Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Berislav Jandrić

VERTEKS ALGEBRE PRIDRUŽENE REPREZENTACIJAMA N=1 SUPER HEISENBERG-VIRASOROVE I SCHRÖDINGER-VIRASOROVE ALGEBRE

DOKTORSKI RAD

Zagreb, srpanj 2019.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Berislav Jandrić

VERTEX ALGEBRAS ASSOCIATED WITH THE REPRESENTATIONS OF THE N=1 SUPER HEISENBERG-VIRASORO AND SCHRÖDINGER-VIRASORO ALGEBRAS

DOCTORAL THESIS

Zagreb, July 2019.

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Berislav Jandrić

VERTEKS ALGEBRE PRIDRUŽENE REPREZENTACIJAMA N=1 SUPER HEISENBERG-VIRASOROVE I SCHRÖDINGER-VIRASOROVE ALGEBRE

DOKTORSKI RAD

Mentor:
prof. dr. sc. Dražen Adamović

Zagreb, srpanj 2019.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Berislav Jandrić

VERTEX ALGEBRAS ASSOCIATED WITH THE REPRESENTATIONS OF THE N=1 SUPER HEISENBERG-VIRASORO AND SCHRÖDINGER-VIRASORO ALGEBRAS

DOCTORAL THESIS

Supervisor:
Prof. Dražen Adamović, PhD

Zagreb, July 2019

Zahvale

Dugujem beskrajnu zahvalnost svom mentoru, prof. dr. sc. Draženu Adamoviću, koji je prihvatio da mi bude mentor te mi samim time pružio priliku za istraživački rad u matematičkoj znanosti. Neizmjerno sam mu zahvalan na usmjeravanju kao i velikom trudu i strpljenju koje je utrošio prilikom procesa stvaranja ove doktorske disertacije.

Također veliku zahvalnost dugujem svom prijatelju i kolegi doc. dr. sc. Miroslavu Jerkoviću, koji mi je svojim savjetima za vrijeme naših zajedničkih razgovora o matematici, puno pomogao.

Zahvalan sam i doc. dr. sc. Gordanu Radobolji na sugestijama koje mi je pružio pri pisanju disertacije.

Na kraju, zahvalnost na neizmjernoj podršci koju su mi pružali, dugujem i svojim roditeljima, majci Sonji Deverić-Jandrić, dipl. ing. i ocu dr. sc. Berislavu Jandriću, znanstvenom savjetniku te pokojnoj baki Đurđici Deverić, koja je financirala moj doktorski studij.

Na kraju bih se na svemu što su za mene bili učinili, zahvalio i pokojnima djedu Miši, kao i prabaki Ani, baki Cvijeti i stricu Romeu te kumovima Nadi i Zoranu Parfenjuk.

Sažetak

U ovom radu proučavali smo teoriju reprezentacija dviju važnih generalizacija Heisenberg-Virasorove Liejeve algebre $\mathcal{H}$, a to su $N = 1$ super Heisenberg-Virasorova Liejeva algebra $\mathcal{SH}$ i Schrödinger-Virasorova Liejeva algebra $\mathfrak{sv}$. Prva predstavlja primjer beskonačnodimenzionalne Liejeve super-algebre koja do sada nije bila otkrivena, dok je druga primjer beskonačno dimenzionalne Liejeve algebre koja se dosta proučavala u fizikalnoj kao i matematičkoj literaturi jer je prva u seriji tzv. galilejevskih Liejevih konformnih algebri proširenih tzv. nerelativističkim spinom.

Originalan doprinos ovog rada je eksplicitna konstrukcija izomorfizma univerzalne (resp. proste) omotačke verteks super-algebre $V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha \neq 0)$ (resp. $L^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha \neq 0)$) pridružene $N = 1$ super Heisenberg-Virasorovoj Liejevoj algebri $\mathcal{SH}$ i verteks super-algebre $SM(1) \otimes V^{\mathcal{NS}}_{c_L - c_\mu}$, (resp. $SM(1) \otimes L^{\mathcal{NS}}_{c_L - c_\mu}$), pri čemu smo pokazali da je na $SM(1)$ definirana struktura reprezentacije proste $N = 1$ Heisenberg-Virasorove verteks-algebre $L^{\mathcal{SH}}(\frac{3}{2} - 3\mu^2, \frac{\mu}{2}c_\alpha, c_\alpha), c_\alpha \neq 0$.

Što se tiče realizacije verteks super-algebre $V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha \neq 0)$ u slučaju nivoa nula: $c_\alpha = 0$, to se nadovezuje se na radove Dražena Adamovića i Gordana Radobolje iz Journal of Pure and Applied Mathematics (2015) i Communications in Contemporary Mathematics (2019), u kojima su kosntruirane free field realizacije za Heisenberg-Virasorovu Liejevu algebru $\mathcal{H}$ također na

nivou nula. Klasificirali smo singularne vektore na nivoima $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$ i 4 te dali jednu konstrukciju njenih screening operatora, što je omogućilo dokaz egzistencije beskonačne serije singularnih vektora za $N = 1$ Heisenberg-Virasorovu Liejevu algebru $\mathcal{SH}$ na nivoima konformnih težina $\frac{p}{2}$ za p neparan. U tu svrhu smo promatrali realizacije njenih Vermaovih modula u verteks-algebri pridruženoj rešetki te operatore ispreplitanja i Schurove polinome, koji su nam dali i eksplicitne formule za te singularne vektore.
Za Schrödinger-Virasorovu Liejevu algebru $\mathfrak{sv}$, dali smo rigorozan tretman i poopćenje rezultata iz Unterbergerovog članka Nuclear Physics B (2009). Nadalje, ustanovili smo da verteks-algebra $V^{\mathfrak{sv}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta)$ sadrži Heisenberg-Virasorovu Liejevu podalgebru i pronašli smo primjer singularnog vektora na nivou konformne težine 3 u univerzalnoj Schrödinger-Virasorovoj verteks-algebri za slučaj proizvoljnih centralnih naboja.

Ključne riječi: verteks-algebra, N=1 Heisenberg-Virasorova verteks-algebra, N=1 Neveu-Schwarz Liejeva algebra, singularni vektori, screening operatori, Schrödinger-Virasorova verteks-algebra

Summary

In this thesis we have investigated representation thory of two important generalizations of the Hesienberg-Virasoro Lie algebra $\mathcal{H}$, which are the $N = 1$ super Heisenberg-Virasoro Lie algebra $\mathcal{SH}$ and the Schrödinger-Virasoro Lie algebra $\mathfrak{sv}$.

The former provides an example of an infinite dimensional Lie super-algebra which has not been yet discovered, while the latter is also an example of an infinite dimensional Lie algebra that has been widely studied in the physical as well as mathematical literature because it is the first of an infinite series of the so called Galilean Lie conformal algebras extended by the non-relativistic spin parametre.

The important innovation in this thesis is the explicit construction of an isomorphism between the universal (resp. simple) enveloping vertex super-algebra $V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha \neq 0)$ (resp. $L^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha \neq 0)$) associated to the $N = 1$ super Heisenberg-Virasoro Lie algebra $\mathcal{SH}$ and the vertex algebra $SM(1) \otimes V^{\mathcal{NS}}_{c_L - c_\mu}$, (resp. $SM(1) \otimes L^{\mathcal{NS}}_{c_L - c_\mu}$), where we have shown that there is a representation of the simple $N = 1$ Heisenberg-Virasoro vertex-algebra $L^{\mathcal{SH}}(\frac{3}{2} - 3\mu^2, \frac{\mu}{2}c_\alpha, c_\alpha), c_\alpha \neq 0$ on $SM(1)$.

As far as the realization of this vertex algebra at level zero case $c_\alpha = 0$, this is a continuation of the papers by Dražen Adamović and Gordan Radobolja from Journal of Pure and Applied Mathematics (2015) and Communications

in Contemporary Mathematics (2019), where free field realizations of the Heisenberg-Virasoro Lie algebra at level zero had been constructed. In this thesis, we have classified singular vectors on levels $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$ i 4 and we have also given a construction of the screening operators for this algebra, which has enabled us to to prove the existence of an infinite series of singular vectors for the $N = 1$ Heisenberg-Virasoro Lie algebra $\mathcal{SH}$ at the levels of conformal weight $\frac{p}{2}$, for p odd. In order to do so, we have studied realizations of the Verma modules for this algebra in the vertex algebra associated to a certain lattice as well as intertwining operators and the Schur polynomials, which led us to the explicit formulae for this singular vectors.
In the case of the Schrödinger-Virasoro Lie algebra $\mathfrak{sv}$, we have provided a rigorous treatment as well as a generalization of the result of Unterberger from his paper Nuclear Physics B (2009). Furthermore, we have proved that the vertex algebra $V^{\mathfrak{sv}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta)$ contains a Heisenberg-Virasoro subalgebra and we have found an example of a singular vector at the level three conformal weight of the universal Schrödinger-Virasorove vertex algebra for the case of general central charges.

Keywords: vertex algebra, N=1 Heisenberg-Virasoro vertex algebra, N=1 Neveu-Schwarz Lie algebra, singular vector, screening operator, Schrödinger-Virasoro vertex algebra

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

Wittova algebra je beskonačnodimenzionalna Liejeva algebra vektorskih polja na kružnici. Virasorova Liejeva algebra je maksimalno jednodimenzionalno centralno proširenje Wittove algebre.
Neveu-Schwarzova ili $N = 1$ superkonformna Liejeva algebra $\mathcal{NS}$ je super-analogon Virasorove algebre. Kac i Todorov su je prvi strogo definirali i proučavali u svojim radovima.
Heisenberg-Virasorova Liejeva algebra je maksimalno trodimenzionalno centralno proširenje tenzorskog produkta Wittove algebre s beskonačnodimenzionalnom simetričnom algebrom. Ona se prirodno javlja u verteks algebarskom pristupu teoriji reprezentacija afinih Kac-Moodyjevih Liejevih algebri, dok je u teorijskoj fizici ona važna u dvodimenzionalnim kvantnim teorijama konformnih polja (2d CFT).
Proučavamo teoriju reprezentacija važnih generalizacija Heisenberg-Virasorove algebre $\mathcal{H}$, a to su: Heisenberg-Clifford-Neveu-Schwarzova ili, skraćeno, $N = 1$ Heisenberg-Virasorova Liejeva algebra $\mathcal{SH}$ te Schrödinger-Virasorova Liejeva algebra $\mathfrak{sv}$.
Schrödinger-Virasorova algebra je nerelativistički analogon Liejeve super-

konformne algebre u jednoj prostornoj dimenziji. Općenito, u literaturi se proučavaju serije tzv. galilejevskih konformnih algebri (GCA) na euklidskom $(d+1)$-dimenzionalnom prostor-vremenskom kontinuumu te njihova proširenja sa dodatnim stupnjem slobode, tzv. nerelativističkim spinom, koje su parametrizirane uređenim parovima $(d, s) \in \mathbb{N} \times \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Koristeći jezik Liejevih konformnih algebri, dolazimo do pojma univerzalnih omotačkih verteks-algebri pridruženim reprezentacijama gore navedenih beskonačnodimenzionalnih Liejevih algebri. Jedan od najvažnijih rezultata su eksplicitne free field realizacije univerzalnih i prostih $N = 1$ Heisenberg-Virasorovih i Schrödinger-Virasorovih verteks-algebri pridruženih proizvoljnim centralnim nabojima na simplektičkim bozonsko-fermionskim Fockovim prostorima pridruženim Heisenbergovoj, Weylovoj te Cliffordovoj verteks-algebri, što je od velike važnosti pri konstrukciji netrivijalnih homomorfizama modula za navedene verteks-algebre u slučajevima tzv. kritičnih nivoa. To igra važnu ulogu za teorijsko objašnjenje spontanog loma simetrije, tj. pojavu kiralnosti u fizici elementarnih čestica te u teoriji spontanih faznih prijelaza u fizici čvrstog stanja, koji se javljaju primjerice kod feromagneta, feroelektrika, superfluida te visokotemperaturnih supravodiča.

Slijedi kratak sadržaj rada s prikazom osnovnih rezultata

U drugom poglavlju navodimo standardne definicije i konstrukcije iz teorije verteks-algebri. Dajemo pregled osnovnih definicija i rezultata o Liejevim konformnim algebrama i pridruženim univerzalnim omotačkim verteks-algebrama, te izlažemo u osnovnim crtama formalizam računa λ-zagrada. Također navodimo važne primjere konformnih algebri, poput Heisenbergove,

Weylove i Cliffordove, Virasorove i Neveu-Schwarzove konformne algebre te njima pridružene univerzalne omotačke verteks-algebre.
U trećem poglavlju definiramo $N = 1$ Heisenberg-Virasorovu konformnu i pridruženu univerzalnu omotačku verteks-algebru. Koristeći koncept singularnog vektora za Liejevu algebru, pokazujemo da se linearni izomorfizam, kao i izomorfizam modula za $N = 1$ Heisenberg-Virasorovu Liejevu algebru, između $V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha)$, $c_\alpha \neq 0$ i $SM(1) \otimes V_c^{\mathcal{NS}}$ proširuje do izomorfizma univerzalnih, odnosno, prostih verteks-algebri.

Propozicija (3.2.3)**.** *Na nivou $\mathcal{SH}$-modula, imamo:*

$$V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha) \cong \frac{V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha, 0, 0)}{\langle G(-1/2) v_{c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha, 0, 0} \rangle}.$$

Kao vektorski prostor, $V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha)$ je izomorfan s

$$V_{c_L}^{\mathcal{NS}} \otimes \bigwedge span_{\mathbb{C}}\{\Psi(-n-1/2) |\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \otimes \mathbb{C}[\alpha(-n) \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}],$$

Teorem (3.3.1)**.** *Za fiksan $\mu \in \mathbb{C}$, $c_\alpha \neq 0$, vektori $\alpha = \sqrt{c_\alpha} h, \Psi = \sqrt{c_\alpha} \phi, \omega, \tau$, na $SM(1)$ generiraju strukturu proste verteks-algebre $L^{\mathcal{SH}}(c_\mu, c_{\alpha,L}, c_\alpha)$ gdje je*

$$c_\mu = 3/2 - 3\mu^2, \ c_{\alpha,L} = \frac{1}{2}\mu c_\alpha.$$

Korolar (3.3.2)**.** *Za proizvoljnu uređenu trojku $(c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha) \in \mathbb{C}^3, c_\alpha \neq 0$ vrijedi izomorfizam verteks-algebri:*

$$L^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha) \cong SM(1) \otimes L_{c_L - c_\mu}^{\mathcal{NS}}. \tag{1.1}$$

Teorem (3.3.3)**.** *Vrijedi sljedeći izomorfizam verteks-algebri:*

$$V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha) \cong SM(1) \otimes V_{c_L - c_\mu}^{\mathcal{NS}}, \tag{1.2}$$

gdje su $c_\alpha \neq 0$ i c_μ kao u Teoremu 3.3.1.

Također konstruiramo eksplicitne tzv. free field realizacije između $N=1$ Heisenberg-Virasorove verteks-algebre za slučaj nivoa $c_\alpha = 0$.
Neka je $L = \mathbb{Z}c + \mathbb{Z}d$ rešetka takva da je $\langle c, c\rangle = \langle d, d\rangle = 0$, $\langle c, d\rangle = 2$ i neka je $V_L = \mathbb{C}[L] \otimes M(1)$ odgovarajuća verteks-algebra pridružena rešetki, gdje je $M(1)$ Heisenbergova verteks-algebra. Ta verteks-algebra se dosta istraživala u teoriji reprezentacija Heisenberg-Virasorove verteks-algebre nivoa 0 [5], [6].
Neka je $F^{(2)}$ fermionska verteks-algebra generirana poljima

$$\Psi_i(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Psi_i(n+\frac{1}{2})z^{-n-1}$$

takvima da za $i = 1, 2$, $r, s \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ vrijede sljedeće anti-komutacijske relacije

$$\{\Psi_i(r), \Psi_i(s)\} = 0, \ \{\Psi_1(r), \Psi_2(s)\} = \delta_{r+s,0}.$$

verteks-algebra $F^{(2)}$ posjeduje sljedeći Virasorov vektor centralnog naboja $c_{fer} = 1$:

$$\omega_{fer} = \frac{1}{2}\left(\Psi_1(-\frac{3}{2})\Psi_2(-\frac{1}{2}) + \Psi_2(-\frac{3}{2})\Psi_1(-\frac{1}{2})\right)\mathbf{1}.$$

Definiramo sljedeća četiri vektora u $M(1) \otimes F^{(2)}$:

$$\begin{aligned}
\alpha &= -c_{L,\alpha}c(-1) \\
\tau &= \sqrt{2}(\frac{1}{2}c(-1)\Psi_1(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}d(-1)\Psi_2(-\frac{1}{2}) + \frac{c_L-3}{12}\Psi_2(-\frac{3}{2}) - \Psi_1(-\frac{3}{2})) \\
\omega &= \frac{1}{2}c(-1)d(-1) + \frac{c_L-3}{24}c(-2) - \frac{1}{2}d(-2) + \omega_{fer} \\
\Psi &= -\sqrt{2}c_{L,\alpha}\Psi_2(-\frac{1}{2}).
\end{aligned}$$

Tada vrijede sljedeće λ-zagrade:

$$[\alpha_\lambda \alpha] = [\Psi_\lambda \Psi] = [\alpha_\lambda \Psi] = 0, \tag{1.3}$$

$$[\alpha_\lambda \tau] = \Psi\lambda, \quad [\alpha_\lambda \omega] = \alpha\lambda + c_{L,\alpha}\lambda^2, \tag{1.4}$$

$$[\Psi_\lambda \tau] = \alpha + 2c_{L,\alpha}\lambda, \quad [\omega_\lambda \Psi] = (D + \frac{1}{2}\lambda)\Psi \tag{1.5}$$

$$[\omega_\lambda \omega] = (D + 2\lambda)\omega + \frac{c_L}{12}\lambda^3, \quad [\tau_\lambda \tau] = 2\omega + \frac{c_L}{3}\lambda^2 \tag{1.6}$$

$$[\omega_\lambda \tau] = (D + \frac{3}{2})\tau \tag{1.7}$$

Teorem (3.4.1)**.** *verteks-algebra generirana s $\alpha, \Psi, \tau, \omega$ izomorfna je nekom kvocijentu univerzalne $N = 1$ Heisenberg-Virasorove verteks-algebre na nivou nula $V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}) := V^{\mathcal{SH}}(c_L, 0, c_{L,\alpha})$.*

Prema analogiji s Heisenberg-Virasorovom verteks-algebrom [11], [5], očekujemo da će $V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha})$ biti prosta verteks-algebra pa bi gornja konstrukcija dala realizaciju od $V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha})$. Nažalost, to nismo uspjeli dokazati, jer je struktura modula najveće težine u super-slučaju bitno kompliciranija nego u Heisenberg-Virasorovom slučaju.

U četvrtom poglavlju razvijamo teoriju reprezentacija Schrödinger-Virasorove verteks-algebre. Schrödinger-Virasorova verteks-algebra $V^{\mathfrak{sv}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta)$ realizirana je kao subkvocijent Vermaovog modula $V^{\mathfrak{sv}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta, 0, 0)$ po idealu generiranom singularnim vektorom $L(-1)v_{c_L,c_{L,\beta},c_\beta,0,0}$, koji je singularan vektor u kvocijentu Vermaovog modula $\mathcal{V}^{\mathfrak{sv}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta, 0, 0)$ po idealu generiranom vektorom $X(-1/2)v_{C_L,c_{L,\beta},c_\beta,0,0}$:

$$
\begin{aligned}
V^{\mathfrak{sv}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta) &= \frac{\mathcal{V}^{\mathfrak{sv}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta, 0, 0)}{\langle L(-1)v_{c_L,c_{L,\beta},c_\beta,0,0}\rangle} \\
\mathcal{V}^{\mathfrak{sv}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta, 0, 0) &= \frac{V^{\mathfrak{sv}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta, 0, 0)}{\langle X(-1/2)v_{c_L,c_{L,\beta},c_\beta,0,0}\rangle}.
\end{aligned}
$$

Koristeći račun tzv. λ-zagrada, konstruiramo primjer netrivijalnog homomorfizma iz univerzalne Schrödinger-Virasorove verteks-algebre $V^{\mathfrak{sv}}(0, 0, -1)$ u Heisenberg-Weylovu verteks-algebru.

Teorem (4.5.2)**.** *Vektori*

$$
\begin{aligned}
\mu &= \frac{1}{2}a^+(-1/2)^2\mathbf{1} \\
\chi &= \alpha(-1)a^+(-1/2)\mathbf{1} \\
\beta &= -a^+(-1/2)a^-(-1/2)\mathbf{1} \\
\omega &= \frac{1}{2}\left[\left(a^+(-1/2)a^-(-3/2) - a^+(-3/2)a^-(-1/2)\right) + \alpha(-1)^2\right]\mathbf{1}
\end{aligned}
$$

generiraju verteks podalgebru $\widetilde{L}^{\mathfrak{sv}}(0,0,-1)$ *od* $M(1)\otimes W$*, koja je kvocijent univerzalne verteks-algebre* $V^{\mathfrak{sv}}(0,0,-1)$.

Neka je $V^{\mathcal{H}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta)$ Heisenberg-Virasorova verteks-algebra generirana s $\bar{\beta}, \bar{\omega}$ i sljedećim $\lambda-$zagradama:

$$\begin{aligned}
\left[\bar{\beta}_\lambda \bar{\beta}\right] &= \lambda C_\beta \\
\left[\bar{\omega}_\lambda \bar{\omega}\right] &= D\bar{\omega} + 2\bar{\omega} + \frac{c_L}{12}\lambda^3 \\
\left[\bar{\omega}_\lambda \bar{\beta}\right] &= D\bar{\beta} + \lambda\bar{\beta} - \lambda^2 c_{L,\beta}
\end{aligned}$$

Korolar (4.5.3)**.** *Za svaku uređenu trojku* $(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta) \in \mathbb{C}^3$ *postoji netrivijalan homomorfizam verteks-algebri*

$$f : V^{\mathfrak{sv}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta) \to M(1)\otimes W \otimes V^{\mathcal{H}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta + 1).$$

Uočimo da Schrödinger-Virasorova verteks-algebra ima Heisenberg-Virasorovu verteks podalgebru pa se nameće pitanje dekompozicije $V^{\mathfrak{sv}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta)$ kao modula za Heisenberg Virasorovu verteks podalgebru. Taj problem je dosta težak i u zadnjem poglavlju smo jedino uspjeli identificirati neke istaknute Heisenberg-Virasorove singularne vektore u free field realizaciji od $V^{\mathfrak{sv}}(0,0,-1)$.

Označimo s $M_\beta(1)$ Heisenbergovu verteks podalgebru od $V^{\mathfrak{sv}}(0,0,-1)$ generirana vektorom β i s pripadnim Virasorovim vektorom $\omega_{Heis} = -\frac{1}{2}\beta(-1)^2$. Neka je L^{Vir}_{-1} Virasorova verteks-algebra generirana sljedećim Virasorovim vektorom centralnog naboja $c=-1$:

$$\overline{\omega} = \omega + \frac{1}{2}\beta(-1)^2.$$

Neka za $r\in\mathbb{C}$, $M(1,r)$ označava ireducibilni $M(1)$-modul gdje $\beta(0)$ djeluje kao množenje s $r\mathrm{Id}$, a $L^{Vir}(c,h)$ ireducibilni modul za Virasorovu algebru najveće težine (c,h). Za $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ stavimo

$$w_{2n} = a^+(-1/2)^{2n}\mathbf{1}, w_{2n+1} = \alpha(-1)a^+(-1/2)^{2n+1}\mathbf{1}.$$

Lema (4.5.4)**.** *Vrijedi*

(1) Za $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ *je* $w_j \in V^{\mathfrak{sv}}(0,0,-1)$.

(2) $W_{2n} := \left(M(1) \otimes L_{-1}^{Vir}\right).w_{2n} \cong M_\beta(1,2n) \otimes \tilde{L}^{Vir}(-1, n(2n+1))$.

(3) $W_{2n+1} := \left(M(1) \otimes L_{-1}^{Vir}\right).w_{2n+1} \cong M_\beta(1,2n+1) \otimes \tilde{L}^{Vir}(-1,(n+1)(2n+1))$.

Na kraju, računamo primjer singularnog vektora za zakrenutu Heisenberg-Virasorovu Liejevu algebru na konformnoj težini tri te ga preslikavamo koristeći Unterbergerov homomorfizam u Heisenberg-Weylovu algebru $M(1) \otimes W$.

