavaju u dijagramima toka



Slika C-4. Primjer modela rasta populacije prikazan kao dijagram uzročnih petlji (gore) i dijagram toka istog modela (dolje). Stope nataliteta i mortaliteta u dijagramu toka konstante su

Ponašanje sustava u vremenu koje je grafički predočeno dijagramom toka modela detaljnije se prikazuje sustavom diferencijskih jednadžbi. To su jednadžbe konačnih razlika tj. malih ali konačnih promjena pojedinih varijabli (odjeljaka) sustava u malim (konačnim) intervalima vremena koje Δt . Umjesto Δt pisat ćemo dt , što je inače oznaka za beskrajno malu vremensku promjenu (diferencijal) koja se rabi u diferencijalnim jednadžbama (jednadžbe konačnih diferencija aproksimacija su diferencijalnih jednadžbi, dakle, slučaja kad vremenski pomak ili promjena teži prema 0). Vremenski korak dt odabire se proizvoljno, ali tako da bude dovoljno malen kako bi promjene u tim intervalima bile dovoljno male. Simulacija se obavlja računanjem i pribrajanjem tih, malih promjena u malim vremenskim intervalima: iz vrijednosti varijabli modela u času t računaju se promjene u malome vremenskom intervalu dt te se njihovim pribrajanjem (oduzimanjem) izračunava vrijednost varijabli stanja sustava u času $t+dt$. Stoga je simulacija zapravo metoda numeričke integracije: sustav diferencijalnih jednadžbi koji opisuje beskonačno male promjene sustava u vremenu zamijenjen je sustavom diferencijskih jednadžbi (jednadžbi konačnih razlika u konačnim, malim vremenskim

intervalima) koje omogućuju izračunavanje tih promjena računalom u nizu (malih) vremenskih pomaka od početne do konačne vrijednosti. Suvremeni programski alati kao što je npr. dolje spomenuta *STELLA* automatski proizvode programski kôd na temelju dijagrama toka i upisanih vrijednosti pojedinih parametara, a to je veliko olakšanje za korisnika koji sada više ne mora pisati naredbe programa.

Kratka povijest sistemne dinamike s posebnim osvrtom na primjenu u edukaciji

Teorijska osnovica sistemne dinamike razvijena je pedesetih godina na Massachusetts Institute of Technology (MIT), Cambridge, MA (SAD). Najpoznatije ime u području sistemne dinamike bez sumnje je jedan od pionira tog područja prof. Jay W. Forrester. On je mnogo radio na modeliranju različitih aspekata proizvodnih i gospodarskih sustava. Rezultati se mogu naći u nizu knjiga koje je objavio između 1961. i 1973. g. (5-8), ali i u radovima drugih autora koji su ga slijedili.

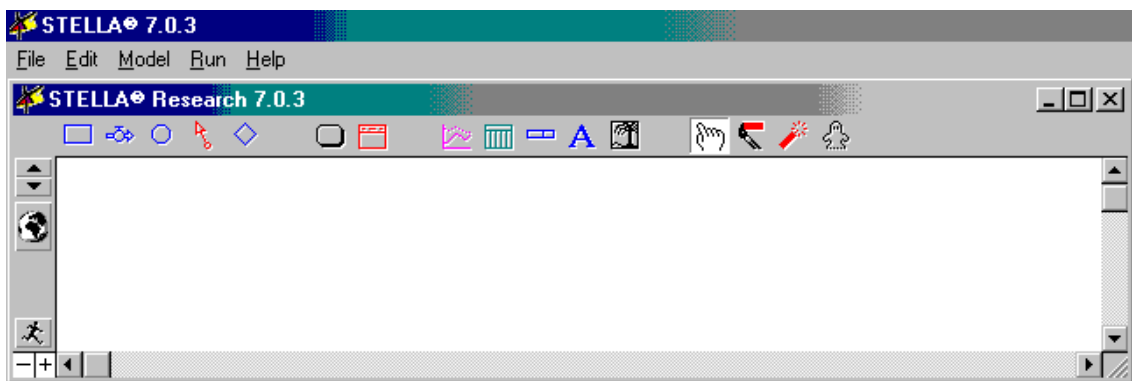
Pokazalo se da je metoda prvotno poznata kao industrijska dinamika primjenjiva za rješavanje raznih problema te se s vremenom počela predavati na mnogim sveučilištima diljem SAD-a i izvan njih kao sistemna dinamika.

Metode sistemne dinamike stekle su određenu popularnost ranih sedamdesetih godina nakon što su primjenjivane u velikoj studiji urbane i svjetske dinamike koja je uzela u obzir rast pučanstva, industrijski razvoj, poljoprivrednu proizvodnju, iscrpljivanje prirodnih resursa, onečišćavanje okoliša i druge gospodarske, društvene i ekološke aspekte života na Zemlji. Rad je bio inicirao Rimski klub (*Club of Rome*), neformalne grupe čiji su članovi bili znanstvenici i gospodarstvenici iz 25 zemalja širom svijeta. Rad na projektu povjeren je timu znanstvenika sa MIT-a koji je vodio prof. Dennis Meadows. Rezultati istraživanja postali su dostupni širokoj javnosti nakon što je izvješće projekta objavljeno u obliku knjige g. 1972. (9). Hrvatski prijevod knjige izašao je u Zagrebu g. 1974. (8).

Rezultati tog istraživanja koji su bili gotovo apokaliptični doveli su do ozbiljnih kritika ne samo pretpostavki modela nego i same metode. Nakon toga su daljnji razvoj i primjena sistemne dinamike tekli s mnogo manje odjeka i podalje od šire javnosti.

Kao logičan nastavak rada na teorijskoj osnovici sistemne dinamike uslijedio je razvoj programskih jezika. Jezik *DYNAMO* (*DYNAmic MOdels*) razvili su P. Fox i A. L. Pugh III g. 1959. za velika računala. Doživio je više inačica, a početkom devedesetih godina pojavio se *Professional DYNAMO Plus*, verzija za osobna računala (11,12). Programski paket pod nazivom *Ithink* ili *Stella* najprije je napravljen za MacIntosh, a danas postoji za McIntosh (*Ithink*) i Windowse (*Stella*), grafički je orijentiran i uključuje niz alata koji olakšavaju razvoj modela. Grafičko korisničko sučelje omogućuje krajnje jednostavnu implementaciju dijagrama toka modela iz kojeg će program automatski napraviti programski kôd. Isto vrijedi i za još neke programske proizvode kao primjerice *Vensim* i *Powersim* (čija je najnovija verzija *Powersim Studio 2005*). Na web stranicama izdavača *isee systems* (ranije *High Performance Systems*) (13) dostupne su sve informacije, a može se rabiti i animirani tutorijal za učenje rada sa *Stellom* isto kao i demo-verzije modela razvijene za potrebe edukacije iz različitih područja (kemija, fizika, biologija, ekologija, medicina, društvene znanosti i dr.), a posebno su zanimljivi modeli inspirirani aktualnim temama (tzv. priče mjeseca). Osim ovih primjera modela i tutorijala može se na vlastito računalo pohraniti i “osiromašena”

verzija programa *Stella* (tzv. *save disabled version* koja ima sve funkcije programa, ali ne dopušta pohranjivanje razvijenog modela) tako da svatko može iskušati raditi s programom. Čitatelju preporučujemo da “skine” demo-verziju programa *Stella* s adrese (14) zajedno s primjerima modela iz različitih područja. Demo-verzije programa *Vensim PLE* i *Powersim Studio 2005* također se mogu besplatno pohraniti zajedno s brojnim primjerima modela za demonstraciju i materijalima za učenje s web mjesta njihovih proizvođača Ventana Systems, Inc. i Powersim (15,16). Mnogi takvi proizvodi, a to osobito vrijedi za tri spomenuta, odlikuju se mogućnošću da se razvijeni modeli pretvore u samostalne interaktivne igre namijenjene učenju. Čitatelju preporučujemo da pokrene program *Stella* i upozna se s tri razine rada: *Map/Model* razinom koja omogućuje implementaciju modela putem grafičkoga korisničkog sučelja, *Interface* razina omogućuje definiranje nastavnog sadržaja temeljenog na razvijenom modelu (igra), dok je treća razina ona koja korisniku omogućuje da vidi programski kôd, odnosno jednadžbe modela (*Equations level*). Nakon pokretanja programa ulazi se na *Map/Model* razinu čiji je izgled prikazan na slici C-5. U Školi narodnog zdravlja imamo licencu za potpunu verziju programa *Stella Research ver. 8* koja se upotrebljava i u nastavi.