Propozicija (4.5.5)**.** *Vektor*

$$\begin{aligned} w &= X(-3/2)^2\mathbf{1} + [a_1 M(-1)L(-2) + a_2 M(-3) + a_3 \beta(-1)M(-2) + \\ &+ a_4 \beta(-2)M(-1) + a_5 \beta(-1)^2 M(-1)\big]\,\mathbf{1} \end{aligned}$$

je singularan vektor za Heisenberg-Virasorovu podalgebru $V^{\mathcal{H}}(0,0,-1) = M_\beta(1) \otimes L_{-1}^{Vir}$ *od* $V^{\mathfrak{sv}}(0,0,-1)$. *Vrijedi*

$$V^{\mathcal{H}}(0,0,-1).w = M_\beta(1,2) \otimes \widetilde{L}^{Vir}(-1,5).$$

Teorem (4.5.7)**.** *U univerzalnoj Schrödinger-Virasorovoj verteks-algebri* $V^{\mathfrak{sv}}(0,0,-1)$ *singularan vektor (za Heisenberg-Virasorovu verteks podalgebru* $V^{\mathcal{H}}(0,0,-1)$ *)*

$$\begin{aligned} w &= X(-3/2)^2\mathbf{1} - \frac{68}{107}M(-1)L(-2)\mathbf{1} - \frac{100}{107}M(-3)\mathbf{1} \\ &+ \frac{43}{107}\beta(-1)M(-2)\mathbf{1} - \frac{61}{107}\beta(-2)M(-1)\mathbf{1} + \frac{9}{107}\beta(-1)^2M(-1)\mathbf{1} \end{aligned}$$

se pri Unterbergerovom homomorfizmu

$$V^{\mathfrak{sv}}(0,0,-1) \to M(1) \otimes W$$

preslikava u singularan vektor

$$\begin{aligned} w \quad \mapsto \quad & \frac{9}{214}\left[20\alpha(-1)^2a^+(-1/2)^2 + 4a^+(-1/2)^3a^-(-3/2) + 8a^+(-3/2)^2+\right. \\ & -8a^+(-5/2)a^+(-1/2) - 4a^+(-3/2)a^+(-1/2)^2a^-(-1/2) + \\ & \left. + a^+(-1/2)^4a^-(-1/2)^2\right]\mathbf{1} \end{aligned}$$

u verteks-algebri $M(1) \otimes W$.

Također, u Propoziciji [4.5.8] provodimo sličan račun za slučaj proizvoljnih centralnih naboja i dobivamo generički $V^{\mathcal{H}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta)$–singularni vektor na konformnoj težini 3 u $V^{\mathfrak{sv}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta)$.

Pregled oznaka:

$\mathcal{H}$ (zakrenuta) Heisenberg-Virasorova Liejeva algebra

$L_c^{\mathfrak{g}}$ prosta verteks-algebra pridružena Liejevoj (super)algebri $\mathfrak{g}$ centralnog naboja c

$L^{\mathfrak{g}}(c_1, c_2, \ldots)$ prosta verteks-algebra pridružena Liejevoj (super)algebri $\mathfrak{g}$ centralnog naboja $(c_1, c_2, \ldots)$

$M(1)$ (prosta) Heisenbergova verteks-algebra

$\mathcal{NS}$ $N = 1$ Virasorova (Neveu-Schwarzova) Liejeva superalgebra

$\mathcal{SH}$ $N = 1$ Heisenberg-Virasorova Liejeva superalgebra

$\mathfrak{sh}$ Schrödingerova Liejeva algebra

$\overline{\mathfrak{sh}}$ proširena Schrödingerova Liejeva algebra

$\mathfrak{sv}_0$ Schrödinger-Wittova Liejeva algebra

$\mathfrak{sv}$ Schrödinger-Virasorova Liejeva algebra

$V_c^{\mathfrak{g}}$ univerzalna verteks-algebra pridružena Liejevoj (super)algebri $\mathfrak{g}$ centralnog naboja c

$V^{\mathfrak{g}}(c_1, c_2, \ldots)$ univerzalna verteks-algebra pridružena Liejevoj (super)algebri $\mathfrak{g}$ centralnog naboja $(c_1, c_2, \ldots)$

Vir Virasorova Liejeva algebra

Poglavlje 2

Verteks-algebre

2.1 Verteks-algebre

U uvodnom poglavlju dajemo kratki pregled osnovnih pojmova i definicija iz aksiomatske teorije verteks-algebri i algebri verteks operatora, koji uključuju i standardne algebarske koncepte, poput homomorfizma verteks-algebri, njenih modula kao i tenzorskog produkta verteks-algebri, što ćemo koristiti u nastavku radnje. Mnogi korisni detalji o verteks-algebrama i algebrama verteks operatora mogu se naći npr. u [15] i [18].

Definicija 2.1.1. *Verteks-algebra je uređena trojka* $(V, Y, \mathbf{1})$, *gdje je* V *vektorski prostor nad poljem kompleksnih brojeva* $\mathbb{C}$, *s istaknutim vakuum vektorom* $\mathbf{1}$, *a* Y *linearno preslikavanje s* V *u formalne Laurentove redove s koeficijentima iz* $End(V)$*:*

$$Y : V \to End(V)\left[\left[z, z^{-1}\right]\right] \qquad Y(v,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n z^{-n-1}$$

$$Y(v,z) : w \mapsto \sum_{n\in Z} v_n w$$

koje zadovoljava sljedećih pet svojstava:

(aksiom skraćenja ili anihilacije)

$$\mathbb{Z}_{\geq 0} \ni n(v,w) >> 0 \Rightarrow v_{n(v,w)}w = 0 \quad \textit{za sve} \quad v,w \in V;$$

(aksiom vakuuma)

$$\lim_{z\to 0} Y(v,z) = Y(\mathbf{1},z)v = Id_V,$$

gdje formalni limes označava konstantni član u Laurentovom redu $Y(v,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n z^{-n-1}$;

(aksiom stvaranja ili kreacije)

$$Y(v,z)\mathbf{1} \in End(V)[[z]]$$

tj.

$$Y(v,z)\mathbf{1} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} v_n z^{-n-1}\right)\mathbf{1};$$

(aksiom derivacije)

$$[D, Y(v,z)] = \frac{\partial}{\partial z} Y(v,z) = Y\left(v_{-2}\mathbf{1}, z\right);$$

(Jacobijev identitet)

$$z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_2}{z_0}\right) Y\left(v,z_1\right) Y\left(w,z_2\right) - z_0^{-1}\delta\left(\frac{-z_2 + z_1}{z_0}\right) Y\left(w,z_2\right) Y\left(v,z_1\right)$$
$$= z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_0}{z_2}\right) Y\left(Y\left(v,z_0\right)w, z_2\right),$$

gdje je formalna delta distribucija definirana kao

$$\delta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n.$$

$Y(v,z)$ *zovemo* ***verteks operator*** *ili* ***polje*** *pridruženo vektoru* v*, a pridruživanje*

$$v \mapsto Y(v,z)$$

zovemo ***state-field korespondencija***.

Definicija 2.1.2. *Za*
$$Y(v,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n z^{-n-1}$$
definiramo formalni reziduum
$$Res_z Y(v,z)=v_{-1}.$$

Uzimanjem formalnog reziduuma od lijeve i desne strane Jacobijevog identiteta, dobivaju se formule za komutator i za n-ti produkt:

(formula za komutator)
$$[v_m,w_n]=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{m}{j}(v_j w)_{m+n-j}$$

(formula za n-ti produkt)
$$\begin{aligned}(Dv)_n &= nv_{n-1}\\ Y(v_n w,z) &= \left(\sum_{j=-1}^{-\infty} v_j w_{n-j-1}+\sum_{j=0}^{\infty} w_{n-j-1}v_j\right)z^{-n-1}\end{aligned}$$

Pokazuje se da je aksiom Jacobijevog identiteta za verteks-algebre uz prisutstvo ostalih aksioma, ekvivalentan tzv. **aksiomu lokalnosti**, prema kojem postoji $n(v,w)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, takav da za svaka dva verteks operatora vrijedi
$$(z_1-z_2)^{n(v,w)}\left[Y\left(v,z_1\right),Y\left(w,z_2\right)\right]=0,$$
gdje u gornjem formalnom komutatoru $Y(v,z_1)Y(w,z_2)$ razvijamo u formalni Laurentov red po z_1-z_2, drugim riječima, u području $|z_2|>|z_1|$, a $Y(w,z_2)Y(v,z_1)$ razvijamo po $-z_2+z_1$, tj. u području $|z_1|>|z_2|$.
Na kraju, spomenimo da pri eksplicitnoj konstrukciji verteks-algebri i algebri verteks operatora, važnu ulogu imaju tzv. Dongova lema i teorem o generirajućim poljima.

Prema spomenutoj Dongovoj lemi, ukoliko su dva polja lokalna s nekim trećim poljem, tada je i bilo koji njihov $n-$ti produkt također lokalan s tim trećim poljem. Ukratko, da bi se ustanovila ili konstruirala struktura verteks-algebre na nekom vektorskom prostoru, dovoljno je pronaći minimalan skup vektora takvih da su njima pridružena polja sva međusobno lokalna. Tada se cijela verteks-algebra dobiva iz tog skupa tzv. generirajućih polja, uzimanjem svih mogućih tzv. normalnih produkata derivacija tih generirajućih polja.

Definicija 2.1.3. *Neka su* $(V, Y_V, \mathbf{1}_V)$ *i* $(W, Y_W, \mathbf{1}_W)$ *dvije verteks-algebre. Tada je homomorfizam jedne verteks-algebre u drugu linearni operator* $\Psi : V \to W$ *koji čuva n-te produkte, tj. za koji vrijedi da je*

$$\Psi\left(v_n w\right) = \Psi(v)_n \Psi(w)$$

ili, zapisano u terminima verteks operatora,

$$\Psi(Y(v,z))w = Y(\Psi(v),z)\Psi(w).$$

Definicija 2.1.4. *Neka je* $(V, Y, \mathbf{1})$ *verteks-algebra. Uređena trojka* (M, Y_M, d), *gdje je* $d \in End(M)$, *je modul za verteks-algebru ako je* Y_M *linearan operator* $Y_M : V \to M$ *koji se proširuje do preslikavanja, kojeg označavamo istim simbolom,* $Y_M : V \to End(M)\left[\left[z, z^{-1}\right]\right]$ *za koji vrijede sljedeća svojstva:*

$$Y_M(v,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_{(n)} z^{-n-1}; \quad n(v,w) >> 0 \Rightarrow v_{n(v,w)} w = 0;$$

$$Y_M(\mathbf{1}, z) = Id_M;$$

$$[d, Y_M(v,z)] = Y_M(Dv, z) = \frac{\partial}{\partial z} Y_M(v,z);$$

Jacobijev identitet

$$z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_2}{z_0}\right) Y_M\left(v, z_1\right) Y_M\left(w, z_2\right) - z_0^{-1}\delta\left(\frac{-z_2 + z_1}{z_0}\right) Y_M\left(w, z_2\right) Y_M\left(v, z_1\right)$$

$$= z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_0}{z_2}\right) Y_M\left(Y\left(v, z_0\right) w, z_2\right).$$

Definicija 2.1.5. *Virasorova algebra Vir je beskonačno dimenzionalna Liejeva algebra s generatorima $L(n), n \in \mathbb{Z}$ i centralnim elementom C_L koji zadovoljavaju komutacijska pravila*

$$[L(m), L(n)] = (m-n)L(m+n) + \delta_{m+n,0}\frac{m^3-m}{12}C_L, \quad [C_L, Vir] = 0.$$

Definicija 2.1.6. *Vektor $\omega \in V$ u verteks-algebri V zovemo konformnim vektorom ako komponente njemu pridruženog verteks operatora:*

$$L(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L(n)z^{-n-2} = Y(\omega, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \omega_{n+1}z^{-n-2}.$$

zadovoljavaju komutacijske relacije Virasorove algebre Vir.

Definicija 2.1.7. *Uređenu četvorku $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$ zovemo algebrom verteks operatora ako vrijedi:*

- *operator $L(-1) = \omega_0$ je derivacija na verteks-algebri V;*
- *operator $L(0) = \omega_1$ djeluje poluprosto na vektorskom prostoru V, tj. V je odozdo ograničena direktna suma konačno-dimenzionalnih svojstvenih potprostora operatora $L(0)$:*

$$V = \coprod_{n=0}^{\infty} V_n; \qquad L(0)|_{V_n} = nId_{V_n}, \quad \dim V_n < \infty.$$

2.2 Konformne algebre

U ovom poglavlju iskazujemo osnovne definicije o Liejevim konformnim algebrama, koje igraju istu ulogu u teoriji reprezentacija Liejevih konformnih grupa, kao Liejeve algebre u teoriji reprezentacija Liejevih grupa. Nezaobilazna referenca je [18].

Definicija 2.2.1. *[18] Liejeva konformna superalgebra je $\mathbb{Z}_2$-graduirani lijevi $\mathbb{C}[D]-$modul $R = R_{\bar{0}} \oplus R_{\bar{1}}$, na kojem je zadano $\mathbb{C}$-bilinearno preslikavanje λ-zagrada*

$$[\cdot_\lambda \cdot] : R \times R \to \mathbb{C}[\lambda] \otimes R$$

sa sljedećim svojstvima:

- *konformna seskvilinearnost ili svojstvo derivacije*

$$\begin{aligned} [(Da)_\lambda b] &= -\lambda\,[a_\lambda b] \\ D\,[a_\lambda b] &= [(Da)_\lambda b] + [a_\lambda Db] \end{aligned}$$

- *kosa simetričnost*

$$[a_\lambda b] = -p(a,b)\,[b_{-\lambda-D} a]\,;$$

- *Jacobijev identitet*

$$[a_\lambda\,[b_\mu c]] - p(a,b)\,[b_\lambda\,[a_\mu c]] = [[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}\, c];$$

Napomena 1. *Oznakom $\mathbb{C}[\lambda] \otimes R$ označavamo vektorski superprostor formalnih polinama u varijabli λ s koeficijentima iz R.*

Sada ćemo navesti neke važne primjere Liejevih konformnih algebri koje ćemo koristiti u kasnijim poglavljima.

Definicija 2.2.2. *[18] Virasorova konformna algebra generirana je parnim vektorom ω, centralnim elementom C_L i sljedećom λ-zagradom:*

$$[\omega_\lambda \omega] = (D + 2\lambda)\omega + \frac{\lambda^3}{12} C_L.$$

Definicija 2.2.3. *Heisenbergova konformna algebra ranga 1 generirana je parnim vektorom α, centralnim elementiom C_α i λ-zagradom*

$$[\alpha_\lambda \alpha] \quad = \quad \lambda C_\alpha$$

Definicija 2.2.4. *Cliffordova konformna algebra ranga* 1 *generirana je neparnim vektorom* ϕ*, centralnim elementiom* C_ϕ *i* λ*-zagradom*

$$[\phi_\lambda \phi] \;=\; C_\phi$$

Definicija 2.2.5. *Heisenberg-Virasorova konformna algebra generirana je parnim vektorima* α, ω*, centralnim elementima* $C_\alpha, C_{L,\alpha}, C_L$ *i sljedećim* λ*-zagradama*

$$\begin{aligned} [\alpha_\lambda \alpha] &= \lambda C_\alpha \\ [\omega_\lambda \omega] &= (D + 2\lambda)\omega + \frac{\lambda^3}{12} C_L \\ [\omega_\lambda \alpha] &= (D + \lambda)\alpha - \lambda^2 C_{L,\alpha} \end{aligned}$$

Definicija 2.2.6. *[18] Neveu-Schwarzova konformna superalgebra generirana je parnim vektorom* ω*, neparnim vektorom* τ *te centralnim elementom* C_L *i sljedećim* λ*-zagradama:*

$$\begin{aligned} [\omega_\lambda \omega] &= (D + 2\lambda)\omega + \frac{\lambda^3}{12} C_L \\ [\omega_\lambda \tau] &= \left(D + \frac{3}{2}\lambda\right)\tau \\ [\tau_\lambda \tau] &= 2\omega + \frac{\lambda^2}{3} C_L \end{aligned}$$

2.3 Univerzalne omotačke verteks-algebre

Kao što se teorija reprezentacija konačnodimenzionalnih Liejevih algebri svodi na proučavanje teorije reprezentacija njihove univerzalne omotačke algebre, koja ima asocijativnu strukturu, tako se teorija reprezentacija Liejevih konformnih algebri svodi na teoriju reprezentacija njima pridruženih univerzalnih omotačkih verteks-algebri.

S druge strane, može se pokazati da je svaka verteks-(super)algebra V ujedno i Liejeva konformna (super)algebra, gdje je derivacija naslijeđena od derivacije u verteks superalgebri, dok je $\lambda-$zagrada definirana izrazom

$$[a_\lambda b] := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} a_{(n)} b.$$

Definicija 2.3.1 ([18]). *Univerzalna omotačka verteks-(super)algebra pridružena Liejevoj konformnoj (super)algebri R je verteks-(super)algebra V^R zajedno s ulaganjem Liejevih konformnih (super)algebri $\iota : R \hookrightarrow V^R$ tako da za svaku verteks-(super)algebru W i homomorfizam Liejevih konformnih (super)algebri $f : R \to W$, postoji jedinstveni homomorfizam verteks-(super)algebri $\overline{f} : V^R \to W$.*

Za danu uređenu bazu $\{a_i\}$ od R, monomi oblika $: a_{i_1} a_{i_2} ... a_{i_n} :$ gdje je $i_j \le i_{j+1}$ te $i_j < i_{j+1}$ ako je $p\left(a_{i_j}\right) = \bar{1}$ čine PBW-ovu bazu od V^R.

Napomena 2. *Iz univerzalnog svojstva univerzalne omotačke verteks-(super)algebre, može se pokazati da je ona jedinstvena do na izomorfizam verteks-(super)algebri.*

Definicija 2.3.2. *Heisenbergova verteks-algebra $M(1)$ ranga 1 je univerzalna omotačka verteks-algebra pridružena Heisenbergovoj konformnoj algebri ranga 1.*

$M(1)$ je generirana poljem

$$h(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) z^{-n-1},$$

čiji koeficijenti zadovoljavaju komutacijska pravila Heisenbergove Liejeve algebre:

$$[h(m), h(n)] = m\delta_{m+n,0} C, \quad [h(m), C] = 0.$$

U $M(1)$ centralni element C djeluje kao Id.

U $M(1)$ postoji jednoparametarska familija konformnih vektora

$$\omega_\mu = [\frac{1}{2} h(-1)^2 + \mu h(-2)]\mathbf{1}, \quad \mu \in \mathbb{C}$$

centralnog naboja $c_\mu = 1 - 12\mu^2$.

Definicija 2.3.3. *Cliffordova verteks-algebra* $F(\frac{1}{2})$ *ranga* 1 *je univerzalna omotačka verteks super-algebra pridružena Cliffordovoj konformnoj algebri ranga* 1.

$F(\frac{1}{2})$ je generirana poljem

$$\phi(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi(n+\frac{1}{2})z^{-n-1},$$

čiji koeficijenti zadovoljavaju antikomutacijska pravila Cliffordove Liejeve algebre:

$$[\phi(m+\frac{1}{2}), \phi(n+\frac{1}{2})]_+ = \delta_{m+n+1,0}C.$$

U $F(\frac{1}{2})$ centralni element C djeluje kao Id.
$F(\frac{1}{2})$ posjeduje konformni vektor

$$\omega = \frac{1}{2}\phi(-\frac{3}{2})\phi(-\frac{1}{2})\mathbf{1}$$

centralnog naboja $\frac{1}{2}$.

Definicija 2.3.4. *Heisenberg-Cliffordova verteks-algebra* $SM(1)$ *je univerzalna omotačka verteks-algebra pridružena Heisenberg-Cliffordovoj konformnoj algebri.*

$SM(1)$ je generirana poljima

$$\begin{aligned} h(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} h(n)z^{-n-1} \\ \phi(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi(n+\frac{1}{2})z^{-n-1}, \end{aligned}$$

čiji koeficijenti zadovoljavaju superkomutacijska pravila Heisenberg-Cliffordove

Liejeve superalgebre:

$$\begin{aligned}
[h(m), h(n)] &= m\delta_{m+n,0}C \\
\left[\phi(m+\frac{1}{2}), \phi(n+\frac{1}{2})\right]_+ &= \delta_{m+n+1,0}C \\
\left[h(m), \phi(n+\frac{1}{2})\right] &= [h(m), C] = \left[\phi(m+\frac{1}{2}), C\right] = 0
\end{aligned}$$

U $SM(1)$ centralni element C djeluje kao Id.

U $SM(1)$ postoji jednoparametarska familija konformnih vektora

$$\omega_\mu = \left[\frac{1}{2}h(-1)^2 + \frac{1}{2}\phi(-\frac{3}{2})\phi(-\frac{1}{2}) + \mu h(-2)\right]\mathbf{1}$$

centralnog naboja $c_\mu = \frac{3}{2} - 3\mu^2$.

Definicija 2.3.5. *Heisenberg-Virasorova algebra $\mathcal{H}$ je beskonačnodimenzionalna Liejeva algebra s generatorima $\alpha(n), L(n),\ n \in \mathbb{Z}$ te tri centralna elementa $C_\alpha, C_{L,\alpha}, C_L$, koji zadovoljavaju sljedeće komutacijske relacije:*

$$\begin{aligned}
[\alpha(m), \alpha(n)] &= \delta_{m+n,0} m C_\alpha \\
[L(m), \alpha(n)] &= -n\alpha(m+n) - \delta_{m+n,0}(m^2+m)C_{L,\alpha} \\
[L(m), L(n)] &= (m-n)L(m+n) + \delta_{m+n,0}\frac{m^3-m}{12}C_L
\end{aligned}$$

Definicija 2.3.6. *$N = 1$ superkonformna ili Neveu-Schwarzova Liejeva algebra $\mathcal{NS}$ je beskonačnodimenzionalna Liejeva algebra s parnim generatorima $L(n),\ n \in \mathbb{Z}$, neparnim generatorima $G(n+\frac{1}{2}),\ n \in \mathbb{Z}$ te parnim centralnim elementom C_L, koji zadovoljavaju sljedeće superkomutacijske relacije:*

$$\begin{aligned}
[L(m), L(n)] &= (m-n)L(m+n) + \delta_{m+n,0}\frac{m^3-m}{12}C_L \\
\left[G(m+\frac{1}{2}), G(n+\frac{1}{2})\right]_+ &= 2L(m+n+1) + \delta_{m+n+1,0}\frac{m^2+m}{3}C_L \\
\left[L(m), G(n+\frac{1}{2})\right] &= (\frac{m}{2} - n - \frac{1}{2})G(m+n+\frac{1}{2}) \\
[\mathcal{NS}, C_L] &= 0
\end{aligned}$$

Definicija 2.3.7. *[18] Univerzalna $N = 1$ Neveu-Schwarzova verteks-algebra centralnog naboja c_L, u oznaci $V_{c_L}^{\mathcal{NS}}$, je univerzalna omotačka verteks-algebra pridružena Neveu-Schwarzovoj superkonformnoj algebri iz definicije 2.2.6, gdje centralni element C_L djeluje kao $c_L Id$.*
Prosta $N = 1$ Neveu-Schwarzova verteks-algebra centralnog naboja c_L, u oznaci $L_{c_L}^{\mathcal{NS}}$ je (jedinstveni) prosti kvocijent of $V_{c_L}^{\mathcal{NS}}$.

Opišimo $V_{c_L}^{\mathcal{NS}}$ kao $\mathcal{NS}$-modul.
Definiramo sljedeće Liejeve podalgebre od $\mathcal{NS}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{NS}^+ &= \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{L(n), G(n+1/2) \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\} \cup \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{G(1/2)\} \\ \mathcal{NS}^- &= \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{L(n), G(n+1/2) \mid n \in \mathbb{Z}_{<0}\} \\ \mathcal{NS}^0 &= \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{L(0), C_L\}. \end{aligned}$$

Tada vrijedi trokutasta dekompozicija

$$\mathcal{NS} = \mathcal{NS}^- \oplus \mathcal{NS}^0 \oplus \mathcal{NS}^+.$$

Za svaki $(c_L, h) \in \mathbb{C}^2$, neka je $\mathbb{C}v_{c_L,h}$ 1-dimenzionalan $\mathcal{NS}^+ \oplus \mathcal{NS}^0$-modul takav da je za $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$:

$$\begin{aligned} L(n)v_{c_L,h} &= h\delta_{n,0}v_{c_L,h} \\ G(n+\frac{1}{2})v_{c_L,h} &= 0 \\ C_L v_{c_L,h} &= c_L v_{c_L,h} \end{aligned}$$

Definiramo Vermaov modul $V^{\mathcal{NS}}(c_L, h)$ kao inducirani $\mathcal{NS}$-modul

$$V^{\mathcal{NS}}(c_L, h) := U(\mathcal{NS}) \otimes_{U(\mathcal{NS}^+ \oplus \mathcal{NS}^0)} \mathbb{C}v_{c_L,h}.$$

Promatramo slučaj $h = 0$. Tada je $G(-1/2)v_{c_L,0}$ singularan vektor za Liejevu superalgebru $\mathcal{NS}$ u Vermaovom modulu $V^{\mathcal{NS}}(c_L, 0)$. Pokazuje se da je univerzalna $N = 1$ superkonformna verteks-algebra realizirana na kvocijentnom modulu:

$$V_{c_L}^{\mathcal{NS}} = \frac{V^{\mathcal{NS}}(c_L, 0)}{\langle G(-1/2)v_{c_L,0}\rangle},$$

gdje je $\langle G(-1/2)v_{c_L,0}\rangle$ $\mathcal{NS}$-podmodul generiran s $G(-1/2)v_{c_L,0}$.

Ta verteks-algebra je generirana poljima

$$\begin{aligned} L(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} L(n)z^{-n-2} \\ G(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} G(n+\frac{1}{2})z^{-n-2} \end{aligned}$$

Theorem 2.3.8. *[18] Pretpostavimo da postoje vektori $\omega \in V$ i $\tau \in V$ koji zadovoljavaju sljedeće relacije:*

$$\omega_0\omega = D\omega, \quad \omega_1\omega = 2\omega, \quad \omega_2\omega = 0, \quad \omega_3\omega = \frac{c}{2}\mathbf{1}, c_L \in \mathbb{C}, \quad \omega_k\omega = 0; \quad k \geq 4$$

$$\tau_0\tau = 2\omega, \quad \tau_1\tau = 0, \quad \tau_2\tau = \frac{2}{3}c_L\mathbf{1}, \quad \tau_k\tau = 0, \quad k \geq 2$$

$$\omega_0\tau = D\tau, \quad \omega_1\tau = \frac{3}{2}\tau, \quad \omega_k\tau = 0, \quad k \geq 1.$$

Tada je verteks-algebra V modul za superkonformnu verteks-algebru $V_{c_L}^{\mathcal{NS}}$.

Primjenom gornjeg teorema i komutatorske formule

$$[a(m), b(n)] := \sum_{j=0}^{\infty} \binom{m}{j} (a_{(j)}b)_{(m+n-j)}$$

direktno se pokazuje da svaki $V_{c_L}^{\mathcal{NS}}$-modul ujedno ima i strukturu reprezentacije Liejeve konformne algebre 2.2.6.

Poglavlje 3

Verteks-algebre pridružene reprezentacijama $N = 1$ Heisenberg-Virasorove algebre

U ovom poglavlju ćemo definirati super analogon Heisenberg Virasorove Liejeve algebre i njoj pridruženu verteks-algebru. Prvo ćemo definirati $N = 1$ Heisenberg-Virasorovu konformnu Liejevu superalgebru, a onda će $N = 1$ Heisenberg-Virasorova verteks-algebra biti univerzalna verteks-algebra pridružena toj konformnoj Liejevoj superalgebri. Prezentirat ćemo realizacije tih verteks-algebri. Kao i u slučaju Heisenberg-Virasorove Liejeve algebre, bitno će biti razlikovati slučajeve koji ovise o djelovanju centralnog elementa C_α. Ako centralni element djeluje netrivijalno, tada je pridružena verteks-algebra tenzorski produkt Heisenberg Cliffordove verteks-algebra $SM(1)$ i Neveu-Schwarzove verteks-algebre. Na ovaj način dajemo super-analogon određenih rezultata iz članka [9]. U slučaju kad c_α djeluje trivijalno (taj slučaj zovemo nivo nula), naši rezultati daju super-analogon realizacije iz članka D. Adamovića i G. Radobolje [5]. Dajemo free-field realizaciju na nivou nula, te konstruiramo familije singularnih vektora na tom nivou. Nažalost, potpunu strukturu Vermaovih modula na nivou nula još uvijek nismo u mogućnosti odrediti. No, prezentiramo slutnju o egzistenciji singularnih vektora koja je temeljena na primjerima singularnih vektora koje smo konstruirali.

3.1 Heisenberg-Cliffordova verteks-algebra

Verteks-algebra $SM(1)$ je generirana s h, ϕ i sljedećim λ-zagradama:

$$[h_\lambda h] = \lambda \quad [\phi_\lambda \phi] = 1 \quad [h_\lambda \phi] = 0 \tag{3.1}$$

PBW baza od $SM(1)$ dana je s

$$\phi(-m_1 - 1/2) \cdots \phi(-m_s - 1/2) \cdot h(-j_1 - 1) \cdots h(-j_t - 1)\mathbf{1} \tag{3.2}$$

gdje je $m_1 > \cdots > m_s \geq 0$, $j_1 \geq \cdots \geq j_t \geq 0$.

Uočimo da $SM(1)$ sadrži podalgebru izomorfnu $N = 1$ Neveu-Schwarzovoj verteks-algebri $V^{\mathcal{NS}}_{c_\mu}$ gdje je $c_\mu = 3/2 - 3\mu^2$, pri čemu su $N = 1$ superkonformni vektor i odgovarajući Virasorov vektor dani s [18]:

$$\tau_1 = (h(-1)\phi(-1/2) + \mu\phi(-3/2))\,\mathbf{1} \tag{3.3}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\tau_0\tau = \frac{1}{2}\left(h(-1)^2 + \mu h(-2) + \phi(-3/2)\phi(-1/2)\right)\mathbf{1}. \tag{3.4}$$

3.2 Definicija $N = 1$ Heisenberg-Virasorove verteks-algebre

Definicija 3.2.1. *$N = 1$ Heisenberg-Virasorova algebra $\mathcal{SH}$ je beskonačnodimenzionalna Liejeva superalgebra s parnim generatorima $\alpha(n)$, $L(n)$, $n \in \mathbb{Z}$,* *neparnim generatorima $\Psi(n+\frac{1}{2})$, $G(n+\frac{1}{2})$, $n \in \mathbb{Z}$ te tri centralna elementa C_α, $C_{L,\alpha}$, C_L, koji zadovoljavaju sljedeće superkomutacijske relacije:*

$$
\begin{aligned}
&[\alpha(m),\alpha(n)] = \delta_{m+n,0}mC_\alpha \\
&[L(m),\alpha(n)] = -n\alpha(m+n) - \delta_{m+n,0}(m^2+m)C_{L,\alpha} \\
&[L(m),L(n)] = (m-n)L(m+n) + \delta_{m+n,0}\frac{m^3-m}{12}C_L \\
&[\Psi(m+\frac{1}{2}),\Psi(n+\frac{1}{2})]_+ = \delta_{m+n+1,0}C_\alpha \\
&[\alpha(m),\Psi(n+\frac{1}{2})] = 0 \\
&[G(m+\frac{1}{2}),G(n+\frac{1}{2})]_+ = 2L(m+n+1) + \delta_{m+n+1,0}\frac{m^2+m}{3}C_L \\
&[L(m),G(n+\frac{1}{2})] = (\frac{m}{2}-n-\frac{1}{2})G(m+n+\frac{1}{2}) \\
&[\alpha(m),G(n+\ \frac{1}{2})] = m\Psi(m+n+\frac{1}{2}) \\
&[\Psi(m+\frac{1}{2}),L(n)] = \frac{2m+n+1}{2}\Psi(m+n+\frac{1}{2}) \\
&[\Psi(m+\frac{1}{2}),G(n+\frac{1}{2})]_+ = \alpha(m+n+1) + \delta_{m+n+1,0}2mC_{L,\alpha} \\
&[\mathcal{SH},C_\alpha] = [\mathcal{SH},C_L] = [\mathcal{SH},C_{L,\alpha}] = 0
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Definicija 3.2.2. *$N=1$ Heisenberg-Virasorova konformna algebra je definirana parnim vektorima α, ω, parnim centralnim elementima C_α, $C_{L,\alpha}$, C_L i neparnim vektorima Ψ, τ te sljedećim λ-zagradama:*

$$
\begin{aligned}
&[\alpha_\lambda\alpha] = \lambda C_\alpha \quad [\Psi_\lambda\Psi] = C_\alpha \quad [\alpha_\lambda\Psi] = 0 \\
&[\omega_\lambda\omega] = (D+2\lambda)\omega + \frac{\lambda^3}{12}C_L \quad [\omega_\lambda\tau] = (D+\lambda\frac{3}{2})\tau \quad [\tau_\lambda\tau] = 2\omega + \frac{\lambda^2}{3}C_L \\
&[\omega_\lambda\alpha] = D\alpha + \lambda\alpha - \lambda^2C_{L,\alpha} \quad [\omega_\lambda\Psi] = (D+\frac{1}{2}\lambda)\Psi \\
&[\Psi_\lambda\tau] = \alpha + 2\lambda C_{L,\alpha}, \quad [\omega_\lambda\Psi] = (D+\frac{1}{2}\lambda)\Psi \quad [\alpha_\lambda\tau] = \lambda\Psi
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Označimo s $V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha)$, univerzalnu omotačku verteks-algebru pridruženu $N=1$ Heisenberg-Virasorovoj konformnoj algebri. Ona je generirana poljima

$$\begin{aligned}
\alpha(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha(n) z^{-n-1} \\
L(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} L(n) z^{-n-2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \omega_{n+1} z^{-n-1} \\
\Psi(z) &= \sum_{n\in Z} \Psi(n+\frac{1}{2}) z^{-n-1} \\
G(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} G(n+\frac{1}{2}) z^{-n-2} = \sum_{n\in Z} \tau_{n+1} z^{-n-\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

Neka $L^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha)$ označava prosti kvocijent od $V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha)$. Primjenom komutatorske formule $[a(m), b(n)] := \sum_{j=0}^{\infty} \binom{m}{j} (a_{(j)}b)_{(m+n-j)}$ na njihove koeficijente, direktno se pokazuje da je svaki $V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha)$-modul, ujedno modul za $N = 1$ Heisenberg-Virasorovu Liejevu algebru $\mathcal{SH}$. Opišimo $V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha)$ kao $\mathcal{SH}$-modul.

Definirajmo sljedeće Liejeve podalgebre od $\mathcal{SH}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{SH}^+ &= \text{span}_{\mathbb{C}}\{L(n), G(n+1/2), \alpha(n), \Psi(n+1/2) |\ n \in \mathbb{Z}_{>0}\} \cup \\
&\quad \cup \text{span}_{\mathbb{C}}\{G(1/2), \Psi(1/2)\} \\
\mathcal{SH}^- &= \text{span}_{\mathbb{C}}\{L(n), G(n+1/2), \alpha(n), \Psi(n+1/2) |\ n \in \mathbb{Z}_{<0}\} \\
\mathcal{SH}^0 &= \text{span}_{\mathbb{C}}\{L(0), \alpha(0), C_L, C_{L,\alpha}, C_\alpha\}.
\end{aligned}$$

Tada vrijedi trokutasta dekompozicija

$$\mathcal{SH} = \mathcal{SH}^+ \oplus \mathcal{SH}^0 \oplus \mathcal{SH}^-.$$

Za svaki $(c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha, h, h_\alpha) \in \mathbb{C}^5$, neka je $\mathbb{C}v_{h,h_\alpha}$ 1-dimenzionalan $\mathcal{SH}^+ \oplus \mathcal{SH}^0$-modul takav da je za $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$:

$$\begin{aligned}
L(n) v_{h,h_\alpha} &= h\delta_{n,0} v_{h,h_\alpha} \\
\alpha(n) v_{h,h_\alpha} &= h_\alpha \delta_{n,0} v_{h,h_\alpha} \\
G(n+\frac{1}{2}) v_{h,h_\alpha} &= \Psi(n+\frac{1}{2}) v_{h,h_\alpha} = 0 \\
(C_L, C_{L,\alpha}, c_\alpha) v_{h,h_\alpha} &= (c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha) v_{h,h_\alpha}
\end{aligned}$$

Definiramo Vermaov modul $V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha, h, h_\alpha)$ kao inducirani $\mathcal{SH}$-modul

$$V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha, h, h_\alpha) := U(\mathcal{SH}) \otimes_{U(\mathcal{SH}^+ \oplus \mathcal{SH}^0)} \mathbb{C}v_{c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha, h, h_\alpha}.$$

Promatramo slučaj $h = h_\alpha = 0$. Tada je $G(-1/2)v_{c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha, 0, 0}$ singularan vektor u $V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha, 0, 0)$ i imamo kvocijentni modul:

$$\mathcal{V}^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha, 0, 0) = \frac{V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha, 0, 0)}{\langle G(-1/2)v_{c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha, 0, 0}\rangle},$$

gdje je $\langle G(-1/2)v_{c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha, 0, 0}\rangle$ $\mathcal{SH}$-podmodul generiran s $G(-1/2)v_{c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha, 0, 0}$. Neka je $\mathbf{1}$ vektor najveće težine u $\mathcal{V}^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha, 0, 0)$. Tada je

$$\begin{aligned} G(-1/2)\mathbf{1} &= 0 \\ L(-1)\mathbf{1} &= G(-1/2)^2\mathbf{1} = 0. \end{aligned}$$

Propozicija 3.2.3. *Na nivou $\mathcal{SH}$-modula, imamo:*

$$V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha) \cong \mathcal{V}^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha, 0, 0).$$

Kao vektorski prostor, $V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha)$ je izomorfan s

$$V_{c_L}^{\mathcal{NS}} \otimes \bigwedge span_{\mathbb{C}}\{\Psi(-n-1/2)|\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \otimes \mathbb{C}[\alpha(-n) \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}],$$

Dokaz. Prema definiciji univerzalne omotačke verteks-algebre pridružene Liejevoj konformnoj algebri, vidimo da se PBW baza od $V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha)$ sastoji od monoma oblika

$$\begin{aligned} &G(-n_1 - 3/2) \cdots G(-n_r - 3/2)\Psi(-m_1 - 1/2) \cdots \Psi(-m_s - 1/2) \\ &\cdot\alpha(-j_1 - 1) \cdots \alpha(-j_t - 1)L(-k_1 - 2) \cdots L(-k_u - 2)\mathbf{1} \end{aligned}$$

gdje je $n_1 > \cdots n_r \geq 0$, $m_1 > \ldots m_s \geq 0$, $j_1 \geq \cdots \geq j_t \geq 0$, $k_1 \geq \cdots \geq k_u \geq 0$. Međutim, to je upravo baza od $\mathcal{V}^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha, 0, 0)$. Dokaz slijedi. $\square$

Pokazuje se da verteks-algebra $V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha)$ ima jedinstveni prosti kvocijent, koji označavamo s $L^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha)$

3.3 Realizacija na nivou različitom od nule

Iz Propozicije 3.2.3 slijedi da je univerzalna $N = 1$ Heisenberg-Virasorova verteks-algebra kao vektorski prostor izomorfna $V_{c_L}^{\mathcal{NS}} \otimes SM(1)$. U ovom odjeljku, proširit ćemo taj izomorfizam do izomorfizma verteks-algebri.
Prvo se podsjetimo da $SM(1)$ ima strukturu reprezentacije $N = 1$ Neveu-Schwarzove verteks-algebre, gdje je superkonforman vektor dan s (3.3).
Sljedeći rezultat kaže da je na $SM(1)$ definirana reprezentacija proste $N = 1$ Heisenberg-Virasorove verteks-algebre.

Theorem 3.3.1. *Za fiksan $\mu \in \mathbb{C}$, $c_\alpha \neq 0$, vektori $\alpha = \sqrt{c_\alpha}h, \Psi = \sqrt{c_\alpha}\phi$, ω, τ, na $SM(1)$ generiraju strukturu reprezentacije proste verteks-algebre $L^{\mathcal{SH}}(c_\mu, c_{\alpha,L}, c_\alpha)$ gdje je*

$$\begin{aligned} c_\mu &= \frac{3}{2} - 3\mu^2 \\ c_{\alpha,L} &= \frac{1}{2}\mu c_\alpha. \end{aligned}$$

Dokaz. Dovoljno je pokazati da ta četiri vektora zadovoljavaju $\lambda-$zagrade iz definicije 3.2.2.
Uočimo da su τ and ω isti kao u (3.3) and (3.4) te stoga zadovoljavaju iste λ-zagrade kao za univerzalnu $N = 1$ Neveu-Schwarzovu verteks-algebru centralnog naboja $c_\mu = \frac{3}{2} - 3\mu^2$:

$$\begin{aligned} [\tau_\lambda \tau] &= 2\omega + \frac{\lambda^2}{6} c_\mu \\ [\omega_\lambda \tau] &= (D + \lambda\frac{3}{2})\tau \\ [\omega_\lambda \omega] &= (D + 2\lambda)\omega + \frac{\lambda^3}{12} c_\mu \end{aligned}$$

Sljedeće λ-zagrade lako se određuju

$$\begin{aligned}
[\alpha_\lambda \alpha] &= c_\alpha \lambda \\
[\omega_\lambda \Psi] &= (D + \frac{1}{2}\lambda)\Psi \\
[\omega_\lambda \alpha] &= (D+\lambda)\alpha + \sqrt{c_\alpha}\omega_2 h \frac{\lambda^2}{2} = (D+\lambda)\alpha - \sqrt{c_\alpha}\mu\frac{\lambda^2}{2}
\end{aligned}$$

kao i

$$\begin{aligned}
[\Psi_\lambda \tau] &= \Psi(1/2)\tau + \lambda\Psi(3/2)\tau \\
&= \sqrt{c_\alpha}(\phi(1/2)\tau + \lambda\phi(3/2)\tau) \\
&= \sqrt{c_\alpha}h + \sqrt{c_\alpha}\mu\lambda \\
&= \alpha + 2c_{\alpha,L} \\
[\alpha_\lambda \tau] &= \lambda\Psi
\end{aligned}$$

Kako je $SM(1)$ prosta verteks-algebra generirana s α, Ψ, jasno je da je $SM(1) \cong L^{\mathcal{SH}}(c_\mu, c_{\alpha,L}, c_\alpha)$. Dokaz slijedi. □

Za $c_L \neq 0$ neka $L^{\mathcal{NS}}_{c_L}$ (resp. $V^{\mathcal{NS}}_{c_L}$) označava prostu (resp. univerzalnu) $N = 1$ Neveu-Schwarzovu verteks-algebru generiranu s $\bar{\tau}$ and $\bar{\omega} = \frac{1}{2}\bar{\tau}_0\bar{\tau}$ te sljedećim λ-zagradama

$$\begin{aligned}
[\bar{\tau}_\lambda \bar{\tau}] &= 2\bar{\omega} + \frac{\lambda^2}{3}c \\
[\bar{\omega}_\lambda \bar{\tau}] &= (D + \lambda\frac{3}{2})\bar{\tau} \\
[\bar{\omega}_\lambda \bar{\omega}] &= (D+2\lambda)\bar{\omega} + \frac{c}{12}\lambda^3
\end{aligned}$$

Korolar 3.3.2. *Za proizvoljnu uređenu trojku* $(c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha) \in \mathbb{C}^3, c_\alpha \neq 0$ *vrijedi izomorfizam verteks-algebri:*

$$L^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha) \cong SM(1) \otimes L^{\mathcal{NS}}_{c_L - c_\mu}. \tag{3.7}$$

Dokaz. Neka je $\mu = 2c_{\alpha,L}/c_\alpha$. Tada sljedeća četiri vektora u

$SM(1) \otimes L^{\mathcal{NS}}_{c_L - c_\mu} \cong L^{\mathcal{SH}}(c_\mu, c_{\alpha,L}, c_\alpha) \otimes L^{\mathcal{NS}}_{c_L - c_\mu}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= \alpha \in SM(1) \\ \tilde{\Psi} &= \Psi \in SM(1) \\ \tilde{\omega} &= \omega_{SM(1)} + \bar{\omega} \\ \tilde{\tau} &= \tau_{SM(1)} + \bar{\tau} \end{aligned}$$

zadovoljavaju iste $\lambda-$zagrade kao generatori od $V^{\mathcal{SH}}(c_\alpha, c_{L,\alpha}, c_L)$. To daje homomorfizam verteks-algebri

$$f : V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha) \to SM(1) \otimes L^{\mathcal{NS}}_{c_L - c_\mu}.$$

Sljedeće uočimo da svi generatori od $SM(1) \otimes L^{\mathcal{NS}}_{c_L - c_\mu}$ pripadaju $\mathrm{Im}(f)$ pa zaključujemo da je f surjektivno. (Zaista, α i Ψ pripadaju $\mathrm{Im}(f)$ prema definiciji, stoga generatori od $SM(1)$ pripadaju $\mathrm{Im}(f)$. Kako su $\omega_{SM(1)}$, $\tau_{SM(1)}$ konstruirani iz α, Ψ zaključujemo da oni također pripadaju $\mathrm{Im}(f)$. Stoga, $\bar{\omega}$ i $\bar{\tau}$ su elementi iz $\mathrm{Im}(f)$.)

S druge strane, verteks-algebra $SM(1) \otimes L^{\mathcal{NS}}_{c_L - c_\mu}$ je tenzorski produkt dvije proste verteks-algebre pa je prosta. Dakle, (3.7) vrijedi. Dokaz slijedi. $\square$

Theorem 3.3.3. *Vrijedi sljedeći izomorfizam verteks-algebri:*

$$V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha) \cong SM(1) \otimes V^{\mathcal{NS}}_{c_L - c_\mu}, \tag{3.8}$$

gdje su $c_\alpha \neq 0$ i c_μ kao u Teoremu 3.3.1.

Dokaz. Prvo uočimo da je $SM(1) \otimes V^{\mathcal{NS}}_{c_L - c_\mu}$ $\mathcal{SH}$-modul najveće težine s najvećom težinom $(0,0)$ takav da vrijedi

$$G(-1/2)(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) = L(-1)(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) = 0.$$

Stoga $SM(1) \otimes V^{\mathcal{NS}}_{c_L - c_\mu}$ mora biti neki kvocijent od $\mathcal{V}^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha, 0, 0)$. No, iz propozicije 3.2.3 lako se vidi da je $V^{\mathcal{SH}}(c_\alpha, c_{L,\alpha}, c_L)$ kao vektorski prostor izomorfan

$$SM(1) \otimes V^{\mathcal{NS}}_{c_L - c_\mu},$$

čime je tvrdnja dokazana. □

3.4 Realizacija na nivou nula

Neka je $L = \mathbb{Z}c + \mathbb{Z}d$ rešetka takva da je $\langle c, c\rangle = \langle d, d\rangle = 0$, $\langle c, d\rangle = 2$ i neka je $V_L = \mathbb{C}[L] \otimes M(1)$ verteks-algebra pridružena rešetki L, gdje je $M(1)$ Heisenbergova verteks-algebra ranga 2 generirana poljima $c(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c(n) z^{-n-1}$, $d(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d(n) z^{-n-1}$, a $\mathbb{C}[L]$ grupovna algebra pridružena rešetki L. Elementi grupovne algebre se zapisuju kao e^γ, $\gamma \in L$. Neka je $Y(\cdot, z)$ verteks operator koji definira strukturu verteks-algebre na V_L. Detaljnije o verteks-algebrama pridruženim rešetkama može se pročitati u monografijama [25] i [18]. Također, o primjeni ove verteks-algebre za Heisenberg-Virasorovu verteks-algebru se može pronaći u [5].