Slika C-5. Grafičko korisničko sučelje (*Map/Model level*) programa *Stella 7.0* koje korisniku omogućuje maksimalno jednostavno definiranje strukture modela i njegovih parametara

Općenito, metode sistemske dinamike pogodne su za razvoj modela koji omogućuju bolje razumijevanje modeliranih sustava i eksperimentiranje s njima te na taj način omogućuju stvaranje virtualne okoline pogodne za učenje (*learning environment*) i razvijanje sustavnog mišljenja (*system thinking*). Stoga se ove metode podučavaju na mnogim sveučilištima i srednjim školama diljem svijeta, jer pridonose boljem razumijevanju problema u mnogim područjima. Valja spomenuti i da se redovito održavaju brojni tečajevi iz uporabe tih metoda, a informacije o takvim tečajevima mogu naći i na spomenutim web mjestima proizvođača programa. Diljem svijeta, a osobito u SAD-u te su metode prisutne u srednjoškolskom i visokoškolskom programu različitih predmeta, a vrijedno je spomenuti projekt uvođenja sistemske dinamike i jezika *DYNAMO* u nastavu u američkim srednjim školama koji je još početkom osamdesetih godina vodila N. Roberts, o čemu je objavila i knjigu s mnogobrojnim primjerima modela iz različitih područja života (17).

Na Internetu se može naći čitav niz mjesta s nastavnim sadržajima iz sistemske dinamike. Nezaobilazne su stranice Massachusetts Institute of Technology Sloan School

of Management (MIT Sloan) *System Dynamics Group* posvećene sistemnoj dinamici (18).

Populacijska dinamika i modeliranje ekoloških sustava područja su u kojima su ove metode osobito često primjenjivane a kao primjer oglednoga mjesta navodimo *online* tečaj kvantitativne populacijske ekologije u kojem su prikazane različite metode kako sistemske dinamike, tako i diskretni vremenski modeli, a za web ga je pripremio i učinio dostupnim Alexei Sharov (19) zajendo sa stranicom s koje se mogu dohvatiti mnogi internetski izvori o toj temi (20).

Primjene sistemske dinamike u medicini i zdravstvu

Iako su metode i tehnike sistemske dinamike razvijene radi boljeg razumijevanja i rješavanja drukčijih problema one su izvanredno primjenjive i u području biomedicine gdje je realni sustav koji se promatra čovjek (zdrav ili bolestan) ili populacija. Umjesto akumulacije sirovina ili gotovih proizvoda u pojedinim odjeljcima, ovakvi modeli barataju s količinom lijeka, enzima ili nutrijenata koji se akumuliraju u nekom tkivu (npr. u krvi) ili pak (statistički) kumuliraju ljude koji se nalaze u određenom stanju s obzirom na promatranu bolest. Napravljeni su modeli različitih procesa u čovječjem organizmu (npr. fizioloških, metaboličkih, farmakokinetičkih, farmakodinamičkih i drugih procesa). Mnogi od ovih modela nastali su upravo radi istraživanja tih procesa tj. napravljeni su kako bi omogućili bolje upoznavanje modeliranih sustava i verifikaciju hipoteza o tim sustavima. Neki od njih poslije su pretvoreni u programe za učenje, dok su pak drugi već primarno razvijeni upravo da bi se upotrebljavali u edukaciji. U primjenama sistemske dinamike na probleme u području epidemiologije i javnoga zdravstva obično se promatra čitava populacija. Tijekom posljednjih dvadesetak godina u Školi narodnog zdravlja "Andrija Štampar" razvili smo niz modela dinamike populacije, uglavnom modela kretanja različitih bolesti u populaciji. Mnogi od njih bili su napravljeni kako bi omogućili evaluaciju različitih mjera za kontrolu bolesti i u neke od njih bilo je potrebno uključiti kompleksno strukturiranu populaciju.

Iskustvo i rezultati u primjeni sistemske dinamike na Školi narodnog zdravlja "Andrija Štampar"

U Odjelu za informatiku Škole narodnog zdravlja počeli smo se intenzivnije baviti simulacijskim modeliranjem na poticaj i u suradnji s profesorom Brankom Cvjetanovićem koji je nakon povratka iz Svjetske zdravstvene organizacije u Ženevi potkraj 1970-ih našao u našoj sredini suradnike za nastavak svojeg rada na modeliranju dinamike zaraznih bolesti u populaciji (21). Poslije smo primjenu metoda kontinuirane simulacije proširili na druge probleme, osobito na dinamiku i kontrolu masovnih nezaraznih bolesti u populaciji, praćenje i nastanak genetskih i malignih bolesti, te na simulaciju stanja i potreba za zdravstvenim kadrovima. Taj je rad tijekom dugog niza godina rezultirao primjenom metoda sistemske dinamike u rješavanju različitih problema u mnogim diplomskim, magistarskim i doktorskim radovima, ali i u operacijskim istraživanjima zdravstvenog sustava.

Epidemiološki modeli dinamike zaraznih bolesti u populaciji bili su prvo područje primjene simulacijskog modeliranja, a među njima najprije smo se i najtemeljitije bavili modelom shigeloze (22-25), a zatim ispitivanjem i razvojem modela crijevnih zaraznih bolesti općenito (23,26). Modeli hripavca (27,28) i tifusa (29,30) implementirani su na

temelju već prije oblikovane osnovice da bi ih se upotrijebilo za vrjednovanje različitih strategija imunizacije populacije potencijalno primjenjivih u našoj situaciji. Model hripavca bio je prvi kod kojeg je populacija bila podijeljena u skupine prema dobi, dok je uvođenje još mnogo preciznije strukturirane populacije (prema dobi i spolu) bilo nužno kod modela genetske bolesti fenilketonurije (31), razvijenog u okviru mnogo šire koncipiranog istraživanja nasljednog bremena stanovništva i strategija za njegovu kontrolu (32). Vremenska kašnjenja (pomaci) uvedeni su pokraj dobne strukture kod modela hepatitisa A (33,34) i rubeole (35) koji su napravljeni ponajprije radi ispitivanja različitih strategija u konkretnim situacijama uvođenja imunizacijskih programa populacije i njihova vrjednovanja, uključujući i analizu troškova i koristi. Metode sistemne dinamike primijenili smo zatim i u istraživanjima kretanja nezaraznih kroničnih bolesti u populaciji i mjera za njihovo suzbijanje u okviru projekta optimizacije programa zdravstvene zaštite od hipertenzije (36-38) i shizofrenije (39). Konačno su se u žarištu znanstvenog interesa našli modeli karcinogeneze i kretanja incidencije raka u populaciji (40-42) te histogeneze (43).

Prof. Jakšić koordinirao je Radnu grupu koju je imenovala Zajednica zdravstvenih fakulteta SR Hrvatske u veljači 1989. sa zadatkom da izradi procjenu potreba za zdravstvenim kadrovima različitih profila do 2000. godine. Radna grupa čije je osnivanje bilo potaknuto raspravama o upisnim kvotama na zdravstvene fakultete i prijedlozima za njihovo smanjivanje prihvatila je prijedlog da se kao metoda upotrijebi simulacija stanja i potreba za različitim profilima zdravstvenih stručnjaka (liječnika, medicinskih sestara i tehničara i dr.) te je izrađen model i izveden niz simulacijskih eksperimenata s različitim pretpostavkama o broju upisanih studenata i drugim relevantnim aspektima (npr. uvođenju privatne prakse, zapošljavanju izvan zdravstva i razlikama u pretpostavljenom broju korisnika zdravstvene zaštite), a rezultati su poslužiti kao osnovica za donošenje upisne politike (44). Rezultati simulacije stanja i potreba za liječnicima (doktorima medicine) ponovno su razmotreni u promijenjenim okolnostima godine 1993. te se mogu naći u članku objavljenom u *Liječničkom vjesniku* (45) u kojem je predloženo da se na sva četiri hrvatska medicinska fakulteta upisuje ukupno 400 studenata godišnje te su od te godine upisne kvote konačno smanjene.

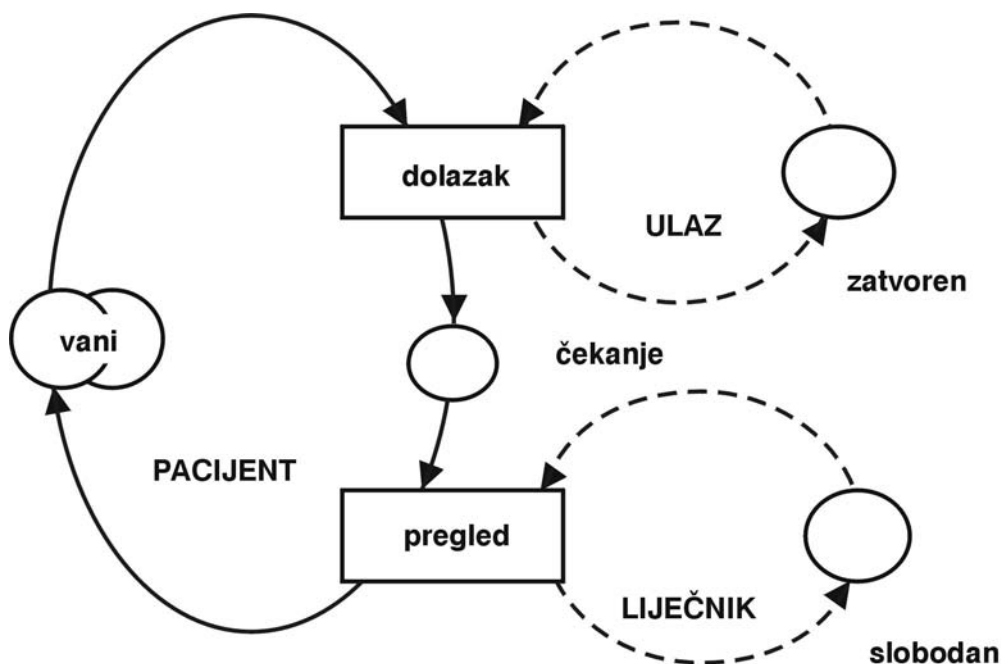
Pojava osobnih računala omogućila je razvoj fleksibilnijih alata i širu uporabu simulacijskih modela. Godine 1987. razvili smo originalnu metodu utemeljenu na uporabi standardnih programa za tablično računanje (tada je najšire primjenjivan među njima bio Lotus 1-2-3), koja je omogućavala mnogo širu i vrlo jednostavnu uporabu simulacijskih modela, a uključivala je mogućnost implementacije modela, promjene parametara, izvođenje simulacijskih eksperimenata i prikaz njihovih rezultata u tabličnom i grafičkom obliku (46). Tijekom 1990-ih godina nabavljeni su komercijalni programi za sistemnu dinamiku koji su omogućili implementaciju novih ali i prije razvijenih modela.

Naša iskustva i rezultate u razvoju i primjeni metoda simulacijskog modeliranja u području epidemiologije i javnoga zdravstva opisali smo u više članaka u kojima se može naći i potpuna lista objavljenih radova (47,48).

SIMULACIJA DISKRETNIH DOGAĐAJA

Ovom se metodom opisuju promjene stanja sustava koje se događaju samo u nekim vremenskim trenucima. Modeli sadrže objekte određenih svojstava koji svojim međudjelovanjem u aktivnostima uzrokuju promjene stanja sustava u vremenu. *Entiteti*

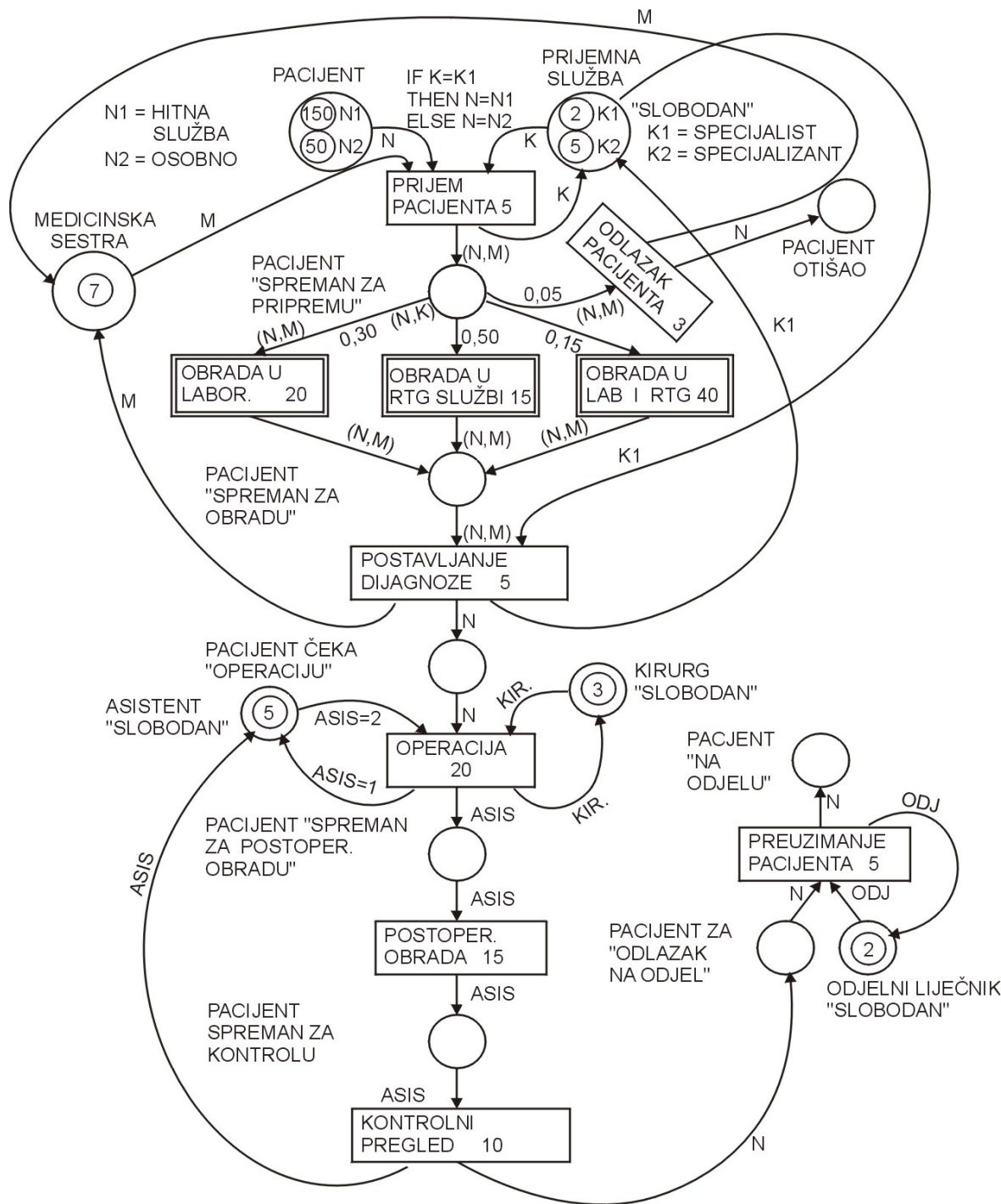
(objekti) ovih modela mogu biti *stalni* ili *privremeni* i imaju atribute. *Stalni entiteti* (ili *resursi*) ostaju u modelu tijekom čitavog vremena trajanja simulacije dok su *privremeni entiteti* oni koji prolaze kroz sustav. *Atributima entiteta* opisuju se njihova svojstva (svaki entitet može imati više atributa). Definiiraju se *klase entiteta* i *skupovi entiteta* (grupe entiteta pojedine klase koji imaju neka zajednička svojstva). S obzirom na mogućnosti dinamičke promjene svojstava, entiteti se mogu tijekom simulacije premještati iz skupa u skup, ali i mijenjati vrijednosti atributa. *Repovi čekanja* čine grupu privremenih entiteta koji čekaju da se oslobodi neki resurs. Koristeći se ovim pojmovima, može se diskretna simulacija ukratko opisati ovako: *entiteti* koji imaju *atribute* međudjeluju u *aktivnostima* uz određene *uvjete* stvarajući *događaje* koji mijenjaju *stanje* sustava.



Slika C-6. Primjer dijagrama ciklusa aktivnosti

Za razliku od modela sistemne dinamike, koji su uglavnom deterministički, modeli diskretnih događaja, u pravilu, uključuju stohastičke (slučajne) varijable. Ponašanje je čitavog modela stohastičko čim je u njega uključena jedna stohastička varijabla.

Pri modeliranju diskretnih događaja također se primjenjuju grafičke metode za prikaz konceptualnih modela. Od grafičkih prikaza spomenut ćemo dijagrame ciklusa aktivnosti, GPSS dijagrame i Petrijeve mreže kojih ima više vrsta (obične, skraćene, obojene, proširene). Slike C-6 i C-7 prikazuju dijagram ciklusa aktivnosti i Petrijevu mrežu.