Schurov polinom

$$S_m(\gamma) = S_m(\gamma(-1), \gamma(-2), \ldots, \gamma(-m))$$

za $m \in \mathbb{Z}_{\geq}$, $\gamma \in L$, definira se pomoću sljedeće formule

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \gamma(-n)\frac{z^n}{n}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} S_m(\gamma) z^m.$$

Direktno se vidi da je

$$\begin{aligned} S_0(\gamma) &= 1, \\ S_1(\gamma) &= \gamma(-1) \\ S_2(\gamma) &= \frac{1}{2}(\gamma(-1)^2 + \gamma(-2)). \end{aligned}$$

Može se pokazati da je formula za n-ti produkt $e^{\alpha}_n e^{\beta}$ u verteks-algebri V_L

$$e^{\alpha}_n e^{\beta} = S_{-n-1-\langle\alpha,\beta\rangle}(\alpha)e^{\alpha+\beta},$$

za $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha, \beta \in L$ te vrijedi

$$e^{\alpha}_t e^{\beta} = 0 \;\; \text{za } t \geq -\langle\alpha,\beta\rangle.$$

Neka je $F^{(2)}$ fermionska verteks-algebra generirana poljima

$$\Psi_i(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Psi_i(n+\frac{1}{2})z^{-n-1}$$

takvima da za $i = 1, 2$, $r, s \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ vrijede sljedeće antikomutacijske relacije

$$\{\Psi_i(r), \Psi_i(s)\} = 0, \;\; \{\Psi_1(r), \Psi_2(s)\} = \delta_{r+s,0}.$$

verteks-algebra $F^{(2)}$ posjeduje sljedeći Virasorov vektor centralnog naboja $c_{fer} = 1$:

$$\omega_{fer} = \frac{1}{2}\left(\Psi_1(-\frac{3}{2})\Psi_2(-\frac{1}{2}) + \Psi_2(-\frac{3}{2})\Psi_1(-\frac{1}{2})\right)\mathbf{1}.$$

Definiramo sljedeća četiri vektora u $M(1) \otimes F^{(2)}$:

$$\begin{aligned}
\alpha &= -c_{L,\alpha}c(-1) \\
\tau &= \sqrt{2}(\frac{1}{2}c(-1)\Psi_1(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}d(-1)\Psi_2(-\frac{1}{2}) + \frac{c_L-3}{12}\Psi_2(-\frac{3}{2}) - \Psi_1(-\frac{3}{2})) \\
\omega &= \frac{1}{2}c(-1)d(-1) + \frac{c_L-3}{24}c(-2) - \frac{1}{2}d(-2) + \omega_{fer} \\
\Psi &= -\sqrt{2}c_{L,\alpha}\Psi_2(-\frac{1}{2}).
\end{aligned}$$

Neka $\widetilde{L}^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,I})$ označava verteks podalgebru od $M(1) \otimes F^{(2)}$ generiranu poljima pridruženim vektorima $\alpha, \Psi, \tau, \omega$.

Theorem 3.4.1. *verteks-algebra $\widetilde{L}^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,I})$ izomorfna je nekom kvocijentu $N = 1$ Heisenberg-Virasorove verteks-algebre na nivou nula $V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{LI}) := V^{\mathcal{SH}}(c_L, 0, c_{L,I})$.*

Dokaz. Dokaz slijedi iz sljedećih λ-zagrada:

$$[\omega_\lambda \omega] = (D + 2\lambda)\omega + \frac{c_L}{12}\lambda^3, \quad [\tau_\lambda \tau] = 2\omega + \frac{c_L}{3}\lambda^2 \tag{3.9}$$

$$[\omega_\lambda \tau] = (D + \frac{3}{2}\lambda)\tau \tag{3.10}$$

$$[\alpha_\lambda \alpha] = [\Psi_\lambda \Psi] = [\alpha_\lambda \Psi] = 0, \tag{3.11}$$

$$[\alpha_\lambda \tau] = \Psi\lambda, \quad [\alpha_\lambda \omega] = \alpha\lambda + c_{L,\alpha}\lambda^2, \tag{3.12}$$

$$[\Psi_\lambda \tau] = \alpha + 2c_{L,\alpha}\lambda, \quad [\omega_\lambda \Psi] = (D + \frac{1}{2}\lambda)\Psi \tag{3.13}$$

Konformni vektor ω može se zapisati kao suma dvaju komutirajućih konformnih vektora

$$\omega = \omega_{HVir} + \omega_{fer},$$

gdje je

$$\omega_{Hvir} = \frac{1}{2}c(-1)d(-1) + \frac{c_L - 3}{24}c(-2) - \frac{1}{2}d(-2)$$

konformni vektor centralnog naboja $c_L - 1$ ([5], [6]) a ω_{fer} je konformni vektor u $F^{(2)}$ centralnog naboja $c = 1$. Stoga je ω konformni vektor centralnog naboja c_L.

Dokažimo sada da je

$$\tau_0\tau = 2\omega, \quad \tau_1\tau = 0, \quad \tau_2\tau = \frac{2}{3}c_L\mathbf{1},$$

odakle slijedi relacija (3.9). Imamo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\tau_0\tau &= \frac{1}{2}\left(\Psi_1(-\frac{3}{2})\Psi_2(-\frac{1}{2}) + \Psi_2(-\frac{3}{2})\Psi_1(-\frac{1}{2})\right)\mathbf{1} \\
&+ \frac{c_L - 3}{24}c(-2) - \frac{1}{2}d(-2) + \frac{1}{2}c(-1)d(-1) = \omega \\
\tau_1\tau &= \left(\Psi_1(-\frac{1}{2})\Psi_2(-\frac{1}{2}) + \Psi_2(-\frac{1}{2})\Psi_1(-\frac{1}{2})\right)\mathbf{1} = 0 \\
\tau_2\tau &= 2(1 + \frac{c_L - 3}{24})\mathbf{1} = \frac{2}{3}c_L.
\end{aligned}$$

Dokaz λ-zagrada (3.10)-(3.13) je lagan. $\square$

3.5 Singularni vektori u Vermaovom modulu na nivou 0: Primjeri

3.5.1 Singularni vektori konformne težine $1/2$

Propozicija 3.5.1. *Neka je $c_\alpha = 0$ i $c_{L,\alpha} \neq 0$. U Vermaovom modulu $V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, h_\alpha, h)$ postoji singularan vektor konformne težine $1/2$ ako i samo ako je $h_\alpha = 0$ ili $\frac{h_\alpha}{c_{L,\alpha}} = 2$.*
Za $h_\alpha = 0$, singularni vektor je jedinstven do na skalarni faktor i dan je formulom

$$w_1 = (G(-1/2) + \frac{h}{c_{L,\alpha}}\Psi(-1/2))v_{h_\alpha,h}.$$

Ako je $\frac{h_\alpha}{c_{L,\alpha}} = 2$, singularni vektor je $\Psi(-1/2)v_{h_\alpha,h}$.

Napomena 3. *Uočimo da je u prvom, tj. drugom slučaju*

$$\frac{h_\alpha}{c_{L,\alpha}} - 1 = -p, \quad \text{za} \quad p = 1, \quad \text{odnosno}, \quad \frac{h_\alpha}{c_{L,\alpha}} - 1 = p, \quad \text{za} \quad p = 1.$$

Dokaz. U PBW bazi, vektor konformne težine $1/2$ ima oblik

$$w_1 = (a_1\Psi(-1/2) + a_2 G(-1/2))v_{h_\alpha,h},$$

(gdje je $v_{h_\alpha,h}$ vektor najveće težine u $V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, h_\alpha, h)$).
Vidimo

$$G(n+1/2)w_1 = \Psi(n+1/2) = L(n+1)w_1 = \alpha(n+1)w_1 = 0 \quad \text{za} \quad n \geq 1.$$

Dakle, uvjeti za singularne vektore su

$$\Psi(1/2)w_1 = G(1/2)w_1 = 0$$

Direktni račun pokazuje

$$\begin{aligned} \Psi(1/2)w_1 &= a_2 h_\alpha v_{h_\alpha,h} \\ G(1/2)w_1 &= (a_1(h_\alpha - 2c_{L,\alpha})a_1 + 2ha_2)v_{h_\alpha,h} \end{aligned}$$

Iz prve jednadžbe slijedi da je ili $a_2 = 0$ ili $h_\alpha = 0$.

Ako je $a_2 = 0$, tada je nužno $h_\alpha = 2c_{L,\alpha}$.

Ako je $h_\alpha = 0$, druga jednadžba povlači

$$-2c_{L,\alpha}a_1 + 2ha_2 = 0,$$

tj. $a_1 = \frac{h}{c_{L,\alpha}}a_2$. Tvrdnja slijedi. □

Korolar 3.5.2. *Neka je $h_\alpha = 0$. Za svaki $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ vektor*

$$\prod_{i=1}^{n}\left(G(-1/2) + \frac{h+\frac{n-i}{2}}{c_{L,\alpha}}\Psi(-\frac{1}{2})\right)v_{0,h}$$

je singularan vektor u $V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, 0, h)$ konformne težine $n/2$.

Dokaz. Prvo uočimo da je

$$w_1 = \left(G(-1/2) + \frac{h}{c_{L,\alpha}}\Psi(-\frac{1}{2})\right)v_{0,h}$$

singularan vektor u $V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, 0, h)$ težine $(0, h + \frac{1}{2})$. Iz univerzalnosti Vermaovog modula zaključujemo da postoji netrivijalni homomorfizam

$$\Phi : V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, h_\alpha, h + \tfrac{1}{2}) \to V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, h_\alpha, h)$$
$$\Phi : v_{h_\alpha, h+\frac{1}{2}} \mapsto w_1$$

S druge strane, Vermaov modul $V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, h_\alpha, h+\frac{1}{2})$ ima singularni vektor

$$w_2 = \left(G(-1/2) + \frac{h+1/2}{c_{L,\alpha}}\Psi(-\frac{1}{2})\right)v_{h_\alpha, h+\frac{1}{2}}$$

kojeg homomorfizam Φ preslikava u

$$\left(G(-1/2) + \frac{2h+1}{2c_{L,\alpha}}\Psi(-\frac{1}{2})\right)\left(G(-1/2) + \frac{h}{c_{L,\alpha}}\Psi(-\frac{1}{2})\right)v_{h_\alpha,h}.$$

Nastavljanjem postupka dobivamo traženi singularni vektor. □

3.5.2 Singularni vektori konformne težine 1

Pogledajmo slučaj $n = 2$ iz prethodnog Korolara 3.5.2. Tada imamo singularni vektor

$$\begin{aligned}
& \left(G(-1/2) + \frac{h}{c_{L,\alpha}}\Psi(-\frac{1}{2})\right)\left(G(-1/2) + \frac{2h+1}{2c_{L,\alpha}}\Psi(-\frac{1}{2})\right) v_{h_\alpha,h} \\
= & \left(G(-\frac{1}{2})^2 + \frac{h}{c_{L,\alpha}}\Psi(-\frac{1}{2})G(-\frac{1}{2}) + \frac{2h+1}{2c_{L,\alpha}}G(-\frac{1}{2})\Psi(-\frac{1}{2})\right) v_{h_\alpha,h} \\
= & \left(L(-1) - \frac{1}{2c_{L,\alpha}}G(-\frac{1}{2})\Psi(-\frac{1}{2}) + \frac{2h+1}{2c_{L,\alpha}}\alpha(-1)\right) v_{h_\alpha,h} \\
= & -\frac{1}{2c_{L,\alpha}}\left(G(-1/2)\Psi(-1/2) - 2c_{L,\alpha}L(-1) - (2h+1)\alpha(-1)\right) v_{h_\alpha,h}.
\end{aligned}$$

Propozicija 3.5.3. *Neka je $c_\alpha = 0$. U Vermaovom modulu $V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, h, h_\alpha)$ postoji singularan vektor konformne težine 1 ako i samo ako je $h_\alpha = 0$, i on je, do na skalar, jednak prethodno izračunatom vektoru.*

$$w_2 = (G(-1/2)\Psi(-1/2) - 2c_{L,\alpha}L(-1) - (2h+1)\alpha(-1))v_{h_\alpha,h}$$

Dokaz. U PBW bazi, vektor konformne težine 1 ima oblik

$$w_2 = (a_1 L(-1) + a_2\alpha(-1) + a_3 G(-1/2)\Psi(-1/2))v_{h_\alpha,h},$$

Vidimo da je za svaki $n \geq 1$,

$$L(n+1)w_2 = \alpha(n+1)w_2 = \Psi(n+1/2)w_2 = G(n+1/2)w_2 = 0,$$

i da je

$$\alpha(1)w_2 = [\Psi(1/2), G(1/2)]_+ w_2$$

pa su uvjeti na singularne vektore

$$L(1)w_2 = \Psi(1/2)w_2 = G(1/2)w_2 = 0$$

Direktnim računom se pokazuje

$$\begin{aligned} L(1)L(-1)v &= 2hv \\ L(1)\alpha(-1)v &= (h_\alpha - 2c_{L,\alpha})v \\ L(1)G(-1/2)\Psi(-1/2)v &= (h_\alpha - 2c_{L,\alpha})v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi(1/2)L(-1)v &= 0 \\ \Psi(1/2)\alpha(-1)v &= 0 \\ \Psi(1/2)G(-1/2)\Psi(-1/2)v &= h_\alpha\Psi(-1/2)v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(1/2)L(-1)v &= G(-1/2)v \\ G(1/2)\alpha(-1)v &= \Psi(-1/2)v \\ G(1/2)G(-1/2)\Psi(-1/2)v &= (2h+1)\Psi(-1/2)v - (h_\alpha - 2c_{L,\alpha})G(-1/2)v \end{aligned}$$

Odavde dobivamo

$$\begin{aligned} L(1)w_2 &= (2ha_1 + (h_\alpha - 2c_{L,\alpha})a_2 + (h_\alpha - 2c_{L,\alpha})a_3)v_{h_\alpha,h} \\ \Psi(1/2)w_2 &= h_\alpha a_3\Psi(-1/2)v_{h_\alpha,h} \\ G(1/2)w_2 &= (a_1 - (h_\alpha - 2c_{L,\alpha})a_3)G(-1/2)v_{h_\alpha,h} \\ &+ (a_2 + (2h+1)a_3)\Psi(-1/2)v_{h_\alpha,h} \end{aligned}$$

Zbog linearne nezavisnosti vektora PBW baze Vermaovog modula, izlazi sustav jednadžbi:

$$2ha_1 + (h_\alpha - 2c_{L,\alpha})a_2 + (h_\alpha - 2c_{L,\alpha})a_3 = 0 \tag{3.14}$$

$$h_\alpha a_3 = 0 \tag{3.15}$$

$$a_1 - (h_\alpha - 2c_{L,\alpha})a_3 = 0 \tag{3.16}$$

$$a_2 + (2h+1)a_3 = 0 \tag{3.17}$$

Za $h_\alpha \neq 0$, vidimo da sustav ima jedino trivijalno rješenje.

Za $h_\alpha = 0$, sustav ima netrivijalno rješenje dano s

$$a_1 = -2c_{L,\alpha}a_3, \quad a_2 = -(2h+1)a_3, \quad a_3 \in \mathbb{C}.$$

Tvrdnja slijedi. □

3.5.3 Singularni vektori konformne težine 3/2

Propozicija 3.5.4. *Neka je $c_\alpha = 0$. U Vermaovom modulu $V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, h_\alpha, h)$ postoji singularan vektor konformne težine 3/2 ako i samo ako je $h_\alpha = 0$, $\frac{h_\alpha}{c_{L,\alpha}} = 4$ ili $\frac{h_\alpha}{c_{L,\alpha}} = -2$.*

Za $h_\alpha = 0$ vektor je dan u Korolaru 3.5.2 za $n = 3$:

$$\begin{aligned} w_3^{(1)} &= \left(L(-1)G(-1/2) + \frac{2h+3}{c_{L,\alpha}}L(-1)\Psi(-1/2)\right)v_{h_\alpha,h} \\ &+ \left(\frac{4h+1}{c_{L,\alpha}}\alpha(-1)G(-1/2) + \frac{2h(h+1)}{c_{L,\alpha}^2}\alpha(-1)\Psi(-1/2)\right)v_{h_\alpha,h} \end{aligned}$$

U drugom slučaju singularni vektor je dan s

$$w_3^{(2)} = \left(\Psi(-3/2) - \frac{1}{2c_{L,\alpha}}\alpha(-1)\Psi(-1/2)\right)v_{h_\alpha,h},$$

a u trećem slučaju s

$$\begin{aligned} w_3^{(3)} &= \left(G(-3/2) + \frac{2h+\frac{2}{3}c_L - 3}{6c_{L,\alpha}}\Psi(-3/2)\right)v_{h_\alpha,h} + \\ &+ \left(\frac{1}{2c_{L,\alpha}}(L(-1)\Psi(-1/2) + \alpha(-1)G(-1/2) + \frac{4h+\frac{1}{3}c_L}{12c_{L,\alpha}^2}\alpha(-1)\Psi(-1/2)\right)v_{h_\alpha,h} \end{aligned}$$

Napomena 4. *Uočimo da je u prvom, tj. drugom slučaju,*

$$\frac{h_\alpha}{c_{L,\alpha}} - 1 = p, \quad za \quad p = 3, \quad odnosno, \quad \frac{h_\alpha}{c_{L,\alpha}} - 1 = -p, \quad za \quad p = 3.$$

Dokaz. U PBW bazi, vektor konformne težine 3/2 ima oblik

$$\begin{aligned} w_3 &= (a_1L(-1)G(-1/2) + a_2L(-1)\Psi(-1/2) + a_3\alpha(-1)G(-1/2) + \\ &+ a_4\alpha(-1)\Psi(-1/2))v_{h_\alpha,h} + (a_5\Psi(-3/2) + a_6G(-3/2))\,v_{h_\alpha,h} \end{aligned}$$

Vidimo da je dovoljno provjeriti

$$\alpha(1)w_3 = L(1)w_3 = \Psi(1/2)w_3 = G(1/2)w_3 = G(3/2)w_3 = 0.$$

Direktni račun pokazuje

$$\begin{aligned} L(1)L(-1)G(-1/2)v &= (2h+1)G(-1/2)v \\ L(1)L(-1)\Psi(-1/2)v &= (2h+1)\Psi(-1/2)v \\ L(1)\alpha(-1)G(-1/2)v &= (h_\alpha - 2c_{L,\alpha})G(-1/2)v \\ L(1)\alpha(-1)\Psi(-1/2)v &= (h_\alpha - 2c_{L,\alpha})\Psi(-1/2)v \\ L(1)\Psi(-3/2)v &= \Psi(-1/2)v \\ L(1)G(-3/2)v &= 2G(-1/2)v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha(1)L(-1)G(-1/2)v &= h_\alpha G(-1/2)v \\ \alpha(1)L(-1)\Psi(-1/2)v &= h_\alpha \Psi(-1/2)v \\ \alpha(1)\alpha(-1)G(-1/2)v &= 0 \\ \alpha(1)\alpha(-1)\Psi(-1/2)v &= 0 \\ \alpha(1)\Psi(-3/2)v &= 0 \\ \alpha(1)G(-3/2)v &= \Psi(-1/2)v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi(1/2)L(-1)G(-1/2)v &= h_\alpha L(-1)v \\
\Psi(1/2)L(-1)\Psi(-1/2)v &= 0 \\
\Psi(1/2)\alpha(-1)G(-1/2)v &= h_\alpha \alpha(-1)v \\
\Psi(1/2)\alpha(-1)\Psi(-1/2)v &= 0 \\
\Psi(1/2)\Psi(-3/2)v &= 0 \\
\Psi(1/2)G(-3/2)v &= \alpha(-1)v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(1/2)L(-1)G(-1/2)v &= (2h+1)L(-1)v \\
G(1/2)L(-1)\Psi(-1/2)v &= G(-1/2)\Psi(-1/2)v + (h_\alpha - 2c_{L,\alpha})L(-1)v \\
G(1/2)\alpha(-1)G(-1/2)v &= -G(-1/2)\Psi(-1/2)v + (2h+1)\alpha(-1)v \\
G(1/2)\alpha(-1)\Psi(-1/2)v &= (h_\alpha - 2c_{L,\alpha})\alpha(-1)v \\
G(1/2)\Psi(-3/2)v &= \alpha(-1)v \\
G(1/2)G(-3/2)v &= 2L(-1)v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(3/2)L(-1)G(-1/2)v &= 4hv \\
G(3/2)L(-1)\Psi(-1/2)v &= 2(h_\alpha - 2c_{L,\alpha})v \\
G(3/2)\alpha(-1)G(-1/2)v &= -h_\alpha v \\
G(3/2)\alpha(-1)\Psi(-1/2)v &= 0 \\
G(3/2)\Psi(-3/2)v &= (h_\alpha - 4c_{L,\alpha})v \\
G(3/2)G(-3/2)v &= (2h + \frac{2}{3}c_L)v
\end{aligned}$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} L(1)w_3 &= ((2h+1)a_1 + (h_\alpha - 2c_{L,\alpha})a_3 + 2a_6)G(-1/2)v_{h_\alpha,h} \\ &+ ((2h+1)a_2 + (h_\alpha - 2c_{L,\alpha})a_4 + a_5)\Psi(-1/2)v_{h_\alpha,h} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\alpha(1)w_3 = h_\alpha a_1 G(-1/2)v_{h_\alpha,h} + (h_\alpha a_2 + a_6)\Psi(-1/2)v_{h_\alpha,h} = 0 \tag{3.19}$$

$$\Psi(1/2)w_3 = h_\alpha a_1 L(-1)v_{h_\alpha,h} + (h_\alpha a_3 + a_6)\alpha(-1)v_{h_\alpha,h} = 0 \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} G(1/2)w_3 &= ((2h+1)a_1 + (h_\alpha - 2c_{L,\alpha})a_2 + 2a_6)L(-1)v_{h_\alpha,h} \\ &+ ((2h+1)a_3 + (h_\alpha - 2c_{L,\alpha})a_4 + a_5)\alpha(-1)v_{h_\alpha,h} \\ &+ (a_2 - a_3)G(-1/2)\Psi(-1/2)v_{h_\alpha,h} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned} G(3/2)w_3 &= (4ha_1 + 2(h_\alpha - 2c_{L,\alpha})a_2 - h_\alpha a_3 + (h_\alpha - 4c_{L,\alpha})a_5 + \\ &\quad + (2h + \frac{2}{3}c_L)a_6)v_{h_\alpha,h} = 0 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Odavde zbog linearne nezavisnosti vektora PBW baze Vermaovog modula, izlazi sustav

$$\begin{aligned}(2h+1)a_1+(h_\alpha-2c_{L,\alpha})a_3+2a_6 &= 0 && (3.23)\\ (2h+1)a_2+(h_\alpha-2c_{L,\alpha})a_4+a_5 &= 0 && (3.24)\\ h_\alpha a_1 &= 0 && (3.25)\\ h_\alpha a_2+a_6 &= 0 && (3.26)\\ h_\alpha a_3+a_6 &= 0 && (3.27)\\ a_2 &= a_3 && (3.28)\end{aligned}$$

zajedno s uvjetom

$$4ha_1+2(h_\alpha-2c_{L,\alpha})a_2-h_\alpha a_3+(h_\alpha-4c_{L,\alpha})a_5+2(h+c_L/3)a_6=0. \quad (3.29)$$

Sada provodimo diskusiju rješenja.

Iz jednadžbe (3.25) slijedi ili $h_\alpha=0$ ili $a_1=0$.

Promatramo slučaj $h_\alpha\neq 0$ i $a_1=0$.

Sada jednadžbe (3.26), (3.27) i (3.28) povlače:

$$a_6=-h_\alpha a_2=-h_\alpha a_3. \quad (3.30)$$

Ako je $a_2=0$, tada imamo

$$a_1=a_2=a_3=a_6=0, \quad (3.31)$$

što uvrštavanjem u jednadžbu (3.24) daje

$$a_5=-(h_\alpha-2c_{L,\alpha})a_4, \quad (3.32)$$

odnosno, u jednadžbu (3.29)

$$(h_\alpha-4c_{L,\alpha})a_5=0. \quad (3.33)$$

Sada vidimo ako je $h_\alpha \neq 4c_{L,\alpha}$, da je tada i $h_\alpha - 2c_{L,\alpha} \neq 2c_{L,\alpha} \neq 0$, pa je i $a_4 = a_5 = 0$, tj. rješenje sustava je trivijalno.