Slika C-7. Primjer Petrijeve mreže – prikaz modela diskretne simulacije hitne službe (autor modela doc. dr. Vesna Bosilj Vukšić)

Najpoznatiji jezici za diskretnu simulaciju razvijeni prvobitno za velika a poslije prilagođeni za osobna računala jesu *GPSS (General Purpose Simulation System)*, *SIMSCRIPT*, *SIMULA* i drugi. Suvremeni programski proizvodi kakvi su npr. proizvodi *ProModel*, *ServiceModel* i *MedModel* tvrtke *PROMODEL Corporation* omogućuju automatsko programiranje (49). Demo verzije ovih progamaskih proizvoda mogu se pohraniti s adrese (50) zajedno s mnogobrojnim primjerima razvijenih modela. Nešto jendostavniji je i suvremeni softver za diskretnu simulaciju *Arena* (51). Najveći

broj razvijenih modela za diskretnu simulaciju u zdravstvu napravljen je upravo zato da bi omogućio donošenje odluka, osobito odabir najpovoljnijih organizacijskih rješenja.

DRUŠTVA, KONFERENCIJE I ČASOPISI ZA SIMULACIJSKO MODELIRANJE

Mnogobrojne poveznice na zanimljive sadržaje iz područja simulacijskog modeliranja (obje metode) mogu se naći i na stranicama međunarodnih organizacija za simulacijsko modeliranje: Federacije europskih simulacijskih društava EUROSIM (52), časopisa *Modeling & Simulation* koji izdaje Međunarodna udruga za modeliranje i simulaciju (*SCS The Society for Modeling and Simulation International*) i njegovog imenika (53,54), te Društva za sistemnu dinamiku (55) koje organizira godišnju konferenciju i izdaje časopis *System Dynamics Review*, a čitatelja svakako treba upozoriti i na postojanje Hrvatskoga društva za simulacijsko modeliranje CROSSIM (56) koje je također član EUROSIM-a. EUROSIM organizira kongres svake treće godine, a slijedeći, šesti po redu bit će održan u rujnu 2007. u Ljubljani u Sloveniji (57). Gore nabrojena međunarodna društva redovito organiziraju kongrese i stručne skupove, uključujući i škole i tečajeve iz simulacijskog modeliranja i njegove primjene a imaju i bogatu publicističku aktivnost (sve informacije, uključujući i mnoge *online* nastavne materijale može se dohvatiti s navedenih web adresa tih organizacija). Najvažnija američka konferencija u području simulacijskog modeliranja i njegovih primjena je *Winter Simulation Conference (WSC)* koja se održava u SAD-u svake godine početkom prosinca od godine 1967. (58). Programi i cjeloviti tekstovi radova zadnjih četiriju WSC konferencija dostupni su *online* (59). Hrvatsko društvo za simulacijsko modeliranje surađuje u organizaciji međunarodne godišnje konferencije *Information technology Interfaces (ITI)* koja se godine 2006. održala već 28. put (60) i u izdavanju časopisa *The Journal of Computing and Information Technology (CIT)* (61).

Na stranicama mnogih sveučilišta mogu se također naći primjeri pa i čitavi *online* kolegiji iz primjene modeliranja koje su priredili i održavaju nastavnici koji primjenjuju simulacijsko modeliranje u različitim područjima, a ima i portala različitih organizacija (19,20,62).

Primjena metoda simulacijskog modeliranja u zdravstvu i upravljanju općenito dio je mnogo šireg područja poznatog pod nazivom operacijska istraživanja (engl. *operations research*). Stoga se i teorijski radovi, ali i primjeri primjena u zdravstvu mogu potražiti u brojnim časopisima i internetskim izvorima kojima su zajednički nazivnik operacijska istraživanja. Navodimo primjer sekcije koja nosi naslov *The College on Simulation* (63) a dohvatljiva je sa *INFORMS online*, web mjesta Instituta za operacijska istraživanja i menadžerske znanosti (*Institute for Operations Research and Management Sciences*) (64) koji je član Međunarodne udruge društava za operacijska istraživanja (*IFORS – International Federation of Operational Research Societies*) (65). Među radovima na prije spomenutim WSC konferencijama (58,59) brojni su oni u kojima su opisani uspješni primjeri primjena simulacijskih modela pri odlučivanju u zdravstvu. Simulacijski modeli također se primjenjuju pri odlučivanju u području koje u novije vrijeme postaje poznato kao reinženjerstvo poslovnih procesa (engl. *Business Process Re-engineering - BPR*).

PRIMJERI ZA VJEŽBU: MODELI DINAMIKE POPULACIJE

Matematički model za konstantni prirodni priraštaj

Promatrani realni sustav neka bude populacija koja se uvećava isključivo zbog prirodnog priraštaja. To može biti ljudska populacija, ali i bilo koja druga (npr. populacija određene vrste životinja). Valja napomenuti da veličina promatrane populacije može i padati (stagnirati) s vremenom u slučaju negativnog (nultog) prirodnog priraštaja. Neka N_t označuje broj jedinki u trenutku t , n stopu nataliteta, a m stopu mortaliteta u toj populaciji, za koje ćemo pretpostaviti da se ne mijanjaju tijekom vremena. Te su stope po definiciji vjerojatnost rođenja odnosno smrti jedne jedinke na jednu živuću jedinku populacije u jedinici vremena (najčešće se kao jedinica uzima godina dana). Formulirati ćemo matematički model rasta populacije i upozoriti na situacije koje se ne mogu rješavati matematičkim, nego simulacijskim modelom.

Uz pretpostavku konstantnih stopa nataliteta i mortaliteta u prvom (i svakom sljedećem) vrlo malom vremenskom intervalu Δt odgovarajuća promjena veličine populacije ΔN jednaka je razlici broja novorođenih i umrlih tj. možemo općenito pisati

$$\Delta N = N_{t+\Delta t} - N_t = n \cdot N \cdot \Delta t - m \cdot N \cdot \Delta t = (n-m) \cdot N \cdot \Delta t$$

dakle općenito (u svakom vremenskom času t) vrijedi

$$\Delta N = (n-m) \cdot N \cdot \Delta t$$

Ako konačno male promjene ΔN i Δt zamjenimo beskonačno malim promjenama (diferencijalima) tih veličina dN i dt , možemo pisati

$$dN = (n-m) \cdot N \cdot dt$$

Ovo je diferencijalna jednadžba u kojoj se varijable mogu separirati

$$dN/N = (n-m) \cdot dt$$

Lijeva i desna strana dobivene jednadžbe mogu se integrirati te se dobije opći oblik rješenja

$$\ln(N) = (n-m) \cdot t + C$$

iz čega slijedi (e je baza prirodnog logaritma)

$$N = e^{(n-m)t + C} = e^{(n-m)t} e^C$$

što uz $e^C = C_0$ (C i C_0 konstante) možemo pisati

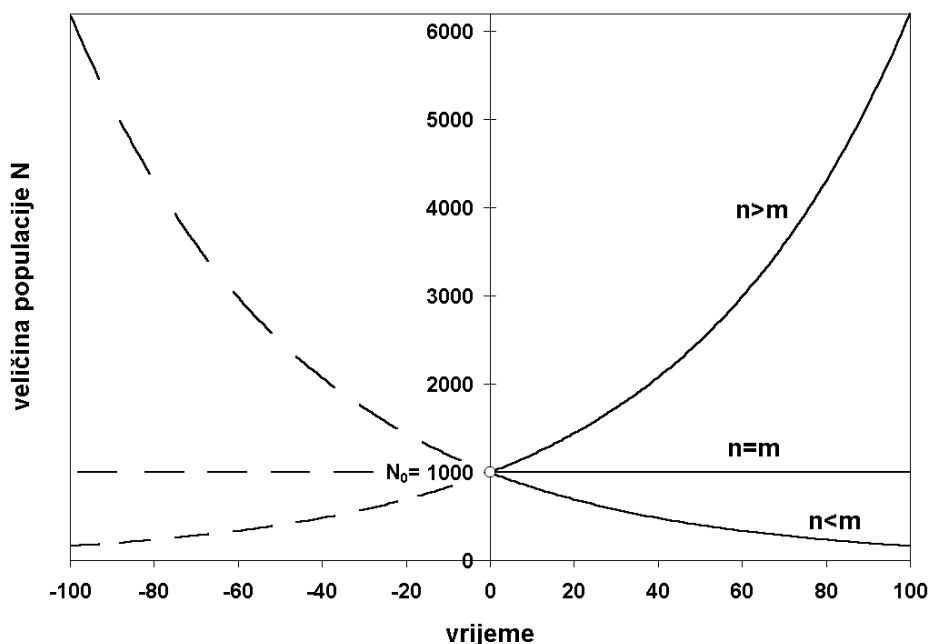
$$N = C_0 e^{(n-m)t}$$

Ovo je opće rješenje gornje diferencijalne jednadžbe. Da bi se dobila veličina promatrane populacije kao funkcija vremena, treba još odrediti konstantu C_0 , a to je moguće jer moramo znati početnu veličinu populacije N_0 u času $t=0$ jer ukoliko veličinu populacije u času $t=0$ označimo s N_0 očito vrijedi $e^{(n-m)t} = e^{(n-m)0} = e^0 = 1$ i $N=N_0$ pa je dakle

$$N = N_0 e^{(n-m)t}$$

Veličina populacije N prikazana je kao funkcija vremena uz konstantne n i m te početnu veličinu populacije N_0 i ta je ovisnost eksponencijalna (funkcija se zove eksponencijalna jer je neovisna varijabla t u eksponentu). Grafički prikaz te funkcije za

pozitivnu, negativnu i konstantnu vrijednost prirodnoga priraštaja $n-m$ (što odgovara slučajevima $n>m$, $n<m$ i $n=m$) dan je na slici C-8.



Slika C-8. Grafički prikaz eksponencijalne funkcije $N=N_0e^{(n-m)t}$ je rastuća ($n>m$), padajuća ($n<m$) ili konstantna ($n=m$) krivulja. Isprekidanom je crtom prikazan dio grafa funkcije za $t<0$.

Simulacijski model s varijabilnim stopama nataliteta i mortaliteta

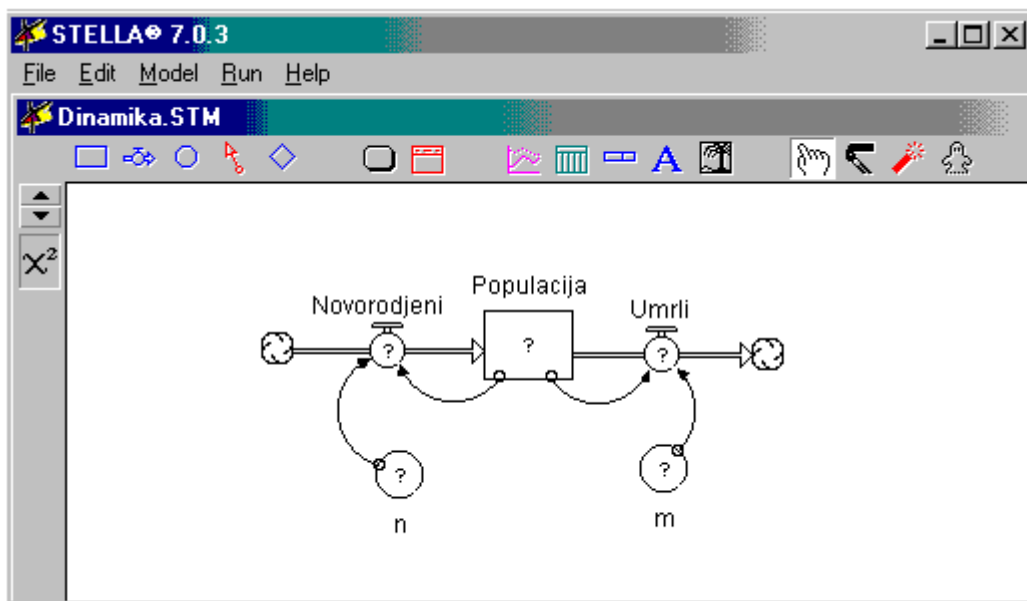
Pri izvodu matematičkog modela prepostavili smo da su stope nataliteta i mortaliteta konstantne (zapravo njihova razlika $n-m$ tj. prirodni priraštaj mora biti konstanta) pa taj model ne možemo primijeniti na situacije u kojima se te veličine mijenjaju s vremenom. Matematičkim modelom nije moguće riješiti općenit slučaj s promjenjivim stopama pa ćemo napraviti simulacijski model koji to omogućuje. Ovdje je prikazano takvo rješenje i njegova implementacija s pomoću programa *Stella* (slično se može napraviti i s pomoću demo verzija programa *Vensim* i *Powersim*). Dovoljno je pomoću grafičkog sučelja nacrtati dijagram toka i deklarirati vrijednosti parametara modela. Za vježbu možete najprije implementirati jednostavniji model sa konstantnim stopama (onaj prikazan dijagramom toka na slici C-4), a zatim ga nadopuniti do verzije s promjenjivim stopama tako da te stope zadane kao tablične funkcije vremena. Zgodno je što se tablične funkcije zadaju grafički.

Redosljed postupaka koje treba napraviti jest ovaj:

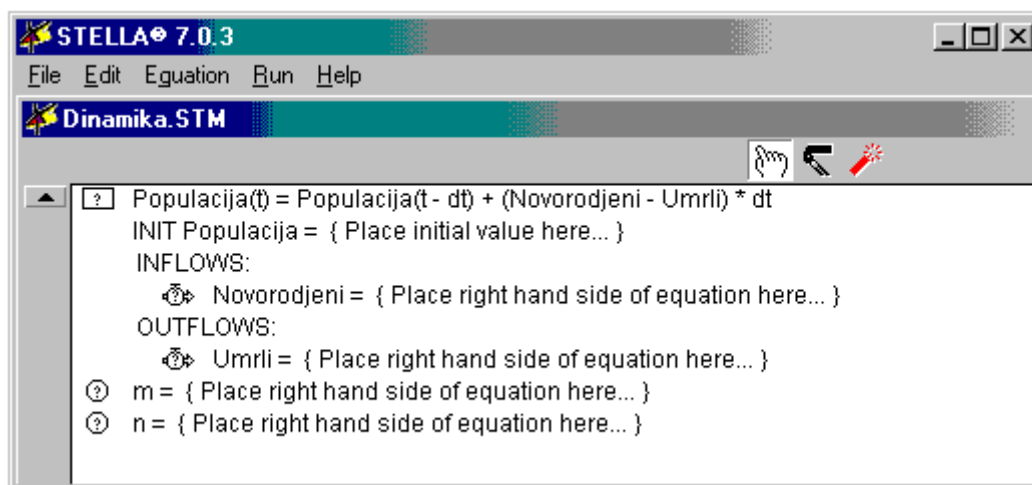
1. Pokrenuti program *Stella* (ili *Save disabled version of Stella*), čime se odmah ulazi u grafičko korisničko sučelje (*Map/Model* razina prikazana na slici C-5 gore).
2. Može se odmah u *Run* izborniku izabrati *Run specifications* i specificirati vremenska jedinica (godina), trajanje simulacije (npr. 0-100 godina) i vremenski korak (može se specificirati kao dio osnovne jedinice za što treba upisati npr. 100 i kliknuti u *fraction* za 1/100), kao i ostali parametri simulacije (metoda

integracije, brzina animacije i dr.). Iako je sve ovo potrebno tek za izvođenje simulacije obično je korisno unaprijed definirati zbog vremenskih jedinica i trajanja simulacije (osobito ako se traži grafički prikaz rezultata).