U suprotnom, rješenje sustava je netrivijalno:

$$a_4 = -\frac{1}{2c_{L,\alpha}} a_5. \tag{3.34}$$

Ako je pak $a_2 \neq 0$, tada su i $a_3 \neq 0$ kao i $a_6 \neq 0$, pa uvrštavanje u jednadžbu (3.23) daje sustav

$$\begin{aligned} (h_\alpha + 2c_{L,\alpha})a_3 &= 0 \\ -2h_\alpha a_2 + (h_\alpha - 2c_{L,\alpha})a_3 &= 0 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Determinanta ovog sustava je

$$2h_\alpha(h_\alpha + 2c_{L,\alpha}) \tag{3.36}$$

i ona, prema pretpostavci da je $a_2 \neq 0$ a time i $a_3 \neq 0$, mora iščezavati, a kako smo pretpostavili da je $h_\alpha \neq 0$, zaključujemo da je tada nužno $h_\alpha + 2c_{L,\alpha} = 0$, pa imamo

$$a_2 = a_3 = \frac{1}{2c_{L,\alpha}} a_6, \tag{3.37}$$

što redom uvrštavanjem u jednadžbe (3.24) i (3.29) daje preostale koeficijente

$$a_5 = \frac{2h + \frac{2}{3}c_L - 3}{6c_{L,\alpha}} a_6 \tag{3.38}$$

$$a_4 = \frac{4h + \frac{1}{3}c_L}{12c_{L,\alpha}^2} a_6 \tag{3.39}$$

Tvrdnja slijedi. □

3.5.4 Singularni vektori za $p = 2$ i $p = 4$

Direktnim računom kao i u prethodnim slučajevima, pokazuje se

Propozicija 3.5.5. *Neka je $c_\alpha = 0$, $h_\alpha = (1+n)c_{L,\alpha}$, $|n| = 2$.*

U Vermaovom modulu $V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, h_\alpha = -c_{L,\alpha}, h)$ postoji singularan vektor konformne težine 2 koji je dan formulom

$$\begin{aligned} s_- = & - 3c_{L,\alpha}(13+c+8h)\alpha(-2) - (21+c+24h)\alpha(-1)^2 - 48c_{L,\alpha}^2 L(-2) + \\ & - 48c_{L,\alpha}\alpha(-1)L(-1) + 24c_{L,\alpha}G(-3/2)\Psi(-1/2) + \\ & + 24c_{L,\alpha}G(-1/2)\Psi(-3/2) + 2(-15+c)\Psi(-3/2)\Psi(-1/2) + \\ & + 24G(-1/2)\Psi(-1/2)\alpha(-1) \end{aligned}$$

U Vermaovom modulu $V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, h_\alpha = 3c_{L,\alpha}, h)$ postoji singularan vektor koji je dan formulom

$$s_+ = \alpha(-2) - \frac{1}{c_{L,\alpha}}\alpha(-1)^2 + \frac{2}{c_{L,\alpha}}\Psi(-3/2)\Psi(-1/2) \tag{3.40}$$

Propozicija 3.5.6. *U Vermaovom modulu $V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, h_\alpha = 5c_{L,\alpha}, h)$ postoji singularan vektor konformne težine 4 koji je dan formulom*

$$\begin{aligned} & \alpha(-4) - \frac{4}{3c_{\alpha,L}}\alpha(-3)\alpha(-1) - \frac{1}{2c_{\alpha,L}}\alpha(-2)^2 + \frac{1}{c_{\alpha,L}^2}\alpha(-2)\alpha(-1)^2 + \\ & -\frac{1}{6c_{\alpha,L}^3}\alpha(-1)^4 + \frac{2}{3c_{\alpha,L}^2}\Psi(-3/2)\Psi(-1/2)\alpha(-2) + \\ & +\frac{2}{3c_{\alpha,L}^3}\Psi(-3/2)\Psi(-1/2)\alpha(-1)^2 - \frac{8}{3c_{\alpha,L}^2}\Psi(-5/2)\Psi(-1/2)\alpha(-1) + \\ & +\frac{4}{3c_{\alpha,L}}\Psi(-7/2)\Psi(-1/2) + \frac{4}{c_{\alpha,L}}\Psi(-5/2)\Psi(-3/2) \end{aligned}$$

3.5.5 Slutnja

Na osnovu prethodnih formula imamo ovakvu slutnju:

Slutnja 3.5.7. *Neka je $n = \frac{h_\alpha}{c_{\alpha,L}} - 1$ i $p = |n|$.*

- *Vermaov modul $V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, h, h_\alpha)$ je ireducibilan ako i samo ako $n \notin \mathbb{Z}$ ili $n = 0$.*

- *Ako je n neparan cijeli broj, tada $V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, h, h_\alpha)$ sadrži singularni vektor konformne težine $p/2$.*

- *Ako je n paran cijeli broj, tada $V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, h, h_\alpha)$ sadrži singularni vektor konformne težine p.*

Dokaz ove slutnje zahtjeva determinantnu formulu. Slutnju ćemo proučavati u zajedničkom članku s D. Adamovićem i G. Radoboljom [2].

3.6 Screening operator i singularni vektor konformne težine $p/2$: p pozitivan neparan broj

Zbog kratkoće zapisa koristimo sljedeću oznaku:

$$V^{\mathcal{SH}}(h, h_\alpha) := V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, c_\alpha = 0, h, h_\alpha).$$

3.6.1 Screening operatori-motivacija konstrukcije

U ovom poglavlju ćemo objasniti našu metodu konstrukcije singularnih vektora pomoću screening operatora. Screening operatori su jedna od najvažnijih metoda za konstrukciju singularnih vektora. Napomenimo samo sljedeće primjere:

- Virasorovi singularni vektori su tako konstruirani u člancima Feigin-Fuchsa [14], Tsuchiya-Kanie [37]. Ta konstrukcija se može naći i u monografiji Iohara i Koge [17].

- Singularni vektori u slučaju zakrenute Heisenberg-Virasorove algebre nivoa 0 su konstruirani pomoću screening operatora u člancima D. Adamovića i G. Radobolje [5], [7].

Naš cilj je koristiti screening operatore u slučaju algebre $\mathcal{SH}$. Osnovna ideja je sljedeća. Pretpostavimo da imamo dva Vermaova modula $V^{\mathcal{SH}}(h, h_\alpha)$ i $V^{\mathcal{SH}}(h', h'_\alpha)$ s vektorima najveće težine v, v' redom. Također, pretpostavimo da postoji preslikavanje $\mathcal{SH}$-modula

$$f : V^{\mathcal{SH}}(h', h'_\alpha) \to V^{\mathcal{SH}}(h, h_\alpha),$$

koje komutira s parnim, a antikomutira s neparnim elementima od $\mathcal{SH}$. Ako je $f(v') \neq 0$, tada je $f(v')$ singularan vektor u Vermaovom modulu $V^{\mathcal{SH}}(h, h_\alpha)$. Zaista, treba provjeriti da je

$$Xf(v') = 0, \quad \forall X \in \mathcal{SH}^+.$$

Budući da je $Xv' = 0$, to je

$$Xf(v') = \pm f(Xv') = 0.$$

Prema tome $f(v')$ je singularni vektor u Vermaovom modulu $V^{\mathcal{SH}}(h, h_\alpha)$ težine (h', h'_α).

Postavlja se pitanje kako konstruirati taj homomorfizam. Naša konstrukcija će biti sljedeća. Pronaći ćemo jedan singularan vektor s u verteks-algebri $V_L \otimes F^{(2)}$ (vidi Lemu 3.6.1). Pokazat ćemo da nulta komponenta Q verteks operatora $Y(s, z)$ komutira s parnim, a anti-komutira s neparnim vektorima. Prema tome operator Q će imati ulogu gornjeg preslikavanja f. Sad preostaje konstruirati Vermaove module. Ti Vermaovi moduli će biti realizirati kao $V^{\mathcal{SH}}(h', h'_\alpha) := U(\mathcal{SH}).e^{-\frac{p+1}{2}d+(r-1/2)c}$, $V^{\mathcal{SH}}(h, h_\alpha) := U(\mathcal{SH}).e^{-\frac{p+1}{2}d+rc}$. Prema tome je

$$Q : V^{\mathcal{SH}}(h', h'_\alpha) \to V^{\mathcal{SH}}(h, h_\alpha)$$

i $Qe^{-\frac{p+1}{2}d+(r-1/2)c}$ je singularni vektor u Vermaovom modulu $V^{\mathcal{SH}}(h, h_\alpha)$.

Formula za taj singularni vektor će koristiti Schurove polinome i generatore Cliffordove verteks-algebre.

3.6.2 Konstrukcija screening operatora

Kao dodatni argument za Slutnju 3.5.7 prezentirat ćemo dokaz da u slučaju kad je p pozitivan neparan broj postoji singularan vektor na nivou $p/2$. U tu svrhu ćemo konstruirati screening operator koji komutira (odnosno, antikomutira) s djelovanjem naše Liejeve superalgebre.

Lema 3.6.1. *Neka je $s = \Psi_2(-\frac{1}{2})e^{\frac{1}{2}c}$. Tada imamo*

$$\begin{aligned}
G(-1/2)s &= \sqrt{2}De^{\frac{1}{2}c}, \\
G(1/2)s &= \sqrt{2}e^{\frac{1}{2}c}, \\
G(n+1/2)s &= 0, \quad (n \geq 1) \\
L(-1)s &= Ds \\
L(0)s &= s \\
L(n)s &= 0, \quad (n \geq 1) \\
\alpha(n)s &= 0 \\
\Psi(n+1/2)s &= 0
\end{aligned}$$

Dokaz. Podsjetimo se da je

$$\tau = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}c(-1)\Psi_1(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}d(-1)\Psi_2(-\frac{1}{2}) + \frac{c_L - 3}{12}\Psi_2(-\frac{3}{2}) - \Psi_1(-\frac{3}{2})\right).$$

Dobivamo

$$\begin{aligned}
G(-1/2)s &= \frac{\sqrt{2}}{2}c(-1)\Psi_1(\frac{1}{2})\Psi_2(-\frac{1}{2})e^{\frac{1}{2}c} = \frac{\sqrt{2}}{2}c(-1)e^{\frac{1}{2}c} = \sqrt{2}De^{\frac{1}{2}c} \\
G(1/2)s &= \sqrt{2}(-D\Psi_1)_1\Psi_2(-\frac{1}{2})e^{\frac{1}{2}c} = \sqrt{2}\Psi_1(\frac{1}{2})\Psi_2(-\frac{1}{2})e^{\frac{1}{2}c} = \sqrt{2}e^{\frac{1}{2}c} \\
G(n+3/2)s &= L(n+1)s = 0 \quad (n \geq 0) \\
L(0)s &= [L(0), \Psi_2(-1/2)]e^{\frac{1}{2}c} + \Psi_2(-1/2)L(0)e^{\frac{1}{2}c} = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})s = s \\
L(-1)s &= Ds
\end{aligned}$$

□

Theorem 3.6.2. *[2] Operator $Q = s_0 = Res_z Y(s,z)$ komutira ili antikomutira s generatorima od $\mathcal{SH}$.*

Dokaz. Pomoću komutatorske formule dobivamo

$$\begin{aligned}
[G(n+1/2), Q] &= [\tau_{n+1}, s_0] \\
&= (G(-1/2)s)_{n+1} + (n+1)(G(1/2)s)_n \\
&= \sqrt{2}((De^{\frac{c}{2}})_{n+1} + (n+1)e^{\frac{c}{2}}_n \\
&= \sqrt{2}(-n-1+n+1)e^{\frac{c}{2}}_n = 0. \\
[L(n), Q] &= [\omega_{n+1}, s_0] \\
&= (Ds)_{n+1} + (n+1)s_n = (-n-1+n+1)s_n = 0.
\end{aligned}$$

□

3.6.3 Singularni vektori preko screening operatora

Definiramo Schurove polinome $S_r(\alpha) := S_r(\alpha(-1), \alpha(-2), \cdots)$ koristeći njihovu funkciju izvodnicu

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(-n)\frac{z^n}{n}\right) = \sum_{r=0}^{\infty} S_r(\alpha) z^r.$$

Posebno, imamo

$$S_0(\alpha) = 1,\ S_1(\alpha) = \alpha(-1),\ S_2(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\alpha(-1)^2 + \alpha(-2)\right).$$

Theorem 3.6.3. *[2] Pretpostavimo da je $c_{L,\alpha} \neq 0$ i*

$$\frac{h_\alpha}{c_{L,\alpha}} - 1 = p \quad (p \in \mathbb{Z}_{>0},\ p \text{ neparan}).$$

Tada u Vermaovom modulu $V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, h, h_\alpha)$ s vektorom najveće težine v_{h,h_α}, postoji netrivijalan singularni vektor konformne težine $p/2$ koji je oblika

$$\sum_{i=0}^{\frac{p-1}{2}} \Psi(-1/2-i) S_{\frac{p-1}{2}-i}\left(-\frac{\alpha}{2c_{L,\alpha}}\right) v_{h,h_\alpha}.$$

Dokaz. Koristeći free field realizaciju, Vermaov modul $V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}, h, h_\alpha)$ možemo reprezentirati kao $V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\alpha}).e^{-\frac{p+1}{2}d+rc}$. Zaista,

$$\begin{aligned}\alpha(0)e^{-\frac{p+1}{2}d+rc} &= c_{L,\alpha}(p+1)e^{-\frac{p+1}{2}d+rc}\\ L(0)e^{-\frac{p+1}{2}d+rc} &= h_{p,r}e^{-\frac{p+1}{2}d+rc}\end{aligned}$$

gdje je

$$h_{p,r} = -r(p+1) - \frac{c_L-3}{24}(p+1) + r = -rp - \frac{c_L-3}{24}(p+1).$$

Primjenom screening operatora Q na $e^{-\frac{p+1}{2}d+(r-\frac{1}{2})c}$, dobivamo za p neparan:

$$v_{sing} = Qe^{-\frac{p+1}{2}d+(r-\frac{1}{2})c} = \Psi_2(-1/2)S_{\frac{p-1}{2}}(\frac{c}{2})e^{-\frac{p+1}{2}d+rc},$$

pri čemu je težina singularnog vektora

$$h_{p,r} + \frac{p-1}{2} + 1/2 = h_{p,r} + \frac{p}{2}.$$

□

Poglavlje 4

Verteks-algebre pridružene reprezentacijama Schrödinger-Virasorove algebre

4.1 Weylova verteks-algebra

U ovom kratkom poglavlju dajemo definiciju Weylove verteks-algebre ili, u fizikalnoj literaturi, poznatije kao $\beta - \gamma$ sustav. Navodimo konstrukciju jednoparametarske familije konformnih vektora u Weylovoj verteks-algebri. Detaljna diskusija ovih konformnih vektora može se naći u [12]. Uočavamo da je Heisenbergovo polje dobiveno kao normalni produkt dvaju generirajućih polja Weylove verteks-algebre, primarno ako i samo ako za parametar uzmemo $\mu = \frac{1}{2}$.

Weylova verteks-algebra W je generirana poljima $a^{\pm}$ i sljedećim λ-zagradama:

$$[a^{\pm}_{\lambda} a^{\pm}] = 0, \quad [a^{+}_{\lambda} a^{-}] = 1.$$

Generatore $a^{\pm}$ identificiramo sa sljedećim formalnim Laurentovim redovima

$$a^{\pm}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a^{\pm}\left(n+\frac{1}{2}\right) z^{-n-1}.$$

W ima dodatnu strukturu ireducibilne reprezentacije beskonačnodimenzionalne Weylove algebre, koja je asocijativna algebra generirana elementima

$$a^{\pm}(m+1/2), \quad m \in \mathbb{Z}$$

i komutatorskim relacijama

$$[a^{\pm}(m+\frac{1}{2}), a^{\pm}(n+\frac{1}{2})] = 0$$
$$[a^{+}(m+\frac{1}{2}), a^{-}(n+\frac{1}{2})] = \delta_{m+n+1,0},$$

za sve $m, n \in \mathbb{Z}$.

Theorem 4.1.1. *[12] U Weylovoj verteks-algebri W postoji jednoparametarska familija konformnih vektora ω_μ, $\mu \in \mathbb{C}$*

$$\omega_\mu = (1-\mu)a^{+}(-\frac{1}{2})a^{-}(-\frac{3}{2})\mathbf{1} - \mu a^{+}(-\frac{3}{2})a^{-}(-\frac{1}{2})\mathbf{1},$$

pri čemu je njihov centralni naboj jednak

$$c_\mu = 12\mu^2 - 12\mu + 2$$

Definicija 4.1.2. *Za vektor u algebri verteks operatora $v \in V$ kažemo da je primaran ukoliko su ispunjena sljedeća svojstva:*

- *v je homogen obzirom na konformnu gradaciju konformne težine $\Delta < \infty$*
- *$L(n)v = 0 \quad$ za sve $\quad n > 0$*

Lema 4.1.3. *Vektori $a^{\pm} = a^{\pm}(-\frac{1}{2})\mathbf{1}$ su primarni vektori u Weylovoj verteks-algebri konformnih težina $(1-\mu, \mu)$.*
Posebno, njihova konformna težina je $\frac{1}{2}$ ako i samo ako je $\mu = \frac{1}{2}$.

Dokaz. Ova tvrdnja se može naći u [12]. Zbog potpunosti navodimo osnovne relacije potrebne za tu tvrdnju.

Računamo

$$
\begin{aligned}
a_0^+\omega_\mu &= a^+(1/2)\omega_\mu = \mu a^+(-3/2)\mathbf{1} = -\mu D a^+ \\
a_1^+\omega_\mu &= a^+(3/2)\omega_\mu = (1-\mu)a^+(-1/2)\mathbf{1} = (1-\mu)a^+ \\
a_n^+\omega_\mu &= 0 \quad (n \geq 2) \\
a_0^-\omega_\mu &= a^-(1/2)\omega_\mu = (1-\mu)a^-(-3/2)\mathbf{1} = -(1-\mu)Da^- \\
a_1^-\omega_\mu &= a^-(3/2)\omega_\mu = \mu a^-(-1/2)\mathbf{1} = \mu a^- \\
a_n^-\omega_\mu &= 0 \quad (n \geq 2)
\end{aligned}
$$

Sada komutatorska formula povlači

$$
\begin{aligned}
L_\mu(0)a^+ &= [L_\mu(0), a^+(-1/2)]\mathbf{1} = -[a_{-1}^+, (\omega_\mu)_1]\mathbf{1} = -(a_0^+\omega_\mu)_0 + (a_1^+\omega_\mu)_{-1} \\
&= (\mu(Da^+)_0 + (1-\mu)a_{-1}^+)\mathbf{1} = (1-\mu)a^+. \\
L_\mu(n)a^+ &= [L_\mu(n), a^+(-1/2)]\mathbf{1} = -[a_{-1}^+, (\omega_\mu)_{n+1}]\mathbf{1} = -(a_0^+\omega_\mu)_n + (a_1^+\omega_\mu)_{n-1} \\
&= (\mu(Da^+)_n + (1-\mu)a_{n-1}^+)\mathbf{1} = 0 \qquad (n \geq 1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_\mu(0)a^- &= [L_\mu(0), a^-(-1/2)]\mathbf{1} = -[a_{-1}^-, (\omega_\mu)_1]\mathbf{1} = -(a_0^-\omega_\mu)_0 + (a_1^-\omega_\mu)_{-1} \\
&= (-(1-\mu)(Da^-)_0 + \mu a_{-1}^-)\mathbf{1} = \mu a^-. \\
L_\mu(n)a^- &= [L_\mu(n), a^-(-1/2)]\mathbf{1} = -[a_{-1}^-, (\omega_\mu)_{n+1}]\mathbf{1} = -(a_0^-\omega_\mu)_n + (a_1^-\omega_\mu)_{n-1} \\
&= (-(1-\mu)(Da^-)_n + \mu a_{n-1}^-)\mathbf{1} = 0 \qquad (n \geq 1).
\end{aligned}
$$

Ovim je dokazano da su $a^\pm$ primarni i da je konformna težina $1/2$ ako i samo ako je $\mu = 1/2$. □

Uočimo da je za $\mu = \frac{1}{2}$, centralni naboj Virasorovog polja jednak $c_L = -1$.

Lema 4.1.4. *Vektor*

$$\beta = -a^+(-\frac{1}{2})a^-(-\frac{1}{2})\mathbf{1}$$

je Heisenbergov vektor nivoa -1 *u Weylovoj verteks-algebri. Nadalje, on je primaran konformne težine* 1 *obzirom na Virasorovo polje* $L_\mu(z)$ *ako i samo ako je* $\mu = \frac{1}{2}$.

Dokaz. Imamo

$$\beta(0)\beta = 0; \quad \beta(1)\beta = -a^+(\frac{1}{2})a^-(\frac{1}{2})a^+(-\frac{1}{2})a^-(-\frac{1}{2}) = -\mathbf{1}.$$

Dakle β je Heisenbergov vektor nivoa -1. Iz prethodne leme i formule za komutator dobivamo

$$\begin{aligned}
[L_\mu(n), a^+(m+1/2)] &= (-m-\mu(n+1))a^+(m+n+1/2), \\
[L_\mu(n), a^-(m+1/2)] &= (-m+(\mu-1)(n+1))a^-(m+n+1/2).
\end{aligned}$$

Za $n \geq 1$ vrijedi:

$$L_\mu(n)\beta = -L_\mu(n)a^+(-1/2)a^- = (1-\mu(n+1))a^+(n-1/2)a^- = (2\mu-1)\delta_{n,1}\mathbf{1}$$

što povlači da je β primaran ako i samo ako je $\mu = 1/2$. Budući da je $L(0)\beta = (1-\mu+\mu)\beta = \beta$, konformna težina je 1. □

4.2 Kociklusi za proširenu Schrödinger-Wittovu Liejevu algebru

U ovom kratkom poglavlju slijedimo izlaganje iz [38].

Definicija 4.2.1. *2-kociklus* φ *na Liejevoj algebri* $\mathfrak{g}$ *s vrijednostima u trivijalnom* $\mathfrak{g}-$*modulu* $\mathbb{C}$ *je bilinearno preslikavanje*

$$\varphi : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$$

koje zadovoljava svojstvo antisimetričnosti:

$$\varphi(x, y) = -\varphi(y, x), \forall x, y \in \mathfrak{g};$$

i Jacobijev identitet:

$$\varphi([x, y], z) + \varphi([y, z], x) + \varphi([z, x], y) = 0, \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$$

Vektorski prostor svih 2-kociklusa na Liejevoj superalgebri $\mathfrak{g}$ *označavat ćemo s* $B^2(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$.

Definicija 4.2.2. *Za svaki 2-kociklus* $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$, *i svaku linearnu funkciju* $f : \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ *definiramo 2-korub:*

$$\bar{\varphi}_f(x, y) = \varphi(x, y) - f([x, y]), \forall x, y \in \mathfrak{g};$$

Vektorski prostor svih 2-korubova na Liejevoj superalgebri $\mathfrak{g}$ *označavat ćemo s* $C^2(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$.

Uočimo da je $C^2(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) \subseteq B^2(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$.

Definicija 4.2.3. *Kvocijentni vektorski prostor*

$$H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) = B^2(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) / C^2(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$$

zovemo druga kohomologija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ *s vrijednostima u* $\mathfrak{g}$*-modulu* $\mathbb{C}$.