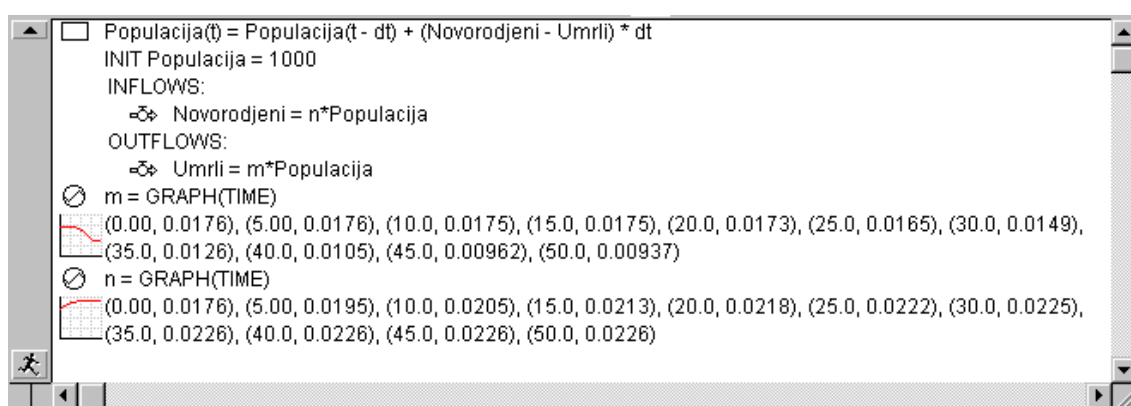
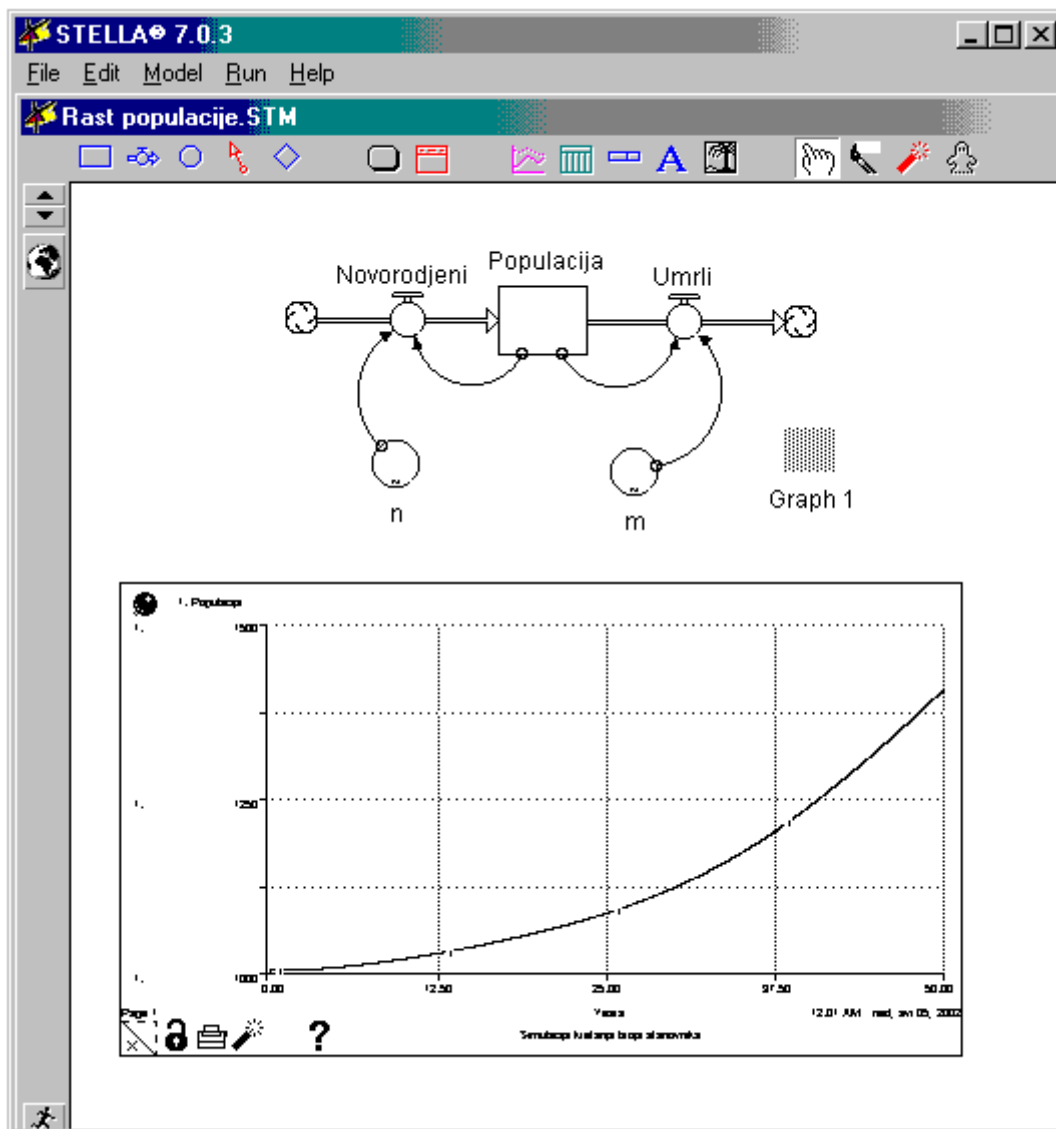
3. Povlačenjem i spuštanjem ikonica nacrtati dijagram toka modela koji treba izgledati kao onaj na slici C-9. Ako ste pogriješili svaki element možete izbrisati dinamitom.
4. Nakon što je nacrtan dijagram toka, potrebno je deklarirati vrijednosti parametara modela i početnu vrijednost varijable **Populacija**. Da biste vidjeli što sve treba deklarirati, pritisnite *Map/Model* tipku lijevo gore i pojavit će se upitnici na elementima koje treba deklarirati (slika C-9). Dvostrukim klikom na pojedini element možete pristupiti unošenju podatka (definicije ili vrijednosti) za taj element. Moguće je prijeći na *Equations level* (treba pritisnuti strjelicu za dolje) i tamo unijeti deklaracije na isti način. Na slici C-10 prikazan je izgled jednadžbi dok još deklaracije nisu unesene pa upitnici stoje na mjestima gdje je potrebno unijeti parametre i početne vrijednosti.
5. Ako želite implementirati model s konstantnim stopama nataliteta i mortaliteta (kao onaj na slici C-5), dovoljno je upisati (konstantnu) vrijednost tih stopa (primjerice 0.02 i 0.015 za 20 i 15 promila) na mjesto desnih strana jednadžbi (jednakosti) za **n** i **m**. Izbornik se dobije dvostrukim klikom na element **n** bilo iz *Map/Model* panela bilo iz *Equations* panela.
6. Ako želite uvesti stope koje se mijenjaju s vremenom, potrebno je pri deklariranju stopa izabrati funkciju TIME koja se nalazi među funkcijama u prozoru desno na izborniku. Čim ste odabrali TIME, kliknite u izborniku lijevo dolje tipku *Become Graphical Function* što će vam omogućiti da ovisnost stopa o vremenu zadate tablično (desno birate broj točaka) ili grafički. Primijetite da ta tablica/graf postaje dio programa (jednadžbi). Konačni izgled dijagrama toka i pripadajućeg grafikona s rezultatima prikazan je na Slici 11. zajedno s jednadžbama.
7. Kod dijagrama toka potrebno je dodati graf i/ili tablicu kojom će biti prikazani rezultati, pri čemu treba odmah deklarirati što se i u kojim granicama hoće prikazati (naravno može se poslije mijenjati za sljedeće simulacijske eksperimente). Obratite pozornost na vrste grafova (*Time series*, *Scatter*, *Bar* i *Scetchable* kao i mogućnost dobivanja rezultata više uzastopnih simulacijskih eksperimenata komparativno na istom grafičkom prikazu ako selektirate *Comparative*). Kad ste jednom selektirali graf sve se definira klikom na pojedine osi (raspon, varijable koje se prikazuju i dr.).
8. Na kraju ostaje da pokrenete simulacijski eksperiment (s *Run* u izborniku *Run*) i pogledate rezultat (nemojte zaboraviti otvoriti graf ili tablicu). Dobivene rezultate možete izbrisati, promijeniti parametre ili početne vrijednosti i izvoditi nove i nove simulacijske eksperimente.