Definicija 4.2.4. *Schrödingerova algebra* $\mathfrak{sh}$ *je konačnodimenzionalna Liejeva algebra s generatorima* $L_{\pm 1}$, $L(0)$, $X_{\pm\frac{1}{2}}$ *i centralnim elementom* M_0, *definirana kao semidirektan produkt*

$$\left(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \ltimes \left\langle X_{\pm\frac{1}{2}} \right\rangle\right) \oplus span_{\mathbb{C}} \{M_0\},$$

gdje je $\left\langle X_{\pm\frac{1}{2}} \right\rangle$ *konačnodimenzionalna Heisenbergova algebra:*

$$\left[X_{\pm\frac{1}{2}}, X_{\pm\frac{1}{2}}\right] = \delta_{\pm} M_0.$$

Djelovanje Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ *s generatorima* L_{-1}, L_0, L_1 *i relacijama*

$$[L_0, L_1] = -2L_1, \quad [L_0, L_{-1}] = 2L_{-1}, \quad [L_{-1}, L_1] = L_0,$$

definirano je, za $n \in \{-1, 0, 1\}$, *s:*

$$[L_n, X_{\pm\frac{1}{2}}] = -\left(\pm\frac{1}{2} - \frac{n}{2}\right) X_{n\pm\frac{1}{2}}$$

Definicija 4.2.5. *[38] Schrödinger-Wittova algebra* $\mathfrak{sv}_0$ *je beskonačnodimenzionalna Liejeva algebra s generatorima* $L(n), M(n), X\left(n+\frac{1}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, *koji zadovoljavaju sljedeće komutacijske relacije:*

$$[L(m), L(n)] = (m-n)L(m+n) \tag{4.1}$$
$$\left[L(m), X\left(n+\frac{1}{2}\right)\right] = \left(\frac{m-1}{2} - n\right) X\left(m+n+\frac{1}{2}\right) \tag{4.2}$$
$$[L(m), M(n)] = -nM(m+n) \tag{4.3}$$
$$\left[X\left(m+\frac{1}{2}\right), X\left(n+\frac{1}{2}\right)\right] = (m-n)M(m+n+1) \tag{4.4}$$
$$\left[M(m), X\left(n+\frac{1}{2}\right)\right] = [M(m), M(n)] = 0. \tag{4.5}$$

Theorem 4.2.6. *[39] [40] Schrödinger-Wittova Liejeva algebra* $\mathfrak{sv}_0$ *posjeduje tri netrivijalna centralna proširenja dana sljedećim trima kociklusima:*

$$\begin{aligned}
\varphi_1(L(m), L(n)) &= \frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}; \\
\varphi_2(L(m), M(n)) &= \left(m^2-m\right)\delta_{m+n,0}; \\
\varphi_3(M(m), M(n)) &= m\delta_{m+n,0}
\end{aligned}$$

Definicija 4.2.7. *[38] Proširenu Schrödingerovu algebru* $\overline{\mathfrak{sh}} \supset \mathfrak{sh}$ *definiramo kao semidirektan produkt*

$$\overline{\mathfrak{sh}} \simeq \langle N_0 \rangle \ltimes \mathfrak{sh},$$

gdje N_0 *djeluje kao derivacija na* $\mathfrak{sh}$:

$$[N_0, L_{0,\pm 1}] = 0 \quad \left[N_0, X_{\pm\frac{1}{2}}\right] = X_{\pm\frac{1}{2}}, \quad [N_0, M_0] = 2M_0.$$

Definicija 4.2.8. *[38] Proširena Schrödinger-Wittova algebra $\overline{\mathfrak{sv}_0} \supset \mathfrak{sv}_0$ je proširenje Schrödinger-Wittove algebre dodatnim generatorima $N(n)$ te komutacijskim relacijama:*

$$\begin{aligned}
[L(m), N(n)] &= -nN(m+n) && (4.6)\\
[N(m), N(n)] &= 0, && (4.7)\\
\left[N(m), X\left(n+\frac{1}{2}\right)\right] &= X\left(m+n+\frac{1}{2}\right) && (4.8)\\
[N(m), M(n)] &= 2M(m+n) && (4.9)
\end{aligned}$$

Lema 4.2.9. *[16] [38]*

1. *Stavimo*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h} &= \left\{L_0, M_0, X_{\frac{1}{2}}\right\}\\
\tilde{\mathfrak{h}} &= \langle N_0 \rangle \ltimes \mathfrak{h}
\end{aligned}$$

Tada je $\mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{sh}$ i $\tilde{\mathfrak{h}}$ je Liejeva podalgebra od $\overline{\mathfrak{sh}}$ i vrijedi:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{sh} &= \mathfrak{h} \ltimes \langle L(m) | m \in \mathbb{Z}\rangle\\
\overline{\mathfrak{sh}} &= \tilde{\mathfrak{h}} \ltimes \left\langle X\left(m+\frac{1}{2}\right), M(m) | m \in \mathbb{Z}\right\rangle
\end{aligned}$$

gdje je $\langle L(m) | m \in \mathbb{Z}\rangle$ Wittova algebra.
Liejeve algebre $\mathfrak{h}$ i $\tilde{\mathfrak{h}}$ su rješive.

2. *Schrödinegrova algebra $\mathfrak{sh}$ je maksimalna Liejeva podalgebra Schrödinger-Wittove algebre $\mathfrak{sv}_0$, dok je proširena Schrödingerova algebra $\overline{\mathfrak{sh}} \simeq \langle N_0 \rangle \ltimes \mathfrak{sh}$, maksimalna Liejeva podalgebra Schrödinger-Wittove algebre $\mathfrak{sv}_0$*

3. *Liejeva algebra* $\mathfrak{sv}_0$ *ima tri nezavisne klase centralnih proširenja danih sljedećim kociklusima:*

$$\begin{aligned}\varphi(L(m), L(n)) &= \frac{m^3 - m}{12}\delta_{m+n,0} \\ \varphi(L(m), N(n)) &= -(m^2 - m)\delta_{m+n,0} \\ \varphi(N(m), N(n)) &= m\delta_{m+n,0}\end{aligned}$$

4.3 Schrödinger-Virasorova algebra i pridružena univerzalna omotačka verteks-algebra

Schrödinger-Virasorova Liejeva algebra je semi-direktan produkt Heisenberg-Virasorove Liejeve algebre s nilpotentnim idealom generiranim primarnim poljima $X(z)$ i $M(z)$ konformne težine $\frac{3}{2}$, odnosno 1.
Svrha ovog poglavlja je poopćenje Unterbergerovog rezultata da Heisenberg-Weylova verteks-algebra ima strukturu modula za Schrödinger-Virasorovu verteks-algebru centralnog naboja $(0, 0, -1)$.

Definicija 4.3.1. *Schrödinger-Virasorova algebra* $\mathfrak{sv}$ *je beskonačnodimenzionalna Liejeva algebra s generatorima* $\beta(n), L(n), M(n), X(n + \frac{1}{2}),\ n \in \mathbb{Z}$ *te trima centralnim elementima* $C_\beta, C_{\beta,L}, C_L$ *koji zadovoljavaju sljedeće komutacijske relacije:*

$$[L(m), L(n)] = (m - n)L(m + n) + \delta_{m+n,0}\frac{m^3 - m}{12}C_L$$

$$[\beta(m), \beta(n)] = \delta_{m+n,0}mC_\beta$$

$$[L(m), \beta(n)] = -n\beta(m + n) - \delta_{m+n,0}(m^2 - m)C_{L,\beta}$$

$$
\begin{aligned}
&[X(m+\frac{1}{2}), X(n+\frac{1}{2})] = (m-n)M(m+n+1)\\
&[L(m), M(n)] = -nM(m+n)\\
&[\beta(m), M(n)] = 2M(m+n)\\
&[L(m), X(n+\frac{1}{2})] = \left(\frac{m-1}{2}-n\right)X(m+n+\frac{1}{2})\\
&[\beta(m), X(n+\frac{1}{2})] = X(m+n+\frac{1}{2})\\
&[M(m), M(n)] = 0\\
&[M(m), X(n+\frac{1}{2})] = 0
\end{aligned}
$$

gdje su $m, n \in \mathbb{Z}$ *te*

$$[\mathfrak{sv}, C_L] = [\mathfrak{sv}, C_{L,\beta}] = [\mathfrak{sv}, C_\beta] = 0,$$

Definicija 4.3.2. *Schrödinger-Virasorova konformna algebra definirana je vektorima* β, ω, μ, χ *te centralnim elementima* $C_\beta, C_{L,\beta}, C_L$ *koji zadovoljavaju sljedeće* $\lambda-$ *zagrade:*

$$[\omega_\lambda \omega] = (D+2\lambda)\omega + \frac{\lambda^3}{12}C_L \tag{4.10}$$

$$[\omega_\lambda \chi] = (D+\lambda\frac{3}{2})\chi \tag{4.11}$$

$$[\omega_\lambda \mu] = (D+\lambda)\mu \tag{4.12}$$

$$[\chi_\lambda \chi] = (D+2\lambda)\mu \tag{4.13}$$

$$[\chi_\lambda \mu] = [\mu_\lambda \mu] = 0 \tag{4.14}$$

$$[\omega_\lambda \beta] = (D+\lambda)\beta - \lambda^2 C_{L,\beta} \tag{4.15}$$

$$[\beta_\lambda \beta] = \lambda C_\beta \tag{4.16}$$

$$[\beta_\lambda \chi] = \chi \tag{4.17}$$

$$[\beta_\lambda \mu] = 2\mu \tag{4.18}$$

Definicija 4.3.3. *Schrödinger-Virasorova verteks-algebra* $V^{\mathfrak{sv}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta)$ *je univerzalna omotačka verteks-algebra pridružena Schrödinger-Virasorovoj konformnoj algebri.*

Schrödinger-Virasorova verteks-algebra je generirana poljima

$$\begin{aligned}
\beta(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \beta(n) z^{-n-1} \\
L(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} L(n) z^{-n-2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \omega_{n+1} z^{-n-1} \\
X(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} X(n+\frac{1}{2}) z^{-n-2} \\
M(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} M(n) z^{-n-1}
\end{aligned}$$

Primjenom komutatorske formule $[a(m), b(n)] := \sum_{j=0}^{\infty} \binom{m}{j} (a_{(j)}b)_{(m+n-j)}$ na njihove koeficijente, direktno se pokazuje da je svaki $V^{\mathfrak{sv}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta)$-modul, modul za Schrödinger-Virasorovu Liejevu algebru $\mathfrak{sv}$.

Definiramo sljedeće Liejeve podalgebre od $\mathfrak{sv}$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{sv}^+ &= \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{L(n), X(n+1/2), \beta(n), M(n) |\ n \in \mathbb{Z}_{>0}\} \cup \\
&\quad \cup \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{X(1/2), M(0)\} \\
\mathfrak{sv}^- &= \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{L(n), X(n+1/2), \beta(n), M(n) |\ n \in \mathbb{Z}_{<0}\} \\
\mathfrak{sv}^0 &= \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{L(0), \beta(0), C_L, C_{L,\beta}, C_\beta\}
\end{aligned}$$

Tada vrijedi trokutasta dekompozicija

$$\mathfrak{sv} = \mathfrak{sv}^+ \oplus \mathfrak{sv}^0 \oplus \mathfrak{sv}^-.$$

Za $(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta, h, h_\beta) \in \mathbb{C}^5$ neka je $\mathbb{C}v$ 1-dimenzionalan $\mathfrak{sv}^+ \oplus \mathfrak{sv}^0$-modul takav da je za $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$:

$$\begin{aligned} L(n)v &= h\delta_{n,0}v \\ \beta(n)v &= h_\beta\delta_{n,0}v \\ X(n+\frac{1}{2})v &= M(n)v = 0 \\ (C_L, C_{L,\beta}, c_\beta)v &= (c_L, c_{L,\beta}, c_\beta)v \end{aligned}$$

Definiramo Vermaov modul $V^{\mathfrak{sv}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta, h, h_\beta)$ kao inducirani $\mathfrak{sv}$-modul

$$V^{\mathfrak{sv}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta, h, h_\beta) := U(\mathfrak{sv}) \otimes_{U(\mathfrak{sv}^+ \oplus \mathfrak{sv}^0)} \mathbb{C}v.$$

Ciklički vektor $\mathbf{1} \otimes v \in V^{\mathfrak{sv}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta, h, h_\beta)$ označit ćemo s v_{h,h_β}.

Pogledajmo sad Vermaov modul $V^{\mathfrak{sv}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta, 0, 0)$. Vektor $X(-\frac{1}{2})v_{0,0}$ je singularan vektor u tom Vermaovom modulu. Uočimo da je

$$X(\frac{1}{2})L(-1)v_{0,0} = X(-\frac{1}{2})v_{0,0}$$

pa zaključujemo da je vektor $L(-1)v_{0,0}$ subsingularan u $V^{\mathfrak{sv}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta, 0, 0)$. (Preciznije, $L(-1)v_{0,0}$ je singularan vektor u kvocijentu od $V^{\mathfrak{sv}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta, 0, 0)$ po podmodulu generiranom s $X(-\frac{1}{2})v_{0,0}$).

Univerzalna verteks-algebra $V^{\mathfrak{sv}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta)$ je realizirana kao kvocijent Vermaovog modula $V^{\mathfrak{sv}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta, 0, 0)$ po podmodulu generiranom vektorom $L(-1)v_{0,0}$:

$$V^{\mathfrak{sv}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta) = \frac{V^{\mathfrak{sv}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta, 0, 0)}{\langle L(-1)v_{0,0}\rangle}.$$

Kao vektorski prostor, $V^{\mathfrak{sv}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta)$ je izomorfan s

$$\mathbb{C}[X(-n-3/2), \beta(-n-1), L(-n-2), M(-n-1) \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}].$$

4.4 Heisenberg-Weylova verteks-algebra

Heisenberg-Weylova verteks-algebra $M(1) \otimes W$ je univerzalna omotačka verteks-algebra pridružena Heisenberg-Weylovoj konformnoj algebri koja je generirana s α, a^+, a^- i sljedećim λ-zagradama:

$$[\alpha_\lambda \alpha] = \lambda \quad [a^+_\lambda a^-] = 1, \quad [a^\pm_\lambda a^\pm] = 0, \quad [\alpha_\lambda a^\pm] = 0 \tag{4.19}$$

PBW baza od $M(1) \otimes W$ dana je s

$$\begin{array}{rcl} \alpha(-j_1 - 1) & \cdots & \alpha(-j_t - 1) a^+(-m_1 - 1/2) \cdots a^+(-m_s - 1/2) \\ a^-(-n_1 - 1/2) & \cdots & a^-(-n_p - 1/2)\mathbf{1} \end{array}$$

gdje je $j_1 \geq \cdots \geq j_t \geq 0, m_1 \geq \cdots \geq m_s \geq 0, n_1 \geq \cdots n_p \geq 0$.
Fiksirajmo sljedeći Virasorov vektor centralnog naboja 0:

$$\begin{array}{rcl} \omega & = & \omega_{1/2} + \omega_{Heis} \\ \omega_{Heis} & = & \frac{1}{2}\alpha(-1)^2\mathbf{1} \\ \omega_{1/2} & = & \frac{1}{2}a^+(-\frac{1}{2})a^-(-\frac{3}{2})\mathbf{1} - \frac{1}{2}a^+(-\frac{3}{2})a^-(-\frac{1}{2})\mathbf{1} \end{array}$$

Neka je

$$L(z) = Y(\omega, z) = L_{1/2}(z) + L_{Heis}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L(n) z^{-n-2}.$$

Nadalje, neka su dani sljedeći vektori u Heisenberg-Weylovoj verteks-algebri $M(1) \otimes W$:

$$\begin{array}{rcl} \beta & = & -a^+(-\frac{1}{2})a^-(-\frac{1}{2})\mathbf{1} \\ \mu & = & \frac{1}{2}a^+(-\frac{1}{2})^2\mathbf{1} \\ \chi & = & \alpha(-1)a^+(-\frac{1}{2})\mathbf{1} \end{array}$$

te ih identificirajmo sa sljedećim formalnim Laurentovim redovima:

$$\begin{aligned}
\beta(z) &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} \beta(n)z^{-n-1} \\
M(z) &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} M(n)z^{-n-1} \\
X(z) &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} X(n+\frac{1}{2})z^{-n-2}
\end{aligned}$$

Lema 4.4.1. *Na $M(1)\otimes W$, vrijede sljedeći komutatori:*

$$\begin{aligned}
&[L(n),\alpha(m)] = -m\alpha(n+m) \\
&\left[L(n), a^+\left(m+\frac{1}{2}\right)\right] = -\left(m+\frac{n+1}{2}\right)a^+\left(m+n+\frac{1}{2}\right) \\
&\left[L(n), a^-\left(m+\frac{1}{2}\right)\right] = -\left(m+\frac{n+1}{2}\right)a^-\left(m+n+\frac{1}{2}\right) \\
&[\beta(n),\alpha(m)] = 0 \\
&\left[\beta(n), a^+\left(m+\frac{1}{2}\right)\right] = -a^+\left(m+n+\frac{1}{2}\right) \\
&\left[\beta(n), a^-\left(m+\frac{1}{2}\right)\right] = a^-\left(m+n+\frac{1}{2}\right) \\
&\left[X\left(n+\frac{1}{2}\right), \alpha(m)\right] = -ma^+\left(m+n+\frac{1}{2}\right) \\
&\left[X\left(n+\frac{1}{2}\right), a^+\left(m+\frac{1}{2}\right)\right] = 0 \\
&\left[X\left(n+\frac{1}{2}\right), a^-\left(m+\frac{1}{2}\right)\right] = \alpha(m+n+1) \\
&[M(n),\alpha(m)] = 0 \\
&\left[M(n), a^+\left(m+\frac{1}{2}\right)\right] = 0 \\
&\left[M(n), a^-\left(m+\frac{1}{2}\right)\right] = a^+\left(m+n+\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Dokaz. Računamo

$$\begin{aligned}
2\alpha_0\omega &= 0 \\
2\alpha_1\omega &= \alpha(-1)\mathbf{1} = \alpha \\
2\alpha_n\omega &= 0 \quad (n\geq 2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_0\chi &= 0 \\
\alpha_1\chi &= \alpha(1)\chi = a^+(-1/2)\mathbf{1} = a^+ \\
\alpha_n\chi &= 0 \quad (n \geq 2)
\end{aligned}$$

$$\alpha_n\beta = 2\alpha_n\mu = 0 \quad (n \geq 0)$$

$$\begin{aligned}
2a^+_{(0)}\omega &= a^+(1/2)\omega = -a^+(-3/2)\mathbf{1} = -Da^+ \\
2a^+_{(1)}\omega &= a^+(3/2)\omega = a^+(-1/2)\mathbf{1} = a^+ \\
2a^+_{(n)}\omega &= 0 \quad (n \geq 2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a^+_{(0)}\beta &= a^+(1/2)\beta = -a^+(-1/2)\mathbf{1} = -a^+ \\
a^+_{(1)}\beta &= a^+(3/2)\beta = 0 \\
a^+_{(n)}\beta &= 0 \quad (n \geq 2)
\end{aligned}$$

$$a^+_{(n)}\chi = 2a^+_{(n)}\mu = 0 \quad (n \geq 0)$$

$$\begin{aligned}
2a^-_{(0)}\omega &= a^-(1/2)\omega = -a^-(-3/2)\mathbf{1} = -Da^- \\
2a^-_{(1)}\omega &= a^-(3/2)\omega = a^-(-1/2)\mathbf{1} = a^- \\
2a^-_{(n)}\omega &= 0 \quad (n \geq 2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a^-_{(0)}\beta &= a^-(1/2)\beta = a^-(-1/2)\mathbf{1} = a^- \\
a^-_{(n)}\beta &= 0 \quad (n \geq 1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a^-_{(0)}\chi &= a^-(1/2)\chi = -\alpha(-1)\mathbf{1} = -\alpha \\
a^-_{(n)}\chi &= 0 \quad (n \geq 1) \\
2a^-_{(0)}\mu &= a^-(1/2)\mu = 2a^+(-1/2)\mathbf{1} = 2a^+ \\
2a^-_{(n)}\mu &= 0 \quad (n \geq 1)
\end{aligned}
$$

Sada komutatorska formula povlači tvrdnju.

□

4.5 Realizacija univerzalne Schrödinger-Virasorove verteks-algebre

Lema 4.5.1. *U Heisenberg-Weylovoj konformnoj algebri $M(1) \otimes W$ vrijede sljedeće λ-zagrade*

$$
\begin{aligned}
[\omega_\lambda \alpha] &= D\alpha + \lambda\alpha \quad \left[\omega_\lambda a^{\pm}\right] = Da^{\pm} + \lambda\frac{1}{2}a^{\pm} \\
\left[\beta_\lambda a^{\pm}\right] &= \mp a^{\pm} \quad [\chi_\lambda \alpha] = Da^+ - \lambda a^+ \\
\left[\chi_\lambda a^-\right] &= -\alpha \quad \left[\mu_\lambda a^-\right] = a^+ \\
[\beta_\lambda \alpha] &= \left[\chi_\lambda a^+\right] = [\mu_\lambda \alpha] = \left[\mu_\lambda a^+\right] = 0
\end{aligned}
$$

Dokaz. Računamo

$$
\begin{aligned}
2\omega_{(0)}\alpha &= [2L(0), \alpha(-1)]\mathbf{1} = -[\alpha(-1), 2\omega(1)]\mathbf{1} = 2(\alpha_0\omega)_0 + 2(\alpha_1\omega)_{-1} \\
&= \alpha_{-1}\mathbf{1} = \alpha \\
2\omega_{(n)}\alpha &= [2L(n), \alpha(-1)]\mathbf{1} = -[\alpha(-1), 2\omega(n+1)]\mathbf{1} = 0 \quad (n \geq 1)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
2\omega_{(0)}a^+ &= [2L(0), a^+(-1/2)]\mathbf{1} = -[a^+(-1/2), 2\omega(1)]\mathbf{1} = \\
&= 2(a^+_{(0)}\omega)_0 + 2(a^+_{(1)}\omega)_{(-1)} = (-(Da^+)_{(0)} + a^+_{(-1)})\mathbf{1} = a^+. \\
2\omega_{(n)}a^+ &= [2L(n), a^+(-1/2)]\mathbf{1} = -[a^+(-1/2), 2\omega(n+1)]\mathbf{1} = \\
&= 2(a^+_{(0)}\omega)_{(n)} + 2(a^+_{(1)}\omega)_{(n-1)} = ((Da^+)_{(n)} + a^+_{(n-1)})\mathbf{1} = 0 \quad (n \geq 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\omega_{(0)}a^- &= [2L(0), a^-(-1/2)]\mathbf{1} = -[a^-(-1/2), 2\omega(1)]\mathbf{1} = \\
&= 2(a^-_{(0)}\omega)_{(0)} + 2(a^-({}_1)\omega)_{(-1)} = (-(Da^-)_{(0)} + a^-_{(-1)})\mathbf{1} = a^-. \\
2\omega_{(n)}a^- &= [2L(n), a^-(-1/2)]\mathbf{1} = -[a^-(-1/2), 2\omega(n+1)]\mathbf{1} = \\
&= 2(a^-_{(0)}\omega)_{(n)} + 2(a^-_{(1)}\omega)_{(n-1)} = (-(Da^-)_{(n)} + a^-_{(n-1)})\mathbf{1} = 0 \quad (n \geq 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_n\alpha &= [\beta(n), \alpha(-1)]\mathbf{1} = -[\alpha(-1), \beta(n)]\mathbf{1} = 0 \quad (n \geq 0) \\
\beta_0 a^+ &= [\beta(0), a^+(-1/2)]\mathbf{1} = -[a^+(-1/2), \beta(0)]\mathbf{1} = -(a^+_0\beta)_{-1} = -a^+_{-1}\mathbf{1} = \\
&= -a^+. \\
\beta_n a^+ &= [\beta(n), a^+(-1/2)]\mathbf{1} = -[a^+(-1/2), \beta(n)]\mathbf{1} = 0 \quad (n \geq 1) \\
\beta_0 a^- &= [\beta(0), a^-(-1/2)]\mathbf{1} = -[a^-(-1/2), \beta(0)]\mathbf{1} = -(a^-_0\beta)_{-1}\mathbf{1} = -a^-_{-1}\mathbf{1} = \\
&= a^-. \\
\beta_n a^- &= [\beta(n), a^-(-1/2)]\mathbf{1} = 0 \quad (n \geq 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_{(0)}\alpha &= [X(1/2), \alpha(-1)]\mathbf{1} = -[\alpha(-1), X(1/2)]\mathbf{1} = -(\alpha_0\chi)_{-1} - (\alpha_1\chi)_{-1} = \\
&= -a^+_{(-1)}\mathbf{1} = -a^+ \\
\chi_{(n)}\alpha &= [X(n+1/2), \alpha(-1)]\mathbf{1} = -[\alpha(-1), X(n+1/2)]\mathbf{1} = -(\alpha_n\chi)_{-1} = \\
&= 0 \quad (n \geq 1) \\
\chi_{(n)}a^+ &= [X(n+1/2), a^+(-1/2)]\mathbf{1} = -[a^+(-1/2), X(n+1/2)]\mathbf{1} = 0 \quad (n \geq 0) \\
\chi_{(0)}a^- &= [X(1/2), a^-(-1/2)]\mathbf{1} = -[a^-(-1/2), X(1/2)]\mathbf{1} = -(a^-_{(0)}\chi)_{-1}\mathbf{1} = \\
&= -\alpha_{-1}\mathbf{1} = -\alpha. \\
\chi_{(n)}a^- &= [X(n+1/2), a^-(-1/2)]\mathbf{1} = -[a^-(-1/2), X(n+1/2)] = 0 \quad (n \geq 1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2\mu_n\alpha &= [M(n),\alpha(-1)]\mathbf{1} = -[\alpha(-1),M(n)]\mathbf{1} = 0 \quad (n \geq 0)\\
2\mu_n a^+ &= [M(n),a^+(-1/2)]\mathbf{1} = -[a^+(-1/2),M(n)]\mathbf{1} = 0 \quad (n \geq 0)\\
2\mu_0 a^- &= [M(0),a^-(-1/2)]\mathbf{1} = -[a^-(-1/2),M(0)]\mathbf{1} = 2(a^-_{(0)}\mu)_{-1}\mathbf{1} =\\
&= 2a^+_{(-1)}\mathbf{1} = 2a^+.\\
2\mu_n a^- &= [M(n),a^-(-1/2)]\mathbf{1} = -[a^-(-1/2),M(n)] = 0 \quad (n \geq 1)
\end{aligned}
$$

Kako je $\omega = \omega_{Heis_{(-1)}} + \omega_{1/2_{(-1)}}$ derivacija na $M(1) \otimes W$, tvrdnja slijedi. □

Theorem 4.5.2. *[38] Vektori*

$$
\begin{aligned}
\mu &= \frac{1}{2}a^+(-1/2)^2\mathbf{1}\\
\chi &= \alpha(-1)a^+(-1/2)\mathbf{1}\\
\beta &= -a^+(-1/2)a^-(-1/2)\mathbf{1}\\
\omega &= \frac{1}{2}\left[\left(a^+(-1/2)a^-(-3/2) - a^+(-3/2)a^-(-1/2)\right) + \alpha(-1)^2\right]\mathbf{1}
\end{aligned}
$$

generiraju verteks podalgebru $\widetilde{L}^{\mathfrak{sv}}(0,0,-1)$ *od* $M(1) \otimes W$*, koja je kvocijent univerzalne verteks algebre* $V^{\mathfrak{sv}}(0,0,-1)$.

Dokaz. Dovoljno je pokazati da ta četiri vektora zadovoljavaju iste λ-zagrade kao generatori od $V^{\mathfrak{sv}}(0,0,-1)$:

$$[\beta_\lambda\beta] = -\lambda \tag{4.20}$$
$$[\omega_\lambda\omega] = (D+2\lambda)\omega \tag{4.21}$$
$$[\omega_\lambda\beta] = D\beta - \lambda\beta \tag{4.22}$$
$$[\chi_\lambda\mu] = [\mu_\lambda\mu] = 0 \tag{4.23}$$
$$[\omega_\lambda\chi] = \left(D + \frac{3}{2}\lambda\right)\chi \tag{4.24}$$
$$[\omega_\lambda\mu] = (D+\lambda)\mu \tag{4.25}$$
$$[\chi_\lambda\chi] = (D+2\lambda)\mu \tag{4.26}$$
$$[\beta_\lambda\chi] = \chi \tag{4.27}$$
$$[\beta_\lambda\mu] = 2\mu. \tag{4.28}$$

Relacije (4.20) i (4.22) slijede iz Leme 4.1.4, a (4.21) iz Teorema 4.1.1. Relacije (4.23) slijede iz činjenice da je

$$[a^+_\lambda a^+] = [a^+_\lambda \alpha] = 0.$$

Dokažimo (4.24). Sjetimo se da je $L(0) = L_{1/2}(0) + L_{Heis}(0)$ i da je a^+ konformne težine $1/2$, α konformne težine 1 i da vrijedi

$$[L(0), \alpha(n)] = -n\alpha(n),\ [L(0), a^+(m+1/2)] = -(m+1/2)a^+(m+1/2)$$

Sada vrijedi:

$$\begin{aligned} L(0)\chi &= L(0)\alpha(-1)a^+(-1/2)\mathbf{1} \\ &= [L(0), \alpha(-1)]a^+(-1/2)\mathbf{1} + \alpha(-1)[L(0), a^+(-1/2)]\mathbf{1} \\ &= \frac{3}{2}\chi \end{aligned}$$

Lako se vidi da je $L(n)\chi = 0$ za $n \geq 1$. Ovime smo dokazali da je

$$[\omega_\lambda \chi] = (D + \lambda\frac{3}{2})\chi.$$

Relacija (4.25) slijedi iz

$$\chi_0\chi = \alpha(1)a^+(-3/2)\alpha(-1)a^+ = a^+(-3/2)a^+ = D\mu$$

$$\chi_1\chi = \alpha(1)a^+(-1/2)\alpha(-1)a^+ = a^+(-1/2)a^+ = 2\mu$$

Relacija

$$[a^+(n+1/2), a^-(m+1/2)] = \delta_{n+m+1,0}$$

lako povlači (4.26) i (4.27). $\square$

Neka je $V^{\mathcal{H}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta)$ Heisenberg-Virasorova verteks-algebra generirana s $\bar{\beta}, \bar{\omega}$ i sljedećim $\lambda-$zagradama:

$$\begin{aligned} [\bar{\beta}_\lambda \bar{\beta}] &= c_\beta \lambda \\ [\bar{\omega}_\lambda \bar{\omega}] &= D\bar{\omega} + 2\bar{\omega}\lambda + \frac{c_L}{12}\lambda^3 \\ [\bar{\omega}_\lambda \bar{\beta}] &= D\bar{\beta} + \bar{\beta}\lambda - c_{L,\beta}\lambda^2 \end{aligned}$$

Korolar 4.5.3. *Za svaku uređenu trojku* $(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta) \in \mathbb{C}^3$ *postoji netrivijalan homomorfizam verteks-algebri*

$$f : V^{\mathfrak{sv}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta) \to M(1) \otimes W \otimes V^{\mathcal{H}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta + 1). \tag{4.29}$$

Dokaz. Sljedeća četiri vektora u $M(1) \otimes W \otimes V^{\mathcal{H}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta + 1)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta} &= \beta_{M(1)\otimes W} + \bar{\beta} \\ \tilde{\omega} &= \omega_{M(1)\otimes W} + \bar{\omega} \\ \tilde{\chi} &= \chi \in M(1) \otimes W \\ \tilde{\mu} &= \mu \in M(1) \otimes W \end{aligned}$$

zadovoljavaju iste λ-zagrade (4.10) - (4.18) kao generatori od $V^{\mathfrak{sv}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta)$ stoga postoji netrivijalni homomorfizam verteks-algebri

$$f : V^{\mathfrak{sv}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta) \to M(1) \otimes W \otimes V^{\mathcal{H}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta + 1). \tag{4.30}$$

$\square$

4.5.1 O problemu dekompozicije $V^{\mathfrak{sv}}(0,0,-1)$ kao $M_\beta(1) \otimes L^{Vir}_{-1}$-modula

Označimo s $M_\beta(1)$ Heisenbergovu verteks podalgebru od $V^{\mathfrak{sv}}(0,0,-1)$ generiranu vektorom β i pripadnim Virasorovim vektorom $\omega_\beta = -\frac{1}{2}\beta(-1)^2$. Neka je L^{Vir}_{-1} Virasorova verteks-algebra generirana sljedećim Virasorovim vektorom centralnog naboja $c = -1$:

$$\overline{\omega} = \omega - \omega_\beta = (L(-2) + \frac{1}{2}\beta(-1)^2)\mathbf{1}$$

Neka za $r \in \mathbb{C}$, $M_\beta(1, r)$ označava ireducibilni $M_\beta(1)$-modul gdje $\beta(0)$ djeluje kao $r\mathrm{Id}$, a $L^{Vir}(c, h)$ ireducibilni modul za Virasorovu algebru najveće težine (c, h). Za $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ stavimo

$$w_{2n} = a^+(-1/2)^{2n}\mathbf{1}, \qquad w_{2n+1} = \alpha(-1)a^+(-1/2)^{2n+1}\mathbf{1}.$$

Lema 4.5.4. *Vrijedi*

(1) Za $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ je $w_j \in \widetilde{L}^{\mathfrak{sv}}(0, 0, -1)$.

(2) $W_{2n} := \left(M_\beta(1) \otimes L^{Vir}_{-1}\right).w_{2n} \cong M_\beta(1, 2n) \otimes \tilde{L}^{Vir}(-1, n(2n+1))$.

(3) $W_{2n+1} := \left(M_\beta(1) \otimes L^{Vir}_{-1}\right).w_{2n+1} \cong M_\beta(1, 2n+1) \otimes \tilde{L}^{Vir}(-1, (n+1)(2n+1))$.

gdje je $\widetilde{L}^{Vir}(-1, h)$ modul najveće težine h.

Dokaz. Tvrdnja (1) slijedi direktno iz formule. Uočimo nadalje da su w_{2n} i w_{2n+1} vektori najveće težine za Virasorovu i Heisenbergovu Liejevu algebru i da vrijedi:

$$
\begin{aligned}
&L(0)w_{2n} = nw_{2n}, \quad \beta(0)w_{2n} = 2nw_{2n}, \\
&L(0)w_{2n+1} = (n + 3/2)w_{2n+1}, \quad \beta(0)w_{2n+1} = (2n+1)w_{2n+1}.
\end{aligned}
$$

Odatle slijede tvrdnje (2) i (3). □

Stavimo $\mathcal{W} = \coprod_{j=0}^{\infty} W_j$. Tada je $\mathcal{W}$ modul za $M_\beta(1) \otimes L^{Vir}_{-1}$. Postavlja se pitanje da li je $\mathcal{W} = V^{\mathfrak{sv}}(0, 0, -1)$. No odgovor je negativan. Pomoću analize formula karaktera za module najveće težine za Virasorovu algebru može se dokazati

$$
\mathrm{ch}[V^{\mathfrak{sv}}(0, 0, -1)](q, z) - \mathrm{ch}[\mathcal{W}](q, z) = z^2 q^3 + \cdots . \tag{4.31}
$$

Ovaj račun pokazuje da $V^{\mathfrak{sv}}(0, 0, -1)$ ima singularni vektor za Heisenberg-Virasorovu verteks-algebru $M_\beta(1) \otimes L^{Vir}_{-1}$ na konformnoj težini 3. U sljedećem poglavlju ćemo izračunati taj singularni vektor.

Napominjemo da mi izostavljamo izvod formule (4.31) jer bitno koristi strukturu Vermaovih modula za Virasorovu Liejevu algebru pa ga ovom prilikom nećemo navoditi. Napomenimo da to ne utječe na rezultate u nastavku ovog poglavlja.

4.5.2 Primjer: singularni vektor konformne težine 3

Direktnim računom pokazuju se sljedeće formule

$$\begin{aligned}
L(1)X(-3/2)^2\mathbf{1} &= 2M(-2)\mathbf{1}\\
L(1)M(-1)L(-2)\mathbf{1} &= 0\\
L(1)M(-3)\mathbf{1} &= 3M(-2)\mathbf{1}\\
L(1)\beta(-1)M(-2)\mathbf{1} &= [L(1),\beta(-1)]M(-2)\mathbf{1}+\beta(-1)[L(1),M(-2)]\mathbf{1}\\
&= \beta(0)M(-2)\mathbf{1}+2\beta(-1)M(-1)\mathbf{1}\\
&= 2M(-2)\mathbf{1}+2\beta(-1)M(-1)\mathbf{1}\\
L(1)\beta(-2)M(-1)\mathbf{1} &= 2\beta(-1)M(-1)\mathbf{1}\\
L(1)\beta(-1)^2M(-1)\mathbf{1} &= 4\beta(-1)M(-1)\mathbf{1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta(1)X(-3/2)^2\mathbf{1} &= M(-2)\mathbf{1}\\
\beta(1)M(-1)L(-2)\mathbf{1} &= M(-1)\beta(-1)\mathbf{1}=\beta(-1)M(-1)\mathbf{1}-2M(-2)\mathbf{1}\\
\beta(1)M(-3)\mathbf{1} &= 2M(-2)\mathbf{1}\\
\beta(1)\beta(-1)M(-2)\mathbf{1} &= -M(-2)\mathbf{1}+2\beta(-1)M(-1)\mathbf{1}\\
\beta(1)\beta(-2)M(-1)\mathbf{1} &= 0\\
\beta(1)\beta(-1)^2M(-1)\mathbf{1} &= -2\beta(-1)M(-1)\mathbf{1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta(2)X(-3/2)^2\mathbf{1} &= 2M(-1)\mathbf{1}\\
\beta(2)M(-1)L(-2)\mathbf{1} &= 2M(1)L(-2)\mathbf{1}=2M(-1)\mathbf{1}\\
\beta(2)M(-3)\mathbf{1} &= 2M(-1)\mathbf{1}\\
\beta(2)\beta(-1)M(-2)\mathbf{1} &= 0\\
\beta(2)\beta(-2)M(-1)\mathbf{1} &= -2M(-1)\mathbf{1}\\
\beta(2)\beta(-1)^2M(-1)\mathbf{1} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(2)X(-3/2)^2\mathbf{1} &= \frac{5}{2}X(1/2)X(-3/2)\mathbf{1} = 5M(-1)\mathbf{1} \\
L(2)M(-1)L(-2)\mathbf{1} &= M(1)L(-2)\mathbf{1} + c/2M(-1)\mathbf{1} = M(-1)\mathbf{1} \quad (c=0) \\
L(2)M(-3)\mathbf{1} &= 3M(-1)\mathbf{1} \\
L(2)\beta(-1)M(-2)\mathbf{1} &= \beta(1)M(-2)\mathbf{1} = 2M(-1)\mathbf{1} \\
L(2)\beta(-2)M(-1)\mathbf{1} &= 2\beta(0)M(-1)\mathbf{1} = 4M(-1)\mathbf{1} \\
L(2)\beta(-1)^2M(-1)\mathbf{1} &= \beta(1)\beta(-1)M(-1)\mathbf{1} = -M(-1)\mathbf{1}
\end{aligned}$$

Neka je

$$\begin{aligned}
w &= X(-3/2)^2\mathbf{1} + [a_1M(-1)L(-2) + a_2M(-3) + a_3\beta(-1)M(-2) + \\
&\quad +a_4\beta(-2)M(-1) + a_5\beta(-1)^2M(-1)]\,\mathbf{1}
\end{aligned}$$

Uvjeti

$$L(1)w = \beta(1)w = \beta(2)w = 0 \tag{4.32}$$

daju:

$$\begin{aligned}
L(1)w &= 2M(-2)\mathbf{1} + 3a_2M(-2)\mathbf{1} + 2a_3(M(-2)\mathbf{1} + \beta(-1)M(-1)\mathbf{1} + \\
&+ 2a_4\beta(-1)M(-1)\mathbf{1} + 4a_5\beta(-1)M(-1)\mathbf{1} \\
&= (2 + 3a_2 + 2a_3)M(-2)\mathbf{1} + (2a_3 + 2a_4 + 4a_5)\beta(-1)M(-1)\mathbf{1} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta(1)w &= M(-2)\mathbf{1} + a_1\beta(-1)M(-1)\mathbf{1} - 2a_1M(-2)\mathbf{1} + 2a_2M(-2)\mathbf{1} + \\
&\quad -a_3M(-2)\mathbf{1} + 2a_3\beta(-1)M(-1)\mathbf{1} - 2a_5\beta(-1)M(-1)\mathbf{1} \\
&= (1 - 2a_1 + 2a_2 - a_3)M(-2)\mathbf{1} + (a_1 + 2a_3 - 2a_5)\beta(-1)M(-1)\mathbf{1} = 0
\end{aligned}$$

$$L(2)w = (5 + a_1 + 3a_2 + 2a_3 + 4a_4 - a_5)M(-1)\mathbf{1} = 0$$

Odavde zbog linearne nezavisnosti vektora PBW baze izlazi sustav:

$$\begin{aligned}
2 + 3a_2 + 2a_3 &= 0 \\
a_3 + a_4 + 2a_5 &= 0 \\
1 - 2a_1 + 2a_2 - a_3 &= 0 \\
a_1 + 2a_3 - 2a_5 &= 0 \\
5 + a_1 + 3a_2 + 2a_3 + 4a_4 - a_5 &= 0
\end{aligned}$$

Rješenje sustava je

$$a_1 = -(68/107), a_2 = -(100/107), a_3 = 43/107, a_4 = -(61/107), a_5 = 9/107. \tag{4.33}$$

Na ovaj način smo pokazali:

Propozicija 4.5.5. *Vektor*

$$\begin{aligned}
w &= X(-3/2)^2\mathbf{1} - \left[\frac{68}{107}M(-1)L(-2) + \frac{100}{107}M(-3) - \frac{43}{107}\beta(-1)M(-2) + \right. \\
&+ \left. \frac{61}{107}\beta(-2)M(-1) - \frac{9}{107}\beta(-1)^2M(-1)\right]\mathbf{1}
\end{aligned}$$

je singularan vektor u $V^{\mathfrak{sv}}(0,0,-1)$. *Vrijedi*

$$\left(M_\beta(1) \otimes L^{Vir}_{-1}\right).w = M_\beta(1,2) \otimes \widetilde{L}^{Vir}(-1,5).$$

Lema 4.5.6. *Pri Unterbergerovom homomorfizmu*

$$V^{\mathfrak{sv}}(0,0,-1) \to M(1) \otimes W,$$

vrijedi da se vektori PBW baze preslikavaju

$$
\begin{aligned}
X(-3/2)^2\mathbf{1} &\mapsto \left[\alpha(-1)^2 a^+(-1/2)^2 + a^+(-5/2)a^+(-1/2)\right]\mathbf{1} \\
M(-1)L(-2)\mathbf{1} &\mapsto \frac{1}{4}\left[\alpha(-1)^2 a^+(-1/2)^2 + 2a^+(-5/2)a^+(-1/2) + \right. \\
&- 2a^+(-3/2)^2 + a^+(-1/2)^3 a^-(-3/2) + \\
&- \left. a^+(-3/2)a^+(-1/2)^2 a^-(-1/2)\right]\mathbf{1} \\
M(-3)\mathbf{1} &\mapsto \left[a^+(-5/2)a^+(-1/2) + \frac{1}{2}a^+(-3/2)^2\right]\mathbf{1} \\
\beta(-1)M(-2)\mathbf{1} &\mapsto \left[a^+(-5/2)a^+(-1/2) - a^+(-3/2)a^+(-1/2)^2 a^-(-1/2) + \right. \\
&+ \left. a^+(-3/2)^2\right]\mathbf{1} \\
\beta(-2)M(-1)\mathbf{1} &\mapsto -\frac{1}{2}\left[a^+(-3/2)a^+(-1/2)^2 a^-(-1/2) + \right. \\
&+ \left. a^+(-1/2)^3 a^-(-3/2) + a^+(-5/2)a^+(-1/2)\right]\mathbf{1} \\
\beta(-1)^2 M(-1)\mathbf{1} &\mapsto \left[a^+(-5/2)a^+(-1/2) + \frac{1}{2}a^+(-1/2)^4 a^-(-1/2)^2\right. \\
&+ a^+(-3/2)^2 + \frac{1}{2}a^+(-3/2)a^+(-1/2)^3 + \\
&- \left. \frac{5}{2}a^+(-3/2)a^+(-1/2)^2 a^-(-1/2)\right]\mathbf{1}
\end{aligned}
$$

Dokaz. Prisjetimo se da je Unterbergerov homomorfizam zadan na generatorima od $V^{\mathfrak{sv}}(0,0,-1)$:

$$
\begin{aligned}
\beta(-1)\mathbf{1} &\mapsto -a^+(-1/2)a^-(-1/2)\mathbf{1} \\
L(-2)\mathbf{1} &\mapsto \frac{1}{2}\left[\alpha(-1)^2 + a^+(-1/2)a^-(-3/2) - a^-(-1/2)a^+(-3/2)\right]\mathbf{1} \\
M(-1)\mathbf{1} &\mapsto \frac{1}{2}a^+(-1/2)^2\mathbf{1} \\
X(-3/2)\mathbf{1} &\mapsto \alpha(-1)a^+(-1/2)\mathbf{1}
\end{aligned}
$$

Opći koeficijenti verteks operatora pridruženih tim generatorima dani su sa:

$$\begin{aligned}
\beta_{-1}\mathbf{1} &= -\sum_{j=0}^{\infty}\left[a^+(-j-1/2)a^-(j-1/2)+a^-(-j-3/2)a^+(j+1/2)\right]\mathbf{1}\\
M_{-1}\mathbf{1} &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\left[a^+(-j-1/2)a^+(j-1/2)+a^+(-j-3/2)a^+(j+1/2)\right]\mathbf{1}\\
X_{-1}\mathbf{1} &= \sum_{j=0}^{\infty}\left[\alpha(-j-1)a^+(j-1/2)+a^+(-j-3/2)\alpha(j)\right]\mathbf{1}
\end{aligned}$$

Nadalje, iz aksioma derivacije na verteks-algebri $M(1)\otimes W$, izlazi:

$$\begin{aligned}
\beta(-2)\mathbf{1} &\mapsto D\left[-a^+(-1/2)a^-(-1/2)\right]\mathbf{1} = -\left[a^+(-3/2)a^-(-1/2)+\right.\\
&+ \left. a^+(-1/2)a^-(-3/2)\right]\mathbf{1}\\
M(-2)\mathbf{1} &\mapsto D\left[\frac{1}{2}a^+(-1/2)^2\right]\mathbf{1} = a^+(-3/2)a^+(-1/2)\mathbf{1}\\
M(-3)\mathbf{1} &\mapsto \frac{1}{2}D\left[a^+(-3/2)a^+(-1/2)\right]\mathbf{1} =\\
&= \left[a^+(-5/2)a^+(-1/2)+\frac{1}{2}a^+(-3/2)^2\right]\mathbf{1}
\end{aligned}$$

Odavde direktnim računom izlazi:

1.

$$\begin{aligned}
X(-3/2)^2\mathbf{1} &\mapsto \left[\alpha(-1)a^+(-1/2)+\alpha(0)a^+(-3/2)\right]\alpha(-1)a^+(-1/2) + \\
&+ \left.\alpha(-2)a^+(1/2)+\alpha(1)a^+(-5/2)\right]\alpha(-1)a^+(-1/2)\Big]\mathbf{1} =\\
&= \left[\alpha(-1)^2a^+(-1/2)^2+a^+(-5/2)a^+(-1/2)\right]\mathbf{1}
\end{aligned}$$

2.

$$
\begin{aligned}
& 4M(-1)L(-2)\mathbf{1} \mapsto \\
& \left[a^+(-1/2)^2 + a^+(-3/2)a^+(1/2)\right] a^+(-1/2)a^-(-3/2)\mathbf{1} \\
- & \left[a^+(-1/2)^2 + a^+(-3/2)a^+(1/2)\right] a^-(-1/2)a^+(-3/2)\mathbf{1} \\
+ & \left[a^+(-3/2)a^+(1/2) + a^+(-5/2)a^+(3/2)\right] a^+(-1/2)a^-(-3/2)\mathbf{1} \\
- & \left[a^+(-3/2)a^+(1/2) + a^+(-5/2)a^+(3/2)\right] a^-(-1/2)a^+(-3/2)\mathbf{1} \\
+ & \left[a^+(-5/2)a^+(3/2) + a^+(-7/2)a^+(5/2)\right] a^+(-1/2)a^-(-3/2)\mathbf{1} \\
- & \left[a^+(-5/2)a^+(3/2) + a^+(-7/2)a^+(5/2)\right] a^-(-1/2)a^+(-3/2)\mathbf{1} \\
+ & \left[a^+(-1/2)^2 + a^+(-3/2)a^+(1/2)\right] \alpha(-1)^2\mathbf{1} \\
= & \alpha(-1)^2a^+(-1/2)^2\mathbf{1} \\
+ & a^+(-1/2)^3a^-(-3/2)\mathbf{1} \\
- & a^+(-3/2)a^+(-1/2)^2a^-(-1/2)\mathbf{1} \\
- & 2a^+(-3/2)^2\mathbf{1} \\
+ & 2a^+(-5/2)a^+(-1/2)\mathbf{1}
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
& \beta(-2)M(-1)\mathbf{1} = 2M(-3)\mathbf{1} + M(-1)\beta(-2)\mathbf{1} \mapsto \\
& \left[2a^+(-5/2)a^+(-1/2) + a^+(-3/2)^2\right] \mathbf{1} + \\
- & \frac{1}{2}\left[a^+(-1/2)^2 + a^+(-3/2)a^+(1/2)\right] a^+(-3/2)a^-(-1/2)\mathbf{1} \\
- & \frac{1}{2}\left[a^+(-1/2)^2 + a^+(-3/2)a^+(1/2)\right] a^+(-1/2)a^-(-3/2)\mathbf{1} \\
- & \frac{1}{2}\left[a^+(-3/2)a^+(1/2) + a^+(-5/2)a^+(3/2)\right] a^+(-3/2)a^-(-1/2)\mathbf{1} \\
- & \frac{1}{2}\left[a^+(-3/2)a^+(1/2) + a^+(-5/2)a^+(3/2)\right] a^+(-1/2)a^-(-3/2)\mathbf{1} \\
- & \frac{1}{2}\left[a^+(-5/2)a^+(3/2) + a^+(-7/2)a^+(5/2)\right] a^+(-3/2)a^-(-1/2)\mathbf{1} \\
- & \frac{1}{2}\left[a^+(-5/2)a^+(3/2) + a^+(-7/2)a^+(5/2)\right] a^+(-1/2)a^-(-3/2)\mathbf{1} \\
= & \Bigg[a^+(-5/2)a^+(-1/2) - \frac{1}{2}a^+(-3/2)a^+(-1/2)^2a^-(-1/2) + \\
& -\frac{1}{2}a^+(-1/2)^3a^-(-3/2)\Bigg] \mathbf{1}
\end{aligned}
$$

4.