Slika C-9. Dijagram toka modela dinamike populacije nacrtan s pomoću grafičkog korisničkog sučelja Map/Model programa *Stella*



Slika C-10. Izgled jednažbi (Equations razina) koje pripadaju dijagramu toka prikazanom na slici C-9. dok još nisu definirani parametri niti početne vrijednosti



Slika C-11. Konačni izgled dijagrama toka modela dinamike populacije s vremenski promjenjivim stopama i pripadajući graf s rezultatima simulacije (*Map/Model level*) i jednačbe (*Equations level*)

Logistički model – matematičko i simulacijsko rješenje

Logistički model razvio je belgijski filozof i matematičar Verhulst 1838. koji je zbog činjenice da stopa rasta populacije ne može biti neograničena (ograničen prostor, hrana ili drugi resursi) uveo pojam gustoće populacije te stopu rasta R definirao kao funkciju veličine populacije N i parametara (konstanti) r_0 i K :

$$R = r_0 \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

Prirast populacije je maksimalan i stopa prirasta R približno je jednaka r_0 kad je gustoća mala (N znatno manji od K). Parametar r_0 može se interpretirati kao stopa priraštaja u odsutnosti međusobne kompeticije. Ideja je ovog modela da prirast populacije u jedinici vremena pada porastom njezine veličine te postaje jednak 0 za $N=K$. K se obično interpretira kao količina resursa (npr. hrane ili prostora) izražena u broju jedinki za koje je ta količina dostatna i zove se nosivi kapacitet (engl. *carrying capacity*). Dinamika populacije definirana je diferencijalnom jednačinom:

$$\frac{dN}{dt} = RN = r_0 N \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

koja se daje riješiti integracijom i ima rješenje (N_0 je početna veličina populacije)

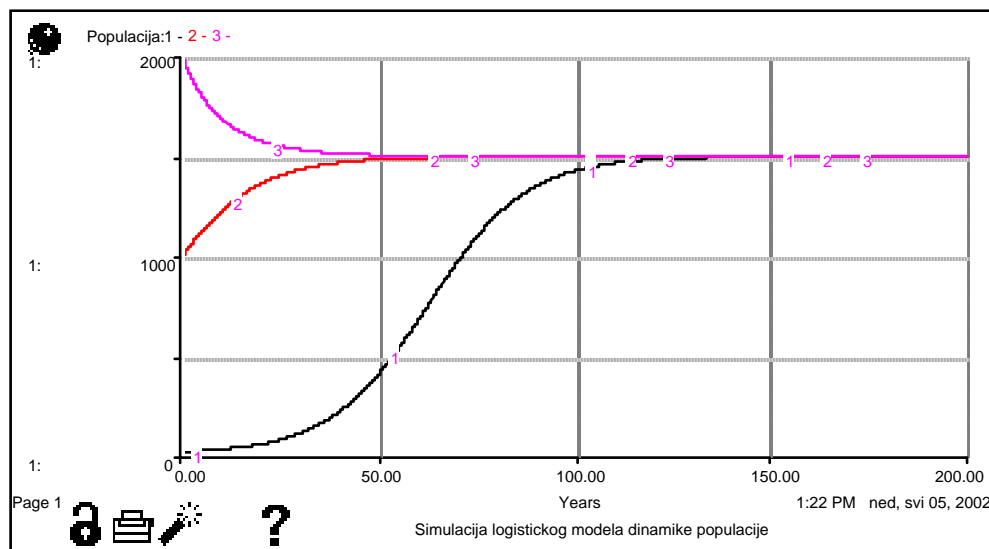
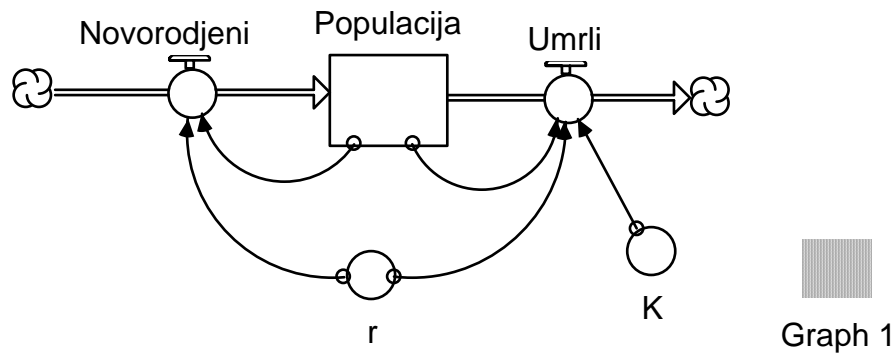
$$N_t = \frac{N_0}{N_0 + (K - N_0) \cdot e^{-r_0 t}}$$

Međutim, gornja diferencijalna jednačina može poslužiti za implementaciju simulacijskog modela, što je osobito prikladno za eksperimentiranje s promjenama parametara r_0 i K i početne veličine populacije. Valja razmotriti tri slučaja:

1. početna veličina populacije N_0 mala ($0 < N_0 < K/2$),
2. početna veličina populacije $K/2 < N_0 < K$,
3. početna veličina populacije $N_0 > K$.

Model ima dva stacionarna stanja (ekvilibrija): za $N=0$ i $N=K$. Prvi je ekvilibrij nestabilni jer malo odstupanje od 0 dovodi do porasta populacije. Drugi ekvilibrij, onaj za $N=K$ je stabilan i mala odstupanja od njega vraćaju populaciju u to stacionarno stanje (u kojem je prirast jednak 0).

Na slici C-12. prikazan je dijagram toka i usporedni rezultati triju uzastopnih simulacijskih eksperimenata s modelom uz $K=1500$ i $r_0=0,08$ (označen s r) i početnu populaciju N_0 jednaku 10, 1000 i 2000 jedinki. Sve je napravljeno s pomoću programa *Stella*. Pokušajte i vi implementirati logistički model i, mijenjajući parametre i početnu veličinu populacije, izvesti te i druge eksperimente!



Slika C-12. Dijagram toka i rezultati simulacijskih eksperimenata logističkog modela za $K=1500$ i tri različite početne vrijednosti veličine populacije N ($N=10, 1000$ i 2000). Sve je napravljeno s pomoću programa *Stella ver. 7.0*

Literatura*

1. Gordon G. System simulation. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1969. (Cit. iz Čerić V. Simulacijsko modeliranje. Zagreb: Školska knjiga, 1993.)
2. Law AM, Kelton WD. Simulation modeling and analysis. New York: McGraw-Hill, 1982. (Cit. iz Čerić V. Simulacijsko modeliranje. Zagreb: Školska knjiga, 1993.)
3. Čerić V. Simulacijsko modeliranje. Zagreb: Školska knjiga, 1993.
4. Žiljak V. Simulacija računalom. Zagreb, Školska knjiga, 1982.
5. Forrester JW. Industrial dynamics. Cambridge, Mass: MIT Press, 1961.
6. Forrester JW. Principles of systems. Cambridge, Mass: MIT Press, 1968.
7. Forrester JW. Urban dynamics. Cambridge, Mass: MIT Press, 1969.
8. Forrester JW. World dynamics. Cambridge, Mass: MIT Press, 1973.
9. Meadows DH, Meadows DL, Randers J, Behrens WW III. The limits to growth. New York: Universe Books, 1972.

10. Meadows DH, Meadows DL, Randers J, Behrens WW III. Granice rasta. Zagreb: Stvarnost, 1974.
11. Pugh AL III. DYNAMO II user's manual. Cambridge, Mass: MIT Press, 1973.
12. Professional DYNAMO Plus /kompjuterski program/. Cambridge, Mass: Pugh-Roberts Assoc., 1991.
13. ISEE systems - The World Leader in Systems Thinking Software. [web stranica]. Dostupno na: <http://www.iseesystems.com>.
14. Stella Demo. [web stranica]. Dostupno na: <http://www.iseesystems.com/community/downloads/STELLA/STELLADemo.aspx>.
15. Ventana Systems, Inc. [web stranica]. Dostupno na: <http://www.vensim.com>.
16. Powersim – The Business Simulation Company. [web stranica]. Dostupno na: <http://www.powersim.com>.
17. Roberts N, Andersen D, Deal R, Garet M, Shaffer W. Introduction to computer simulation: the system dynamics approach. Reading, Mass: Addison-Wesley Publ Co, 1983.
18. MITSloan System Dynamics Group. [web stranica]. Dostupno na: <http://web.mit.edu/sdg/www/>
19. Sharov A. Quantitative Population Ecology. [web stranica]. Dostupno na: <http://www.ento.vt.edu/~sharov/PopEcol>.
20. Sharov A. Population Ecology Home page. [web stranica]. Dostupno na: <http://www.ento.vt.edu/~sharov/popechome/welcome.html>.
21. Cvjetanović B, Grab B, Uemura K. Dynamics of acute bacterial diseases. Epidemiological models and their applications in public health. Bull WHO 1978; 56(suppl 1):1-143.
22. Božikov J, Deželić Gj, Cvjetanović B. Computerized epidemiometric model of shigelosis and its use in assessing potential usefulness of new tools for disease control. In: O'Moore RR, Barber B, Reichertz PL, Roger F, editors. Medical Informatics Europe 82. Fourth Congress of the European Federation on Medical Informatics. Proceedings. Dublin, 1982. Berlin: Springer, 1982: 611-7.
23. Deželić Gj, Božikov J. Development of computerized epidemiological models of infectious diseases. In: van Bemmelen JH, Ball MJ, Wigertz O, editors. MEDINFO 83. Fourth World Conference on Medical Informatics. Proceedings. Amsterdam, 1983. Amsterdam: North-Holland, 1983: 1218-21.
24. Božikov J, Cvjetanović B, Deželić Gj. A computer simulation program for the assessment of multistate epidemiological models of infectious diseases. In: Capasso V, Grosso E, Paveri-Fontana SL, editors. Mathematics in biology and medicine. Proceedings. Bari, 1983. Berlin: Springer, 1984: 145-50.
25. Božikov J. Kompjuterizirani epidemiološki model shigeloze i njegova primjena u planiranju mjera prevencije bolesti. (Magistarski rad). Zagreb: Medicinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 1988.
26. Han AM, U KM, Hlaing T, Božikov J, Deželić Gj, Cvjetanović B. Epidemiological model of acute bacterial and viral diarrhoeal diseases. Diarrhoeal Dis Res 1985; 3:65-72.
27. Silobrčić J. Epidemiološki modeli zaraznih bolesti - model hripavca i njegova simulacija računalom. (Diplomski rad). Zagreb: Medicinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 1984.
28. Silobrčić J, Božikov J, Deželić Gj, Cvjetanović B. Epidemiološki model hripavca i njegova simulacija računalom. U: Peti simpozij "Medicina i tehnika". Zbornik radova. Zagreb, 1985. Zagreb: /vlast. izd./, 1985: 137-41.

29. John V, Božikov J, Cvjetanović B, Benčić Z, Deželić Gj. Primjena metode modeliranja i kontinuirane simulacije za praćenje zaraznih bolesti u populaciji i odabir strategije za njihovo suzbijanje. U: Borčić B, Aleraj B, urednici. Zbornik radova 1. kongresa epidemiologa Jugoslavije, Zadar, 1986. Zadar: 1986:159-62.
30. John V. Strategije za suzbijanje i kontrolu trbušnog tifusa s posebnim osvrtom na cijepljenje. (Magistarski rad). Zagreb: Medicinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 1989.
31. Božikov J, Ivanković D, Vuletić S, Deželić Gj. Kontinuirana simulacija kao sredstvo za praćenje genetskih bolesti u populaciji. U: Žanić N, urednik. Zbornik radova 6. međunarodnog simpozija "Projektiranje i praćenje proizvodnje računalom", Zagreb, 1984. Zagreb: Elektrotehnički fakultet, 1984:427-32.
32. Ivanković D. Procjena i kontrola nasljednog bremena stanovništva. (Doktorska disertacija). Zagreb: Medicinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 1989.
33. Puntarić D. imunitet na hepatitis A virus mlađih dobnih skupina . osnova za program imunizacije. (Doktorska disertacija). Zagreb: Medicinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 1994.
34. Puntarić D, Božikov J, Vodopija R. Cost-benefit analysis of general immunization against hepatitis A in Croatia. *Croatian Medical Journal* 1996; 37:193-9.
35. Smeo MN. Operational model for rubella immunization in a developing country. (Doctoral dissertation). Zagreb: Medical School, University of Zagreb, 1995.
36. Kovačić L. Sistemska analiza i optimizacija programa zdravstvene zaštite. (Doktorska disertacija) Zagreb: Medicinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 1983.
37. Kovačić L, Božikov J, Deželić Gj. Simulacija programa zaštite kod kroničnih bolesti kao način evaluacije mjera zdravstvene zaštite. Radovi 2. kongresa socijalne medicine i organizacije zdravstvene zaštite Jugoslavije, Zagreb, 1982. *Materia socio-medica Iugoslavica* 1982;5:173-80.
38. Kovačić L, Peršić Č, Božikov J. Mogućnost planiranja i izbora mjera programa za suzbijanje hipertenzije na području općine Labin simulacijom na računalu. U: Peršić L, Vutuc B, Jonjić A, Jelušić T, Basanić N, Šestan A, Bartolić A, urednici. Zbornik. Dani primarne zdravstvene zaštite, Labin, 1985. Labin: Dom zdravlja Labin, 1985: 265-72.
39. Petković S. Model programa zdravstvene zaštite shizofrenih bolesnika i njegova simulacija računalom. (Diplomski rad). Zagreb: Medicinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 1987.
40. Božikov J. Odras višestupanjskog modela karcinogeneze na incidenciju raka u ljudskoj populaciji - primjer raka debelog crijeva. (Doktorska disertacija). Zagreb: Medicinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 1997.
41. Božikov J, Strnad M. Podaci registara za rak u svijetlu višestupanjske teorije karcinogeneze. U: Medicinska informatika 99. Četvrti simpozij Hrvatskog društva za medicinsku informatiku. Zbornik radova. Zagreb, 1999. *Med inform* 1999; 4:153-8.
42. Manestar Blažić, T. Simulacijski model uloge telomera u nastanku i rastu raka - primjer seminoma i neseminoma testisa. (Magistarski rad). Zagreb: Medicinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2005.
43. Rimac, M. Dinamički simulacijski model neurogeneze cerebralnog korteksa. (Magistarski rad). Zagreb: Medicinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2002.
44. Zajednica zdravstvenih fakulteta SR Hrvatske. Radna grupa za procjenu potreba za zdravstvenim kadrovima te obrazovnim potrebama zdravstva u SR Hrvatskoj. Prilog raspravi o "Procjeni razvoja zdravstva i potrebama za kadrovima do 2000.

godine na bazi usvojenih dokumenata strateškog razvoja zdravstva do 2000. godine i na bazi racionalnog sagledavanja razvoja zdravstva SR Hrvatske – Nacr”, Zagreb 1989. Zagreb: Zajednica zdravstvenih fakulteta SR Hrvatske, 1989 /šapirografirani materijal/.

45. Budak A, Božikov J. Imamo li previše liječnika u Hrvatskoj? Lijec Vjesn 1993; 115:261-7.
46. Božikov J, Deželić G. A microcomputer method for continuous system simulation in health care. Comput Methods Programs Biomed 1991;34:17-25.
47. Božikov J, Cvjetanović B, Deželić Gj, Ivanković D, Kovačić L, Silobrčić J. Primjena modeliranja i kontinuirane simulacije računalom u zdravstvenoj zaštiti. U: 8. međunarodni simpozij "Kompjuter na sveučilištu". Zbornik radova. Cavtat 1986. Zagreb: Sveučilišni računski centar, 1986:6.10.1-8.
48. Božikov J, Deželić Gj. Experience and results in system dynamics modelling at Andrija Štampar School of Public Health. U: Medicinska informatika 97. Drugi simpozij Hrvatskog društva za medicinsku informatiku. Zbornik radova. Zagreb, 1995. Med Inform; 2:115-20.
49. ProModel – Solutions Home. [web stranica]. Dostupno na: <http://www.promodel.com>.
50. ProModel – Solutions Home. [web stranica]. Dostupno na: <http://www.promodel.com/solutions>.
51. Rockwell – Arena Simulation [web stranica]. Dostupno na: <http://www.arenasimulation.com>.
52. EUROSIM. [web stranica]. Dostupno na: <http://www.eurosim.info>.
53. Modeling & Simulation Magazine Home [web stranica]. Dostupno na: <http://www.scs.org> <http://www.modelingandsimulation.org>
54. Modeling & Simulation Magazine Home [web stranica]. Dostupno na: <http://www.modelingandsimulation.org/directory2004>.
55. System Dynamics Society. [web stranica]. Dostupno na: <http://www.albany.edu/cpr/sds>.
56. CROSSIM [web stranica]. Dostupno na: <http://www.eurosim.info/index.php?id=10>.
57. EUROSIM 2007. [web stranica]. Dostupno na: <http://www.eurosim2007.org>.
58. WSC 2006. Dostupno na: <http://www.wintersim.org>
59. WSC 2006 Past Programs. [web stranica]. Dostupno na: <http://www.wintersim.org/pastprog.htm>
60. ITI Conference. [web stranica]. Dostupno na: <http://iti.srce.hr>
61. Journal of Computing and Information Technology (CIT). [web stranica]. Dostupno na: <http://cit.srce.hr>.
62. G. Ossimitz SD Mega Link List. [web stranica]. Dostupno na: <http://www.uni-klu.ac.at/~gossimit/linklist.php>.
63. INFORMS Simulation Society. [web stranica]. Dostupno na: <http://www.informs-cs.org>.
64. INFORMS - Institute for Operations Research and Management Sciences. INFORMS: Home Page. [web stranica]. Dostupno na: <http://www.informs.org>.
65. IFORS. International Federation of Operational Research Societies. IFORS Site. [web stranica]. Dostupno na: <http://www.ifors.org>

* Sve web stranice posjećene su 9. svibnja 2006.