$$
\begin{aligned}
& \beta(-1)M(-2)\mathbf{1} \mapsto \\
& \left[-a^+(-1/2)a^-(-1/2) - a^+(1/2)a^-(-3/2)\right] a^+(-1/2)a^+(-3/2)\mathbf{1} + \\
+ & \left[-a^+(-3/2)a^-(1/2) - a^+(3/2)a^-(-5/2)\right] a^+(-1/2)a^+(-3/2)\mathbf{1} + \\
+ & \left[-a^+(-5/2)a^-(3/2) - a^+(5/2)a^-(-7/2)\right] a^+(-1/2)a^+(-3/2)\mathbf{1} + \\
= & \left[-a^+(-3/2)a^+(-1/2)^2a^-(-1/2)\mathbf{1} + a^+(-3/2)^2\mathbf{1} + a^+(-5/2)a^+(-1/2)\right] \mathbf{1}
\end{aligned}
$$

5.

$$
\begin{aligned}
& 2\beta(-1)M(-1)\mathbf{1} \mapsto \\
& \left[-a^+(-1/2)a^-(-1/2) - a^+(1/2)a^-(-3/2)\right] a^+(-1/2)^2\mathbf{1} \\
+ & \left[-a^+(-3/2)a^-(1/2) - a^+(3/2)a^-(-5/2)\right] a^+(-1/2)^2\mathbf{1} \\
= & \left[-a^+(-1/2)^3a^-(-1/2) + 2a^+(-3/2)a^+(-1/2)\right] \mathbf{1}
\end{aligned}
$$

6.

$$
\begin{aligned}
& 2\beta(-1)^2 M(-1)\mathbf{1} \mapsto \\
& \left[a^+(-1/2)a^-(-1/2) + a^+(1/2)a^-(-3/2)\right] a^+(-1/2)^3 a^-(-1/2)\mathbf{1} \\
+ \;& \left[a^+(-3/2)a^-(1/2) + a^+(3/2)a^-(-5/2)\right] a^+(-1/2)^3 a^-(-1/2)\mathbf{1} \\
+ \;& \left[a^+(-5/2)a^-(3/2) + a^+(5/2)a^-(-7/2)\right] a^+(-1/2)^3 a^-(-1/2)\mathbf{1} \\
- \;& 2\left[a^+(-1/2)a^-(-1/2) + a^+(1/2)a^-(-3/2)\right] a^+(-3/2)a^+(-1/2)\mathbf{1} \\
- \;& 2\left[a^+(-3/2)a^-(1/2) + a^+(3/2)a^-(-5/2)\right] a^+(-3/2)a^+(-1/2)\mathbf{1} \\
- \;& 2\left[a^+(-5/2)a^-(3/2) + a^+(5/2)a^-(-7/2)\right] a^+(-3/2)a^+(-1/2)\mathbf{1} \\
= \;& \left[a^+(-1/2)^4 a^-(-1/2)^2 + 2a^+(-3/2)^2 + a^+(-1/2)^3 a^-(-3/2) + \right. \\
- \;& \left. 5a^+(-3/2)a^+(-1/2)^2 a^-(-1/2) + 2a^+(-5/2)a^+(-1/2)\right] \mathbf{1}
\end{aligned}
$$

□

Theorem 4.5.7. *U univerzalnoj Schrödinger-Virasorovoj verteks-algebri* $V^{\mathfrak{sv}}(0,0,-1)$ *singularan vektor (za Heisenberg-Virasorovu verteks podalgebru)*

$$
\begin{aligned}
w \;=\; & X(-3/2)^2\mathbf{1} \\
- \;& \frac{68}{107} M(-1)L(-2)\mathbf{1} \\
- \;& \frac{100}{107} M(-3)\mathbf{1} \\
+ \;& \frac{43}{107} \beta(-1)M(-2)\mathbf{1} \\
- \;& \frac{61}{107} \beta(-2)M(-1)\mathbf{1} \\
+ \;& \frac{9}{107} \beta(-1)^2 M(-1)\mathbf{1}
\end{aligned}
$$

se pri Unterbergerovom homomorfizmu

$$V^{\mathfrak{sv}}(0,0,-1) \to M(1) \otimes W$$

preslikava u singularan vektor

$$\begin{aligned} w \quad \mapsto \quad & \frac{9}{214}\big[20\alpha(-1)^2a^+(-1/2)^2+4a^+(-1/2)^3a^-(-3/2)+8a^+(-3/2)^2+ \\ & -8a^+(-5/2)a^+(-1/2)-4a^+(-3/2)a^+(-1/2)^2a^-(-1/2)+ \\ & +a^+(-1/2)^4a^-(-1/2)^2\big]\,\mathbf{1} \end{aligned}$$

u verteks-algebri $M(1)\otimes W$.

Dokaz.

$$\begin{aligned} w \quad \mapsto \quad & \big[\alpha(-1)^2a^+(-1/2)^2+a^+(-5/2)a^+(-1/2)\big]\,\mathbf{1} \\ - \quad & \frac{17}{107}\big[\alpha(-1)^2a^+(-1/2)^2-2a^+(-3/2)^2+2a^+(-5/2)a^+(-1/2)\big]\,\mathbf{1} \\ - \quad & \frac{17}{107}\big[a^+(-1/2)^3a^-(-3/2)-a^+(-3/2)a^+(-1/2)^2a^-(-1/2)\big]\,\mathbf{1} \\ - \quad & \frac{100}{107}\left[\frac{1}{2}a^+(-3/2)^2+a^+(-5/2)a^+(-1/2)\right]\mathbf{1} \\ + \quad & \frac{43}{107}\big[a^+(-5/2)a^+(-1/2)-a^+(-3/2)a^+(-1/2)^2a^-(-1/2)+a^+(-3/2)^2\big]\,\mathbf{1} \\ - \quad & \frac{61}{107}\left[a^+(-5/2)a^+(-1/2)-\frac{1}{2}a^+(-3/2)a^+(-1/2)^2a^-(-1/2)-\frac{1}{2}a^+(-1/2)^3a^-(-3/2)\right]\mathbf{1} \\ + \quad & \frac{9}{107}\left[\frac{1}{2}a^+(-1/2)^4a^-(-1/2)^2+a^+(-5/2)a^+(-1/2)+a^+(-3/2)^2\right]\mathbf{1} \\ + \quad & \frac{9}{107}\left[\frac{1}{2}a^+(-1/2)^3a^-(-3/2)-\frac{5}{2}a^+(-3/2)a^+(-1/2)^2a^-(-1/2)\right]\mathbf{1} \\ = \quad & \frac{90}{107}\alpha(-1)^2a^+(-1/2)^2\mathbf{1} \\ + \quad & \frac{18}{107}a^+(-1/2)^3a^-(-3/2)\mathbf{1} \\ + \quad & \frac{36}{107}a^+(-3/2)^2\mathbf{1} \\ - \quad & \frac{36}{107}a^+(-5/2)a^+(-1/2)\mathbf{1} \\ - \quad & \frac{18}{107}a^+(-3/2)a^+(-1/2)^2a^-(-1/2)\mathbf{1} \\ + \quad & \frac{9}{214}a^+(-1/2)^4a^-(-1/2)^2\mathbf{1} \end{aligned}$$

$\square$

4.5.3 Primjer: $V^{\mathcal{H}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta)$–singularni vektor konformne težine 3 za proizvoljne centralne naboje

Direktnim računom pokazuju se sljedeće formule

$$\begin{aligned}
L(1)X(-3/2)^2\mathbf{1} &= 2M(-2)\mathbf{1}\\
L(1)M(-1)L(-2)\mathbf{1} &= 0\\
L(1)M(-3)\mathbf{1} &= 3M(-2)\mathbf{1}\\
L(1)\beta(-1)M(-2)\mathbf{1} &= [L(1),\beta(-1)]M(-2)\mathbf{1} + \beta(-1)[L(1), M(-2)]\mathbf{1}\\
&= \beta(0)M(-2)\mathbf{1} + 2\beta(-1)M(-1)\mathbf{1}\\
&= 2M(-2)\mathbf{1} + 2\beta(-1)M(-1)\mathbf{1}\\
L(1)\beta(-2)M(-1)\mathbf{1} &= 2\beta(-1)M(-1)\mathbf{1}\\
L(1)\beta(-1)^2M(-1)\mathbf{1} &= 4\beta(-1)M(-1)\mathbf{1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta(1)X(-3/2)^2\mathbf{1} &= M(-2)\mathbf{1}\\
\beta(1)M(-1)L(-2)\mathbf{1} &= M(-1)\beta(-1)\mathbf{1} = \beta(-1)M(-1)\mathbf{1} - 2M(-2)\mathbf{1}\\
\beta(1)M(-3)\mathbf{1} &= 2M(-2)\mathbf{1}\\
\beta(1)\beta(-1)M(-2)\mathbf{1} &= c_\beta M(-2)\mathbf{1} + 2\beta(-1)M(-1)\mathbf{1}\\
\beta(1)\beta(-2)M(-1)\mathbf{1} &= 0\\
\beta(1)\beta(-1)^2M(-1)\mathbf{1} &= 2c_\beta\beta(-1)M(-1)\mathbf{1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta(2)X(-3/2)^2\mathbf{1} &= 2M(-1)\mathbf{1}\\
\beta(2)M(-1)L(-2)\mathbf{1} &= 2M(1)L(-2)\mathbf{1} - 2c_{L,\beta}M(-1)\mathbf{1} = 2M(-1)\mathbf{1} - 2c_{L,\beta}M(-1)\mathbf{1}\\
\beta(2)M(-3)\mathbf{1} &= 2M(-1)\mathbf{1}\\
\beta(2)\beta(-1)M(-2)\mathbf{1} &= 0\\
\beta(2)\beta(-2)M(-1)\mathbf{1} &= 2c_\beta M(-1)\mathbf{1}\\
\beta(2)\beta(-1)^2M(-1)\mathbf{1} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(2)X(-3/2)^2\mathbf{1} &= \frac{5}{2}X(1/2)X(-3/2)\mathbf{1} = 5M(-1)\mathbf{1} \\
L(2)M(-1)L(-2)\mathbf{1} &= M(1)L(-2)\mathbf{1} + \frac{c_L}{2}M(-1)\mathbf{1} = (1+\frac{c_L}{2})M(-1)\mathbf{1} \\
L(2)M(-3)\mathbf{1} &= 3M(-1)\mathbf{1} \\
L(2)\beta(-1)M(-2)\mathbf{1} &= \beta(1)M(-2)\mathbf{1} = 2M(-1)\mathbf{1} \\
L(2)\beta(-2)M(-1)\mathbf{1} &= [2\beta(0) - 2c_{L,\beta}]M(-1)\mathbf{1} = (4-2c_{L,\beta})M(-1)\mathbf{1} \\
L(2)\beta(-1)^2M(-1)\mathbf{1} &= \beta(1)\beta(-1)M(-1)\mathbf{1} = c_\beta M(-1)\mathbf{1}
\end{aligned}$$

Zapišimo sada singularni vektor u PBW bazi:

$$\begin{aligned}
w &= X(-3/2)^2\mathbf{1} \\
&+ [a_1M(-1)L(-2) + a_2M(-3) + a_3\beta(-1)M(-2) + \\
&+ a_4\beta(-2)M(-1) + a_5\beta(-1)^2M(-1)\big]\,\mathbf{1}.
\end{aligned}$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}
L(1)w &= 2M(-2)\mathbf{1} + 3a_2M(-2)\mathbf{1} + 2a_3M(-2)\mathbf{1} + \beta(-1)M(-1)\mathbf{1} + \\
&+ 2a_4\beta(-1)M(-1)\mathbf{1} + 4a_5\beta(-1)M(-1)\mathbf{1} \\
&= (2+3a_2+2a_3)M(-2)\mathbf{1} + (2a_3+2a_4+4a_5)\beta(-1)M(-1)\mathbf{1}
\end{aligned}$$

$$L(2)w = [5 + a_1(1+\frac{c_L}{2}) + 3a_2 + 2a_3 + a_4(4-2c_{L,\beta}) + a_5c_\beta]M(-1)\mathbf{1}$$

$$\begin{aligned}
\beta(1)w &= M(-2)\mathbf{1} + \\
&+ a_1\beta(-1)M(-1)\mathbf{1} - 2a_1M(-2)\mathbf{1} + 2a_2M(-2)\mathbf{1} + a_3c_\beta M(-2)\mathbf{1} + \\
&+ 2a_3\beta(-1)M(-1)\mathbf{1} + 2a_5c_\beta\beta(-1)M(-1)\mathbf{1} \\
&= (1-2a_1+2a_2+a_3c_\beta)M(-2)\mathbf{1} + (a_1+2a_3+2a_5c_\beta)\beta(-1)M(-1)\mathbf{1}
\end{aligned}$$

$$\beta(2)w = (2 + (2-2c_{L,\beta})a_1 + 2a_2 + 2a_4c_\beta)M(-1)\mathbf{1}$$

Zbog linenarne nezavisnosti, uvjeti

$$L(1)w = \beta(1)w = \beta(2)w = 0 \tag{4.34}$$

daju sustav:

$$\begin{aligned} 3a_2 + 2a_3 &= -2 \\ a_3 + a_4 + 2a_5 &= 0 \\ -2a_1 + 2a_2 + c_\beta a_3 &= -1 \\ a_1 + 2a_3 + 2c_\beta a_5 &= 0 \\ (2 + c_L)a_1 + 6a_2 + 4a_3 + (8 - 4c_{L,\beta})a_4 + 2c_\beta a_5 &= -10 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Rješenje sustava je

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{2(8 - 17c_\beta + 9c_\beta^2 - 4c_{L,\beta} + 2c_\beta c_{L,\beta})}{64 - 40c_\beta + 3c_\beta^2 - 32c_{L,\beta} + 12c_\beta c_{L,\beta} - 4c_\beta c_L + 3c_\beta^2 c_L} \\ a_2 &= -\frac{2}{3} + \frac{2(-8 + 35c_\beta + 4c_{L,\beta} - c_\beta c_L)}{3(64 - 40c_\beta + 3c_\beta^2 - 32c_{L,\beta} + 12c_\beta c_{L,\beta} - 4c_\beta c_L + 3c_\beta^2 c_L)} \\ a_3 &= -\frac{-8 + 35c_\beta + 4c_{L,\beta} - c_\beta c_L}{64 - 40c_\beta + 3c_\beta^2 - 32c_{L,\beta} + 12c_\beta c_{L,\beta} - 4c_\beta c_L + 3c_\beta^2 c_L}, \\ a_4 &= -\frac{44 - 17c_\beta - 2c_L + c_\beta c_L}{64 - 40c_\beta + 3c_\beta^2 - 32c_{L,\beta} + 12c_\beta c_{L,\beta} - 4c_\beta c_L + 3c_\beta^2 c_L}, \\ a_5 &= -\frac{-18 - 9c_\beta - 2c_{L,\beta} + c_L}{64 - 40c_\beta + 3c_\beta^2 - 32c_{L,\beta} + 12c_\beta c_{L,\beta} - 4c_\beta c_L + 3c_\beta^2 c_L}, \end{aligned}$$

Na ovaj način smo pokazali:

Propozicija 4.5.8. *Vektor*

$$\begin{aligned} w &= X(-3/2)^2\mathbf{1} \\ &+ \big[a_1 M(-1)L(-2) + a_2 M(-3) + a_3\beta(-1)M(-2) + a_4\beta(-2)M(-1) + \\ &+ a_5\beta(-1)^2 M(-1)\big]\,\mathbf{1} \end{aligned}$$

je singularan vektor za Heisenberg-Virasorovu podalgebru $V^{\mathcal{SH}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta)$ *od* $V^{\mathfrak{sv}}(c_L, c_{L,\beta}, c_\beta)$, *za*

$$64 - 40c_\beta + 3c_\beta^2 - 32c_{L,\beta} + 12c_\beta c_{L,\beta} - 4c_\beta c_L + 3c_\beta^2 c_L \neq 0.$$

Napomena 5. *Uočavamo da za* $c_\beta = -1, c_{L,\beta} = c_L = 0$, *koeficijenti singularnog vektora su isti oni koje smo izračunali za slučaj upravo tih centralnih naboja:*

$$a_1 = -\frac{68}{107}, \quad a_2 = -\frac{100}{107}, \quad a_3 = \frac{43}{107}, \quad a_4 = -\frac{61}{107}, \quad a_5 = \frac{9}{107}.$$

Bibliografija

[1] D. Adamović, *Classification of irreducible modules of certain subalgebras of free boson vertex algebra*, J. Algebra **270** (2003), 115-132, math.QA/0207155

[2] D. Adamović, B. Jandrić, G. Radobolja, u pripremi

[3] D. Adamović, A. Milas, *Logarithmic intertwining operators and* $W(2, 2p-1)$ *algebras*, J. Math. Physics, **48** (2007), 073503, 20 pages, math.QA/0702081

[4] D. Adamović, A. Milas, *Lattice construction of logarithmic modules for certain vertex algebras*, Selecta Math. (N.S.), **15** (2009), 535-561, arXiv:0902. 3417

[5] D. Adamović, G. Radobolja, *Free field realization of the twisted Heisenberg-Virasoro algebra at level zero and its applications*, Journal of Pure and Applied Algebra 219 (10) 2015, pp. 4322-4342.

[6] D. Adamović, G. Radobolja, *Self-dual and logarithmic representations of the twisted Heisenberg-Virasoro algebra at level zero*, Communications in Contemporary Mathematics Vol. 21, No. 02, 1850008 (2019)

[7] D. Adamović, G. Radobolja, *On Free Field Realizations of* $W(2,2)$*-Modules*, SIGMA **12** (2016), 13 pages

[8] Naruhiko Aizawa, Yuta Kimura, *Galilean conformal algebras in two spatial dimensions*, arXiv:1112.0634v2 [math-ph]

[9] E. Arbarello, C. De Concini, V. G. Kac and C. Procesi, *Moduli spaces of curves and representation theory*, Comm. Math. Phys. (1) 117(1988), 1-36.

[10] N. Banerjee, D.P. Jatkar, SA. Mukhi, T. Neogi, *Free field realisations of the* BMS_3 *algebra and its extensions*, JHEP 06 (2016) 024, arXiv:1512.06240

[11] Y. Billig, *Representations of the twisted Heisenberg-Virasoro algebra at level zero*, Canad. Math. Bull 46, no. 4 (2003) 529-537, https://arxiv.org/abs/math/0201314

[12] W. Eholzer, L. Feher, A. Honecker, *Ghost Systems: A Vertex Algebra Point of View*, Nucl.Phys. B518 (1998) 669-688

[13] H. Fa, J. Li, Y. Zheng, *Structures of the twisted $N = 1$ Schrödinger-Neveu-Schwarz algebra*, Communications in Algebra 2017. Vol. 45. No. 2, 630-659.

[14] B. Feigin, D. B. Fuchs, *Representations of Infinite-dimensional Lie Groups and Lie Algebras* (Gordon and Breach, New York, 1989).

[15] Igor B. Frenkel, Y.-Z. Huang, J. Lepowsky, *Memoirs of the American Mathematical Society: On Axiomatic Approaches to Vertex Operator Algebras and Modules*, American Mathematical Society, July 1993, Volume 104, Numer 494 (first of 6 numbers), ISSN 0065-9266

[16] S. Gao, C. Jiang, Y. Pei, *Structure of the extended Schrödinger-Virasoro Lie algebra* $\tilde{\mathfrak{sv}}^*$, Algebra Colloqium 16. 549 (2009.).

[17] K. Iohara and Y. Koga, *Representation theory of the Virasoro algebra*, Springer Monographs in Math., Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011

[18] V.G. Kac, *Vertex algebras for beginners*, second ed., University Lecture Series, vol. 10, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[19] V.G. Kac, *Infinite-dimensional Lie algebras*, 3rd edition, Cambridge University Press, Cambridge 1990.

[20] V. G. Kac, *Lie superalgebras*, Adv. Math., **26** (1977), 8-96.

[21] Victor G. Kac, Pierluigi Mösender Frajria, Paolo Papi, *Multiplets of representations, twisted Dirac operators and Vogan's conjecture in affine setting*, Advances in Mathematics 217(2008) 2485-2562.

[22] V. G. Kac, A. de Sole, *Finite vs affine $W-$algebras*, Jpn. J. Math. 1 (2006), no. 1, 137-261.

[23] V. G. Kac, I. Todorov, *Superconformal current algebras and their unitary representations*, Comm. Math. Phys., **102** (1985), 337-347.

[24] L. Křižka, P. Somberg, *Conformal Galilei algebras, symmetric polynomials and singular vectors*, Lett Math Phys (2018) 108: 1, arXiv:1612.08891v1

[25] J. Lepowsky, H. Li, *Introduction to vertex operator algebras and their representations*, Progress in Mathematics, 227. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 2004. xiv+318 pp

[26] H. Li, *Representation theory and tensor product theory for vertex operator algebras*, PhD. thesis (Rutgers University 1994) [hep-

th/9406211]

[27] H. Li, *Local systems of vertex operators, vertex superalgebras and modules*, J. Pure Appl. Algebra 109 (1996), no. 2, 143–195. arXiv: hep-th/9406185

[28] H. Li, *Local systems of twisted vertex operators, vertex operator superalgebras and twisted modules*, Contemp. Math. 193 (1996) 203–236 ;arXiv: q-alg. 9504022

[29] A. Matsuo, K. Nagatomo, *A note on free bosonic vertex algebra and its conformal vectors*, Journal of Algebra **212**, 395-418 (1999)

[30] A. Neveu, J. H. Schwarz, *Factorizable dual model of pions*, Nucl. Phys., **B31** (1971), 86-112

[31] N. Ohta, H. Suzuki, $N = 2$ *superconformal models and their free field realizations*, Nucl. Phys., **B332** (1990), 146-168

[32] G. Radobolja, *Subsingular vectors in Verma modules, and tensor product of weight modules over the twisted Heisenberg-Virasoro algebra and* $W(2,2)$ *algebra*, Journal of Mathematical Physics 54 071701 (2013)

[33] P. Ramond, J. H. Schwarz, *Classification of dual model gauge algebras*, Phys. Lett., **64B** (1976), 75-77

[34] J. Rasmunsen, C. Raymond, *Galilean contractions of W-algebras*, Nuclear Physics B 922 (2017) 435-479

[35] J. Rasmunsen, C. Raymond, *Higher order Galilean contractions*, arXiv:1901.06069v1 [hep-th] 18 Jan 2019

[36] C. Roger, J. Unterberger, *The Schrödinger-Virasoro Lie group and algebra: representation theory and cohomological study*, Annales Henri Poincare 7(7); 1477-1529; January 2006.

[37] A.Tsuchiya, Y. Kanie, *Fock Space Representations of the Virasoro Algebra Intertwining Operators*, Publ. RIMS Kyoto Univ. 22 (1986), 259-327

[38] J. Unterberger, *On vertex algebra representations of the Schrödinger-Virasoro Lie algebra*, Nuclear Physics B 823 [PM] (2009) 320-371

[39] W. Wang, Y. Xu, C. Xia, *A class of Schrödinger-Virasoro typle Lie conformal algebras*, International Journal of Mathematics, Volume 26, Issue 08, July 2015

[40] H. Wu, L. Yuan, *Cohomology of Heisenberg-Virasoro conformal algebra*, Journal of Lie Theory, 26(4), January 2016.

Životopis

Rođen sam 22. ožujka 1986. u Zagrebu. Osnovnu školu i jezičnu gimnaziju završio sam u Zagrebu. Dodiplomski studij fizike, smjer diplomirani inženjer fizike, završio sam 2009. godine na Fizičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilista u Zagrebu. Iste godine upisujem Zajednički sveučilisni doktorski studij matematike na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilista u Zagrebu.
Sudjelovao sam na konferencijama Representation Theory XIII, Dubrovnik, 2013. i Representation theory XV, Dubrovnik, 2017.
Od 2009. član sam Seminara za algebru.

IZJAVA O IZVORNOSTI RADA

Ja, _BERISLAV JANDRIĆ__________________________________, student Prirodoslovno-matematičkog
fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, s prebivalištem na adresi
______[redacted]
____,OIB _________________________,
JMBAG ________________________________, ovim putem izjavljujem pod materijalnom i kaznenom
odgovornošću da je moj doktorski rad pod naslovom:
_________VERTEKS ALGEBRE PRIDRUŽENE REPREZENTACIJAMA N=1 SUPER HEISENBERG-VIRASOROVE I SCHRÖDINGER-VIRASOROVE ALGEBRE____
___
____
____
____, isključivo moje autorsko djelo, koje je u
potpunosti samostalno napisano uz naznaku izvora drugih autora i dokumenata korištenih u radu.

U Zagrebu, ___srpnja 2019.________________________

____
Potpis